ISSN 0387-4086 Прикладна гідромеханіка. 1999. Том 1 (73), N 1. С. 26 – 34

УДК 532.542.4

УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЗВЕСИ

С. И. КРИЛЬ, В. П. БЕРМАН

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 20.09.98

Составлены осредненные по вероятности дифференциальные уравнения, описывающие газовзвесь как турбулентную термодинамическую среду. Продемонстрирована возможность использования математического аппарата теории обобщенных функций для составления такого рода уравнений. Показано, что формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему среды, является инвариантом при переходе от обычных производных к обобщенным.

Виведено осереднені по ймовірності диференційні рівняння, що описують суміш газу і твердих часток як турбулентне термодинамічне середовище. Продемонстровано можливість використання математичного апарату теорії узагальнених функцій для виведення такого роду рівнянь. Показано, що формула диференціювання по часі інтеграла, узятого по рухомому об'єму середовища, є інваріантом при переході від звичайних похідних до узагальнених.

Probability-averaged differential equations are written, describing the flows of suspension of solid dispersion materials in gas as a turbulent thermodynamic medium. The possibility of using the mathematical apparatus of the theory of generalized functions for writing such type of equations is demonstrated. It is shown that the formulae of differentiation with respect to time of the integral taken with respect to the moving volume of the medium, is invariant in transition from ordinary derivatives to generalized ones.

ВВЕДЕНИЕ

К основным уравнениям, описывающим турбулентное течение смеси газа и твердых частиц как термодинамической среды, относятся осредненные дифференциальные уравнения неразрывности, движения и притока тепла. Вопрос заключается в том, как более рационально составить эти уравнения.

При составлении такого рода уравнений важным является вопрос о выборе способа осреднения характеристик фаз. В теории турбулентных потоков газовзвесей исходные уравнения сохранения записывают обычно для каждой фазы как сплошной среды, затем их осредняют по времени [1, 2] . Представление о сплошности фаз носит, чаще всего, феноменологический характер или связано с осреднением характеристик фаз по элементарному объему. При этом по аналогии с обычным понятием сплошности делается допущение о том, что в любом элементарном объеме содержится достаточно большое количество частиц взвеси, чтобы в совокупности их можно было приближенно считать сплошной средой с непрерывно распределенными в ней характеристиками состояния и движения. Такое допущение накладывает ограничение на размеры твердых частиц. Поскольку эти частицы должны быть очень мелкими, особенно при их малых объемных концентрациях, область применения уравнений становится ограниченной, что является одним из их недостатков. Другой, более существенный недостаток известных уравнений динамики газовзвеси заключается в том, что они содержат моменты корреляции пульсаций концентрации и скоростей, а уравнения газовой фазы, кроме того, и пульсаций плотности газа. Учет этих корреляционных моментов в уравнениях не только усложняет проблему замыкания системы уравнений, но и приводит к определенным логическим противоречиям, что было обнаружено еще в 40-х годах в так называемой гравитационной теории переноса взвешенных наносов турбулентным потоком жидкости [3]. Противоречия заключаются в том, что в горизонтальном равномерном двухфазном потоке осредненные во времени вертикальные скорости движения фаз не равны нулю, хотя осредненные во времени объемные расходы этих фаз в вертикальном направлении равны нулю.

Целью данной статьи является составление сравнительно простых и более общих уравнений для турбулентного потока газовзвеси, свободных от вышеуказанных недостатков. Вместо пространственного и временного методов осреднения используется вероятностный метод, аналогичный принятому в современной статистической гидромеханике [4]. Преимущество его, скажем, над пространственным методом состоит в том, что он не связан с внутренним и внешним линейными масштабами потока и поэтому не накладывает ограничения на крупность частиц взвеси, разве что на их минимальные размеры: они должны быть намного больше молекулярно-кинетических масшта-

© С. И. Криль, В. П. Берман, 1999

бов, чтобы каждую отдельно взятую частицу можно было считать сплошным телом.

Вероятностный метод осреднения нашел широкое применение в теоретических исследованиях турбулентных взвесенесущих потоков [5] и гидравлического трубопроводного транспорта капсул по трубам [6]. Кстати, при исследовании транспортирования капсул турбулентным потоком этот метод осреднения оказывается единственно возможным для математического описания совместного движения жидкости и капсул как двухфазной гетерогенной среды, размер частиц твердой фазы которой соизмерим с диаметром трубы. Этот метод осреднения ниже развивается и обобщается на случай турбулентного потока газовзвеси, когда несущая среда сжимаема. Поскольку в данной статье он применяется непосредственно к разрывным характеристикам фаз, не дифференцируемым в рамках классического математического анализа, для определения их частных производных по координатам и времени используется математический аппарат теории обобщенных функций.

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ВЕРОЯТНОСТНОГО ОСРЕДНЕНИЯ

Поля гидро- и термодинамических характеристик турбулентного потока газовзвеси рассматриваются как случайные поля, так что на основе теории вероятностей можно построить выборочное пространство, точками которого являются всевозможные поля данной характеристики и которое снабжено вероятностной мерой, нормированной единицей. При этом вероятностное среднее той или иной характеристики следует понимать как среднее по статистическому ансамблю полей этой характеристики.

Пусть φ_g, φ_p и φ – какие-либо одноименные характеристики газа, твердых частиц и газовзвеси соответственно. Из-за различия в физико-механических свойствах газовой и твердой фаз допускается, что функции φ_g и φ_p заданы строго в области своей фазы, где они однозначны и непрерывны вместе со своими частными производными. Функция же φ определена во всей области потока, равна φ_g внутри газовой и φ_p – внутри твердой фазы.

Введем функцию $\tilde{\varphi}_k$ $(k = g, p)$, равную:

$$\tilde{\varphi}_k = \alpha_k \varphi, \qquad (1)$$

где α_k – разрывная функция, принимающая значение единицы внутри k -ой фазы и значение нуль вне нее. Функция $\tilde{\varphi}_k$, как срезка характеристики φ по области k -ой фазы, равна φ_k в точках k -ой фазы и нулю в точках, не принадлежащих k -ой фазе.

Вероятностное среднее функции $\tilde{\varphi}_k$ определяется формулой [5]

$$\overline{\tilde{\varphi}_k} = \overline{\alpha_k \varphi} = \overline{\alpha_k} \langle \varphi_k \rangle, \qquad (2)$$

где чертой сверху обозначено безусловное вероятностное среднее, а угловой скобкой – условное вероятностное среднее, получаемое при условии, что данная точка занята k -ой фазой. Входящая в (2) величина $\bar{\alpha}_k$ представляет собой локальную вероятностную концентрацию k -ой фазы и равняется вероятности того, что данная точка потока принадлежит k -ой фазе.

Если характеристики фаз ψ_k связаны с плотностями этих фаз ρ_k и представлены в виде $\psi_k = \rho_k \varphi_k$, то вероятностное среднее функции $\tilde{\psi}_k = \alpha_k \rho \varphi$ определяется так:

$$\overline{\tilde{\psi}_k} = \overline{\alpha_k \rho \varphi} = \overline{\alpha_k \rho} \langle \varphi_k \rangle^* =$$
$$= \overline{\alpha_k} \langle \rho_k \rangle \langle \varphi_k \rangle^*, \qquad (3)$$

где угловой скобкой со звездочкой обозначено средневзвешенное по массе вероятностное значение характеристики. В частном случае, когда $\rho_k = const$, из (3) следует, что

$$\langle \varphi_k \rangle^* = \langle \varphi_k \rangle.$$

Как видим, формулы осреднений (2) и (3) явно не учитывают моментов корреляции пульсаций осредняемых величин. Это связано с введением условных средних $\langle \varphi_k \rangle$ и $\langle \varphi_k \rangle^*$. Например, принимая в качестве осредненного значения величину $\langle \varphi_k \rangle$ и представляя мгновенные величины α_k и φ в виде суммы их осредненных значений и пульсаций, т.е. $\alpha_k = \bar{\alpha}_k + \alpha'_k$ и $\varphi_k = \langle \varphi_k \rangle + \varphi'_k$, получаем

$$\overline{\alpha_k \varphi} = \overline{\alpha_k} \langle \varphi_k \rangle + \overline{\alpha'_k \varphi'_k}. \qquad (4)$$

Однако, по определению среднее $\langle \varphi_k \rangle = \overline{\alpha_k \varphi} / \overline{\alpha_k}$, поэтому из (4) находим, что $\overline{\alpha'_k \varphi'_k} = 0$.

Любые гидро- и термодинамические характеристики фаз $\tilde{\varphi}_k$ должны удовлетворять соответствующим дифференциальным уравнениям гидро- и термодинамики и надлежащим краевым условиям. Поскольку функции $\tilde{\varphi}_k$ претерпевают разрыв непрерывности на границе раздела фаз, которую обозначим символом S, их частные производные по пространственным координатам и времени являются обобщенными функциями и определяются иначе, чем частные производные в классическом математическом анализе. Так, производная от $\tilde{\varphi}_k$ по координате x определяется формулой [5,7]

$$\nabla_i \tilde{\varphi}_k = \{\nabla_i \tilde{\varphi}_k\} - (\varphi_k)_s n_{k,i} \delta_s, \qquad (5)$$

где ∇_i – оператор $\partial/\partial x_i$; $\{\nabla_i \tilde{\varphi}_k\}$ – обычная частная производная, равная $\nabla_i \varphi_k$ внутри k -ой фазы, и нулю вне ее; $(\varphi_k)_s$ – значение функции φ_k на границе раздела фаз; $n_{k,i}$ – проекция внешней по отношению к k -ой фазе нормали к межфазной границе на ось Ox_i; δ_s – сингулярный функционал, сосредоточенный на границе S. Осреднив уравнение (5), будем иметь [5]

$$\overline{\nabla_i \tilde{\varphi}_k} = \overline{\alpha_k} \nabla_i \langle \varphi_k \rangle - \overline{(\varphi_k)_s n_{k,i} \delta_s}. \qquad (6)$$

Из (6) вытекает, что среднее значение производной от разрывной функции $\tilde{\varphi}_k$ не равно производной от среднего значения этой функции.

Единственным инвариантом при переходе от обычных производных к обобщенным является производная по времени от интеграла, взятого по подвижному объему. Это легко доказывается следующим образом.

Рассмотрим производную

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V \tilde{\varphi}_k dV, \qquad (7)$$

где от времени t зависит не только подынтегральная функция, но и объем V. Используя известное в механике сплошной среды [8] правило дифференцирования по времени интеграла с подвижной областью интегрирования, получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V \tilde{\varphi}_k dV = \int\limits_V \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial t} + \nabla_\alpha (\tilde{\varphi}_k v_\alpha) \right) dV, \qquad (8)$$

где v_α – компонента скорости, с которой движутся точки объема V; частные производные по времени и пространственным координатам – обобщенные функции. В формуле (8), равно как и в последующих, по дважды повторяющемуся в одночленном выражении индексу проводится суммирование от единицы до трех.

С другой стороны, можно написать

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V \tilde{\varphi}_k dV = \frac{d}{dt} \int\limits_{V_k} \varphi_k dV =$$

$$= \int\limits_{V_k} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \nabla_\alpha \varphi_k v_\alpha \right) dV =$$

$$= \int\limits_V \left(\left\{ \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial t} \right\} + \{\nabla_\alpha \tilde{\varphi}_k v_\alpha\} \right) dV, \qquad (9)$$

где V_k – часть объема V, занятая k -ой фазой. Сравнение этого выражения с выражением (8) дает равенство

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial t} + \nabla_\alpha \tilde{\varphi}_k v_\alpha \right) dV =$$

$$= \int\limits_V \left(\left\{ \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial t} \right\} + \{\nabla_\alpha \tilde{\varphi}_k v_\alpha\} \right) dV, \qquad (10)$$

которое свидетельствует об инвариантности производной (7) при переходе от обычных производных к обобщенным. Это равенство полезно тем, что в формуле дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному индивидуальному объему, оно позволяет осуществить перестановку операции осреднения с дифференцированием по координатам и времени в подынтегральном выражении, так что

$$\overline{\frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial t}} + \overline{\nabla_\alpha \tilde{\varphi}_k v_\alpha} = \frac{\partial \overline{\tilde{\varphi}_k}}{\partial t} + \nabla_\alpha \overline{\tilde{\varphi}_k v_\alpha}. \qquad (11)$$

Рассматривая вероятностный метод осреднения, коснемся еще вопроса о том, насколько близки эмпирические пространственно-временные средние к соответствующим вероятностным средним. Дело в том, что широкое применение пространственного и временного методов осреднения в теории турбулентных двухфазных потоков мотивируется обычно тем, что применяемые в экспериментальных исследованиях приборы измеряют не вероятностное среднее, а средние по элементарному объему и времени.

Известная в статистической гидромеханике эргодическая гипотеза допускает сходимость пространственного или временного среднего к вероятностному в случае квазиоднородного или, соответственно, квазистационарного поля гидродинамической величины при неограниченном объеме или интервале осреднения. Более общий случай, когда поле квазистационарно, но квазинеоднородно в заданном направлении, рассмотрен в работе [5], в которой получено дифференциальное уравнение, связывающее пространственно-временное и вероятностное средние. При этом установлено, что степень отклонения пространственно-временного среднего от вероятностного зависит от кривизны кривой распределения вероятностного среднего в заданном направлении и от параметра ς_L, представляющего собой отношение характерного масштаба элементарного объема осреднения к характерному линейному масштабу потока. Выполненные на основе вышеупомянутого уравнения специальные исследования показывают, что для значений ς_L, равных или близких к 0,01, эти средние совпадают друг с другом с точностью до нескольких процентов при сравнительно большой кривизне кривой распределения вероятностного среднего, и с точностью до десятой и меньше долей процента при малой кривизне. Даже при значении $\varsigma_L = 0.1$ наблюдается в среднем вполне удовлетворительное совпадение рассматриваемых средних, их взаимные отклонения в данном случае находятся в пределах ошибок измерений. Поэтому учитывая, что применяемые в экспериментальных исследованиях современные приборы, например, лазерный доплеровский анемометр, позволяют измерять параметры двухфазного потока в очень малых элементарных объемах, характеризующихся значениями $\varsigma_L \ll 1$, можно заключить, что получаемые эмпирические пространственно-временные средние с достаточно высокой степенью точностью соответствуют вероятностным средним. Так что даже с точки зрения соответствия теоретических средних эмпирическим средним пространственный и временной методы осреднения не имеют преимуществ над вероятностным как наиболее объективным и универсальным методом осреднения.

Переходим к выводу осредненных по вероятности уравнений для турбулентного потока газовзвеси.

УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ И ДВИЖЕНИЯ

Смесь газа и твердых частиц рассматривается как неоднородная сплошная среда, которая в отличие от однородной сплошной среды содержит границу раздела фаз, сингулярную относительно их характеристик состояния. Предполагается, что фазовые переходы и химические реакции отсутствуют, газ – сжимаемая среда, а частицы взвеси – абсолютно твердые тела.

Для любого индивидуального объема V газовзвеси, ограниченного поверхностью F, балансовые уравнения массы и количества движения имеют такой же вид, как и для любого индивидуального объема однородной сплошной среды [8]:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV = 0, \qquad (12)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho v_i dV = \int\limits_V \rho g_i dV + \int\limits_F \sigma_{i\alpha} n_\alpha dF \qquad (13)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Здесь v_i и g_i - проекции векторов скорости и ускорения силы тяжести на ось Ox_i прямоугольной системы координат; $\sigma_{i\alpha}$ и n_α – компоненты тензора напряжений и внешней к поверхности F нормали.

Учитывая специфику газовзвеси как гетерогенной среды, разложим тензор напряжений $\sigma_{i\alpha}$ на составляющие $\sigma_{i\alpha}^{(pg)}$ и $\sigma_{i\alpha}^{(pp)}$:

$$\sigma_{i\alpha} = \sigma_{i\alpha}^{(pg)} + \sigma_{i\alpha}^{(pp)}, \qquad (14)$$

где $\sigma_{i\alpha}^{(pg)}$ и $\sigma_{i\alpha}^{(pp)}$ – напряжения, обусловленные межфазовым взаимодействием и соударениями твердых частиц одна о другую соответственно. Напряжения $\sigma_{i\alpha}^{(pg)}$ равны $\sigma_{g,i\alpha}$ в газовой и $\sigma_{p,i\alpha}$ в твердой фазе, тогда как напряжения $\sigma_{i\alpha}^{(pp)}$ равны $\sigma_{p,i\alpha}^*$ в сталкивающихся друг с другом твердых частицах и нулю вне их.

Представив входящие в уравнения (12) и (13) характеристики в виде суммы срезок их по областям газовой и твердой фаз и применив правило (8) дифференцирования по времени интеграла, взятого по индивидуальному объему, преобразуем эти уравнения к виду:

$$\int\limits_V \sum_k \left(\frac{\partial \alpha_k \rho}{\partial t} + \nabla_\alpha \alpha_k \rho v_\alpha\right) dV = 0, \qquad (15)$$

$$\int\limits_V \sum_k \left(\frac{\partial \alpha_k \rho v_i}{\partial t} + \nabla_\alpha \alpha_k \rho v_i v_\alpha\right) dV = \qquad (16)$$

$$= \int\limits_V \sum_k \alpha_k \rho g_i dV + \int\limits_F \left(\sum_k \alpha_k \sigma_{i\alpha}^{(pg)} + \sigma_{i\alpha}^{(pp)}\right) n_\alpha dF.$$

Далее рассмотрим каждое из этих уравнений в отдельности.

Осреднив уравнение (15), учитывая выражение (11) и формулы (1) и (2), получим

$$\int\limits_V \sum_k \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_k \langle\rho_k\rangle}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar{\alpha}_k \langle\rho_k\rangle \langle v_{k,\alpha}\rangle^*\right) dV = 0$$

или, так как это равенство справедливо для любого конечного объема, имеем осредненное дифференциальное уравнение неразрывности газовзвеси

$$\sum_k \left(\frac{\partial \bar{\alpha}_k \langle\rho_k\rangle}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar{\alpha}_k \langle\rho_k\rangle \langle v_{k,\alpha}\rangle^*\right) = 0. \qquad (17)$$

Здесь среднемассовая скорость движения k -ой фазы $\langle v_{k,\alpha}\rangle^*$ определена как

$$\langle v_{k,\alpha}\rangle^* = \overline{\alpha_k \rho v_\alpha} / \overline{\alpha_k} \langle\rho_k\rangle$$

и представляет собой среднестатистическую скорость движения центра масс бесконечно малого объема, получаемую при условии, что этот объем занят k -ой фазой.

Уравнение (17) можно записать в обычном для механики сплошной среды виде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar{\rho} \bar{v}_\alpha^* = 0;$$

где $\bar{\rho}$ и $\bar{v}_\alpha^*$ – осредненные плотность и скорость движения газовзвеси:

$$\bar{\rho} = \sum_k \bar{\alpha}_k \langle \rho_k \rangle$$

$$\bar{v}_\alpha^* = \frac{1}{\bar{\rho}} \sum_k \bar{\alpha}_k \langle \rho_k \rangle \langle v_{k,\alpha} \rangle^*,$$

при этом среднемассовая скорость газовзвеси $\bar{v}_\alpha^*$ физически трактуется как среднестатистическая скорость движения центра масс бесконечно малого объема, получаемая независимо от того, какой фазой он заполнен.

Разделив уравнение (17) по фазам, будем иметь

$$\frac{\partial \bar{\rho}_g}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar{\rho}_g \langle v_{g,\alpha} \rangle^* = 0, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar{\rho}_p \langle v_{p,\alpha} \rangle^* = 0, \qquad (19)$$

где $\bar{\rho}_g$ и $\bar{\rho}_p$ – так называемые приведенные плотности газовой и твердой фаз, равные

$$\bar{\rho}_g = (1 - \bar{\alpha}_p) \langle \rho_g \rangle,$$

$$\bar{\rho}_p = \bar{\alpha}_p \rho_p.$$

Переходя к уравнениям движения (16), вначале займемся преобразованием входящего в них интеграла

$$\int_F \left(\sum_k \alpha_k \sigma_{i\alpha}^{(pg)} + \sigma_{i\alpha}^{(pp)} \right) n_\alpha dF.$$

Обозначив этот интеграл символом R_i, запишем его в виде

$$R_i = \int_F \sum_k \alpha_k \sigma_{i\alpha}^{(pg)} n_\alpha dF + \int_F \sigma_{i\alpha}^{(pp)} n_\alpha dF. \qquad (20)$$

Первый интеграл справа в (20) преобразуем в интеграл по объему V. Если учесть, что в данном интеграле подынтегральные функции $\alpha_k \sigma_{i\alpha}^{(pg)}$, представляющие собой срезку $\tilde{\sigma}_{k,i\alpha}^{(pg)}$ тензора $\sigma_{i\alpha}^{(pg)}$ по области k -ой фазы, претерпевают разрывы непрерывности на межфазной границе и их частные производные по координатам определяются формулой (5), то преобразование этого интеграла с помощью теоремы Гаусса-Остроградского дает выражение

$$\int_F \sum_k \alpha_k \sigma_{i\alpha}^{(pg)} n_\alpha dF = \qquad (21)$$

$$= \int_V \left[\sum_k \{ \nabla_\alpha \alpha_k \sigma_{i\alpha}^{(pg)} \} - \sum_k (\sigma_{k,i\alpha})_s n_{k,\alpha} \delta_s \right] dV.$$

Подставим выражение (21) в уравнение (20), после чего осредним это уравнение, учитывая формулу (6). В результате будем иметь

$$\bar{R}_i = \int_V [\sum_k \bar{\alpha}_k \nabla_\alpha \langle \sigma_{k,i\alpha} \rangle - \sum_k \overline{(\sigma_{k,i\alpha})_s n_{k,\alpha} \delta_s}] dV +$$

$$+ \int_F \bar{\sigma}_{i\alpha}^{(pp)} n_\alpha dF. \qquad (22)$$

Поскольку силы, приложенные к элементу межфазной границы со стороны обеих фаз, равны между собой и имеют противоположные знаки, на границе S выполняются условия:

$$(\sigma_{g,i\alpha})_s n_{g,\alpha} = -(\sigma_{g,i\alpha})_s n_{p,\alpha}, \qquad (23)$$

$$(\sigma_{p,i\alpha})_s n_{p,\alpha} = (\sigma_{g,i\alpha})_s n_{p,\alpha},$$

где $(\sigma_{g,i\alpha})_s$ – напряжения газовой фазы в точках, примыкающих к границе S. Вследствие выполнения граничных условий (23) получаем тождество

$$\sum_k \overline{(\sigma_{k,i\alpha})_s n_{k,\alpha} \delta_s} = \qquad (24)$$

$$= -\overline{(\sigma_{g,i\alpha})_s n_{p,\alpha} \delta_s} + \overline{(\sigma_{g,i\alpha})_s n_{p,\alpha} \delta_s} = 0.$$

Входящая с разными знаками в уравнение (24) и, следовательно, в (22) величина $\overline{(\sigma_{g,i\alpha})_s n_{p,\alpha} \delta_s}$ есть не что иное как i -ая компонента вектора среднестатистической силы, действующей со стороны газа на твердые частицы в единице объема газовзвеси. Обозначим ее символом $\bar{f}_i$, так что

$$\bar{f}_i = \overline{(\sigma_{g,i\alpha})_s n_{p,\alpha} \delta_s}. \qquad (25)$$

Появление в соотношении (22) слагаемых, выражающих силу $\bar{f}_i$, является следствием того, что первый интеграл в правой части равенства (20) вначале преобразовали в объемный интеграл, а затем его осреднили. Такая процедура не касается второго интеграла в правой части этого равенства, поскольку он выражает i -ую компоненту поверхностной силы, обусловленной взаимодействием твердых частиц между собой, а не с несущей средой. Этот интеграл можно преобразовать в объемный лишь после его осреднения:

$$\int\limits_F \bar{\sigma}_{i\alpha}^{(pp)} n_\alpha dF = \int\limits_V \nabla_\alpha \bar{\sigma}_{i\alpha}^{(pp)} dV =$$

$$= \int\limits_V \nabla_\alpha \bar{\beta}_p \langle \sigma^*_{p,i\alpha} \rangle dV, \qquad (26)$$

где β_p – вероятность взаимных столкновений твердых частиц, а условное среднее $\langle \sigma^*_{p,i\alpha} \rangle$ определяется равенством $\langle \sigma^*_{p,i\alpha} \rangle = \bar{\sigma}_{i\alpha}^{(pp)} / \bar{\beta}_p$.

Далее, из граничных условий (23) следует, что

$$(\sigma_{g,i\alpha})_s n_{g,\alpha} + (\sigma_{p,i\alpha})_s n_{p,\alpha} = 0,$$

поэтому тензор $\sigma_{i\alpha}^{(pg)}$ можно считать непрерывным во всей области потока. В данном случае, как показано в [5], выполняется равенство $\langle \sigma_{p,i\alpha} \rangle = \langle \sigma_{g,i\alpha} \rangle$, вследствие чего

$$\sum_k \bar{\alpha}_k \nabla_\alpha \langle \sigma_{k,i\alpha} \rangle = \nabla_\alpha \langle \sigma_{g,i\alpha} \rangle. \qquad (27)$$

С учетом равенств (24) – (27) выражение (22) принимает вид

$$\bar{R}_i = \int\limits_V (\nabla_\alpha \langle \sigma_{g,i\alpha} \rangle + \nabla_\alpha \bar{\beta}_p \langle \sigma^*_{p,i\alpha} \rangle -$$

$$- \bar{f}_i + \bar{f}_i) dV. \qquad (28)$$

Несмотря на то, что входящие в уравнение (28) силы межфазного взаимодействия взаимно сокращаются, они формально оставлены, так как ниже понадобятся при разделении уравнений движения по фазам.

Итак, возвращаясь к уравнениям движения (16), осредним их по вероятности, помня при этом, что входящий в них поверхностный интеграл обозначен символом R_i. В результате, учитывая выражение (28), будем иметь

$$\int\limits_V \Big[\sum_k \Big(\frac{\partial \bar{\rho}_k \langle v_{k,i} \rangle^*}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar{\rho}_k \langle v_{k,i} \rangle^* \langle v_{k,\alpha} \rangle^* -$$

$$- \bar{\rho}_k g_i - \nabla_\alpha \bar{T}_{k,i\alpha} \Big) - \nabla_\alpha \langle \sigma_{g,i\alpha} \rangle - \qquad (29)$$

$$- \nabla_\alpha \bar{\beta}_p \langle \sigma^*_{p,i\alpha} \rangle + \bar{f}_i - \bar{f}_i \Big] dV = 0,$$

где $\bar{T}_{k,i\alpha} = -\bar{\rho}_k \langle v'_{k,i} v'_{k,\alpha} \rangle^*$ есть тензор добавочных напряжений, обусловленных турбулентными пульсациями скоростей фаз.

Освобождаясь в (29) от интегрирования по произвольному объему V, затем разделяя уравнение по фазам, получаем дифференциальные уравнения движения

$$\frac{\partial \bar{\rho}_g \langle v_{g,i} \rangle^*}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar{\rho}_g \langle v_{g,i} \rangle^* \langle v_{g,\alpha} \rangle^* = \qquad (30)$$

$$= \bar{\rho}_g g_i + \nabla_\alpha \bar{T}_{g,i\alpha} + \nabla_\alpha \langle \sigma_{g,i\alpha} \rangle - \bar{f}_i;$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_p \langle v_{p,i} \rangle^*}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar{\rho}_p \langle v_{p,i} \rangle^* \langle v_{p,\alpha} \rangle^* = \qquad (31)$$

$$= \bar{\rho}_p g_i + \nabla_\alpha \bar{T}_{p,i\alpha} + \nabla_\alpha \bar{\beta}_p \langle \sigma^*_{p,i\alpha} \rangle + \bar{f}_i.$$

Входящую в эти уравнения силу межфазного взаимодействия $\bar{f}_i$ можно разложить на две составляющие [5]:

$$\bar{f}_i = \bar{\alpha}_p \nabla_\alpha \langle \sigma_{g,i\alpha} \rangle + \bar{f}_i^o,$$

где $\bar{\alpha}_p \nabla_\alpha \langle \sigma_{g,i\alpha} \rangle$ – обобщенная архимедова сила, действующая на твердые частицы в единице объема газовзвеси; $\bar{f}_i^o$ – сила гидродинамического сопротивления, обусловленная обтеканием твердых частиц газом и отнесенная к единице объема газовзвеси.

В общем случае неизотермического движения газовзвеси к уравнениям движения (30) и (31) следует добавить используемое для идеальных газов уравнение состояния Клапейрона

$$\langle P_g \rangle = \langle \rho_g \rangle R \langle T_g \rangle,$$

связывающее осредненные давление $\langle P_g \rangle$, температуру $\langle T_g \rangle$ и плотность $\langle \rho_g \rangle$ газа и содержащее газовую постоянную . При этом температура $\langle T_g \rangle$ определяется из уравнений теплопроводности, получаемых на основе уравнений притока тепла.

УРАВНЕНИЯ ПРИТОКА ТЕПЛА

Если массообмен и химические реакции в сплошной среде отсутствуют, то уравнение притока тепла для индивидуального объема V имеет вид [8]

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V \rho \varepsilon dV = - \int\limits_F q_\alpha n_\alpha dF + \int\limits_V \sigma_{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta dV, \quad (32)$$

где ε – внутренняя (тепловая) энергия единицы массы; q_α – компонента вектора плотности потока тепла, возникающего вследствие молекулярной теплопроводности. В случае притока тепла, обусловленного другими факторами, например лучистой теплопроводностью, к правой части уравнения (32) должно быть добавлено слагаемое $\int_V \rho q_* dV$, где q_* – дополнительный приток тепла на единицу массы в единицу времени.

Преобразуем последний интеграл в правой части уравнения (32). Для этого воспользуемся очевидным тождеством

$$\nabla_\alpha v_\beta = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha) +$$

$$+\frac{1}{2}(\nabla_\alpha v_\beta - \nabla_\beta v_\alpha) = e_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta},$$

где символами $e_{\alpha\beta}$ и $\omega_{\alpha\beta}$ обозначены, соответственно, тензор скоростей деформаций и антисимметричный тензор, характеризующий вращение частицы сплошной среды как абсолютно твердого тела. Если предположить, что тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ симметричен, то $\sigma_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} = 0$ и поэтому

$$\int_V \sigma_{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta dV = \int_V \sigma_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} dV. \qquad (33)$$

Так что уравнение (32) перепишем с учетом выражения (33) в виде

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\varepsilon dV = -\int_F q_\alpha n_\alpha dF + \int_V \sigma_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} dV. \qquad (34)$$

Для неоднородной сплошной среды, какой является газовзвесь, входящие в (34) интегралы можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\varepsilon dV = \int_V \sum_k \Big(\frac{\partial \alpha_k \rho\varepsilon}{\partial t} + \nabla_\alpha \alpha_k \rho\varepsilon v_\alpha\Big) dV, \qquad (35)$$

$$\int_F q_\alpha n_\alpha dF = \int_V \Big[\sum_k \{\nabla_\alpha \alpha_k q_\alpha\} - \qquad (36)$$

$$-\sum_k (q_{k,\alpha})_s n_{k,\alpha}\delta_s\Big] dV,$$

$$\int_V \sigma_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} dV = \int_V \Big(\sum_k \alpha_k \sigma^{(pg)}_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \sigma^{(pp)}_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}\Big) dV. \qquad (37)$$

В результате подстановки выражений (35) – (37) в уравнение (34) и последующего осреднения всех его слагаемых получим

$$\int_V \sum_k \Big(\frac{\partial \bar\rho_k \langle\varepsilon_k\rangle^*}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar\rho_k \langle\varepsilon_k\rangle^* \langle v_{k,\alpha}\rangle^* +$$

$$+\nabla_\alpha \bar\rho_k \langle \varepsilon'_k v'_{k,\alpha}\rangle^*\Big) dV = \qquad (38)$$

$$= -\int_V \Big(\sum_k \nabla_\alpha \bar\alpha_k \langle q_{k,\alpha}\rangle - \sum_k \overline{(q_{k,\alpha})_s n_{k,\alpha}\delta_s}\Big) dV +$$

$$+\int_V \Big[\sum_k \bar\alpha_k (\langle\sigma_{k,\alpha\beta}\rangle\langle e_{k,\alpha\beta}\rangle + \langle\sigma'_{k,\alpha\beta} e'_{k,\alpha\beta}\rangle) +$$

$$+\bar\beta_p (\langle\sigma^*_{p,\alpha\beta}\rangle\langle e^*_{p,\alpha\beta}\rangle + \langle\sigma'^*_{p,\alpha\beta} e'^*_{p,\alpha\beta}\rangle)\Big] dV;$$

где $\langle e^*_{p,\alpha\beta}\rangle$ – тензор осредненных скоростей деформаций среды, образованной множеством сталкивающихся друг с другом твердых частиц.

Поскольку плотность потока тепла q_α является непрерывной функцией во всей области потока, среднее $\langle q_{p,\alpha}\rangle$ равняется среднему $\langle q_{g,\alpha}\rangle$ [9], поэтому

$$\sum_k \nabla_\alpha \bar\alpha_k \langle q_{k,\alpha}\rangle = \nabla_\alpha \langle q_{g,\alpha}\rangle. \qquad (39)$$

Кроме того, в силу непрерывности функции q_α можно показать, аналогично как и при получении тождества (24), что

$$\sum_k \overline{(q_{k,\alpha})_s n_{k,\alpha}\delta_s} = \qquad (40)$$

$$= -\overline{(q_{g,\alpha})_s n_{p,\alpha}\delta_s} + \overline{(q_{g,\alpha})_s n_{p,\alpha}\delta_s} = 0,$$

где величина $\overline{(q_{g,\alpha})_s n_{p,\alpha}\delta_s}$ представляет собой межфазный теплообмен и равняется среднестатистическому количеству тепла, подведенного к твердой фазе со стороны газовой фазы и отнесенного к единице объема газовзвеси. Эту величину обозначим символом $\bar Q$:

$$\bar Q = \overline{(q_{g,\alpha})_s n_{p,\alpha}\delta_s} \qquad (41)$$

Далее, в силу того, что твердые частицы считаются недеформируемыми жесткими телами, внутри их тензор скоростей деформаций $e_{p,i\alpha} = 0$, поэтому

$$\sum_k \bar\alpha_k (\langle\sigma_{k,\alpha\beta}\rangle\langle e_{k,\alpha\beta}\rangle + \langle\sigma'_{k,\alpha\beta} e'_{k,\alpha\beta}\rangle) = \qquad (42)$$

$$= (1-\bar\alpha_p)(\langle\sigma_{g,\alpha\beta}\rangle\langle e_{g,\alpha\beta}\rangle + \langle\sigma'_{g,\alpha\beta} e'_{g,\alpha\beta}\rangle).$$

С учетом выражений (39)-(42) уравнение (38) преобразуется к виду

$$\int_V \Big[\sum_k \Big(\frac{\partial \bar\rho_k \langle\varepsilon_k\rangle^*}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar\rho_k \langle\varepsilon_k\rangle^* \langle v_{k,\alpha}\rangle^* +$$

$$+\nabla_\alpha \bar\rho_k \langle\varepsilon'_k v'_{k,\alpha}\rangle^*\Big) + \nabla_\alpha \langle q_{g,\alpha}\rangle + \bar Q -$$

$$-\bar Q - (1-\bar\alpha_p)(\langle\sigma_{g,i\alpha}\rangle\langle e_{g,i\alpha}\rangle + \langle\sigma'_{g,i\alpha} e'_{g,i\alpha}\rangle) -$$

$$-\bar\beta_p (\langle\sigma^*_{p,i\alpha}\rangle\langle e^*_{p,i\alpha}\rangle + \langle\sigma'^*_{p,i\alpha} e'^*_{p,i\alpha}\rangle)\Big] dV = 0.$$

Отсюда, освобождаясь от интегрирования и разделяя уравнение по фазам, получаем уравнение притока тепла в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \bar{\rho}_g \langle \varepsilon_g \rangle^*}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar{\rho}_g \langle \varepsilon_g \rangle^* \langle v_{g,\alpha} \rangle^* =$$

$$= -\nabla_\alpha \bar{\rho}_g \langle \varepsilon'_g v'_{g,\alpha} \rangle^* + \qquad (43)$$

$$+(1-\bar{\alpha}_p)(\langle \sigma_{g,i\alpha} \rangle \langle e_{g,i\alpha} \rangle + \langle \sigma'_{g,i\alpha} e'_{g,i\alpha} \rangle) -$$

$$-\nabla_\alpha \langle q_{g,\alpha} \rangle - \bar{Q};$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_p \langle \varepsilon_p \rangle^*}{\partial t} + \nabla_\alpha \bar{\rho}_p \langle \varepsilon_p \rangle^* \langle v_{p,\alpha} \rangle^* =$$

$$= -\nabla_\alpha \bar{\rho}_p \langle \varepsilon'_p v'_{p,\alpha} \rangle^* + \qquad (44)$$

$$+\bar{\beta}_p(\langle \sigma^*_{p,i\alpha} \rangle \langle e^*_{p,i\alpha} \rangle + \langle \sigma'^*_{p,i\alpha} e'^*_{p,i\alpha} \rangle) + \bar{Q} = 0.$$

Поскольку входящая в уравнения (43) и (44) величина $\bar{Q}$ выражает полный обмен теплом между фазами, ее можно представить в виде [9]

$$\bar{Q} = -\bar{\alpha}_p \nabla_\alpha \langle q_{g,\alpha} \rangle + \bar{Q}_*,$$

где $\bar{\alpha}_p \nabla_\alpha \langle q_{g,\alpha} \rangle$ – межфазный теплообмен за счет теплопроводности в случае, если бы твердые частицы были заменены газом; $\bar{Q}_*$ – межфазный конвективный теплообмен, обусловленный разностью температур фаз.

Пользуясь законами и положениями термодинамики, уравнения притока тепла (43) и (44) можно привести к эквивалентным им уравнениям энтропии, а также к уравнениям теплопроводности фаз [9].

Итак, получена система осредненных по вероятности дифференциальных уравнений неразрывности, движения и притока тепла, описывающих гидро- и термодинамику каждой фазы как некоего континуума в статистическом смысле. Эти уравнения, в отличие от известных уравнений для турбулентного потока газовзвеси, носят более общий характер, так как область их применения не ограничена концентрацией и крупностью частиц взвеси. В то же время они относительно простые, поскольку не учитывают моментов корреляций пульсаций концентраций и скоростей фаз и пульсаций плотности несущей среды. Полученные уравнения служат основой для построения математических моделей и решения задач, связанных с турбулентными потоками газовзвесей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известные уравнения для турбулентных потоков газовзвесей, составленные методом последовательного пространственного и временного осреднений характеристик фаз, имеют два принципиальные недостатка: во-первых, область их применения ограничена очень мелкими частицами взвеси, во-вторых, учет в этих уравнениях моментов корреляций пульсаций концентраций и скоростей фаз и пульсаций плотности несущей среды усложняет проблему замыкания системы уравнений и приводит к определенным логическим противоречиям теории.

Для составления более общих и простых уравнений, описывающих газовзвесь как турбулентную термодинамическую среду, целесообразно использовать статистический метод осреднения. Он не связан с выбором внутренних и внешних пространственных масштабов и, следовательно, не накладывает ограничения на размеры частиц взвеси. Кроме того, введение условных вероятностных средних характеристик фаз исключает из уравнений вышеупомянутые корреляционные моменты, что значительно упрощает проблему замыкания системы уравнений при решении прикладных задач.

Тот факт, что при экспериментальных исследованиях двухфазных турбулентных потоков измеряются обычно пространственные и временные средние характеристики фаз, не может служить препятствием для использования вероятностного метода осреднения в теоретических исследованиях, поскольку при современной технике измерений эмпирические пространственно-временные средние с достаточно высокой степенью точности соответствуют вероятностным средним. Это дает право сопоставлять расчетные вероятностные характеристики фаз с соответствующими эмпирическими данными.

На стадии вероятностного осреднения гидро- и термодинамические характеристики фаз претерпевают разрыв непрерывности на межфазной границе, поэтому их частные производные по пространственным координатам и времени существуют в смысле обобщенных функций. Доказано, однако, что производная по времени от интеграла, взятого по индивидуальному объему, является инвариантом при переходе от обобщенных производных к обычным частным производным. Обобщенной функцией в уравнениях движения является лишь дивергенция тензора напряжений, обусловленных межфазным взаимодействием, а в уравнениях притока тепла – дивергенция плотности потока тепла в фазах. Поэтому в уравнениях движения и притока тепла появляются слагаемые, выражающие, соответственно, силу межфазового взаимодействия и межфазный теплообмен.

Составленные в данной статье уравнения для турбулентного потока газовзвеси носят обобщающий характер и служат основой для дальнейших фундаментальных и прикладных исследований потоков рассматриваемого класса.

1. *Шрайбер А. А., Гавин Л. Б., Наумов В. А., Яценко В. П.* Турбулентные течения газовзвеси.– К.: Наук. думка, 1987.– 238 с.
2. *Цой Ен Дон, Чун Мен Кун* Исследование турбулентного течения в трубе газа с взвешенными твердыми частицами // Теор. основы инж. расчетов.– 1983.– N 3.– С. 166–172.
3. *Дискуссия по статье чл.-кор. АН СССР М.А.Великанова* "Перенос взвешенных наносов турбулентным потоком" // Изв.АН СССР . ОТН.– 1946.– N 5.– С. 779–785.
4. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика.– М.: Наука, 1965.– 639 с.
5. *Криль С. И.* Напорные взвесенесущие потоки.– К.: Наук. думка, 1990.– 160 с.
6. *Олейник А. Я., Карасик В. М., Криль С. И., Берман В. П.* Гидравлический трубопроводный транспорт контейнеров (теория и эксперимент).– К.: Наук. думка, 1983.– 170 с.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1967.– 436 с.
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т.1.– М.: Наука, 1983.– 528 с.
9. *Криль С. И.* Об уравнениях теплопроводности для двухфазных гетерогенных сред // Гидромеханика.– 1997.– N 71.– С. 57–62.