УДК 517.547.7; 681.3

М. В. Синьков, Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Розробка та дослідження алгоритмів побудови зображення обернених функцій від гіперкомплексного змінного

Розглянуто питання побудови алгоритмів представлення обернених функцій від гіперкомплексного змінного. Представлено універсальний підхід, який базується на перетворенні зображень вихідних нелінійних функцій від гіперкомплексного змінного.

***Ключові слова:** гіперкомплексна числова система, обернені функції, кватерніони.*

Знання зображень таких нелінійних функцій від гіперкомплексного змінного як експонента, гіперболічні та тригонометричні функції, дозволяє будувати і зображення обернених функцій. Якщо позначити пряму функцію через

$$F(X), \tag{1}$$

де $X = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ — гіперкомплексна змінна, яка належить гіперкомплексній числовій системі $\boldsymbol{\Gamma}$ вимірності n, тоді обернена до (1) функція $F^{-1}(Y)$ буде визначатися за допомогою співвідношення:

$$F^{-1}(F(X)) = X\,. \tag{2}$$

Співвідношення (2) свідчить про те, що область значень прямої функції повинна входити до області існування оберненої функції. Крім того, область значень оберненої функції повинна входити до гіперкомплексної числової системи.

Як відомо з попередніх досліджень [1, 2], зображення таких нелінійностей як експонента, гіперболічні та тригонометричні функції, являють собою гіперкомплексні функції, тобто мають вигляд:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,..,x_n)\cdot e_j\,, \tag{3}$$

звідки

$$F^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,..,x_n)\cdot e_j\right)=\sum_{j=1}^{n} x_j\cdot e_j\,. \tag{4}$$

Для того, щоб (4) було зображенням оберненої функції, її аргумент повинен бути просто гіперкомплексною змінною:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,..,x_n)\cdot e_j=\sum_{j=1}^{n} y_j\cdot e_j\,. \tag{5}$$

Якщо рівняння (5) перетворити в систему рівнянь

$$f_j(x_1,..,x_n)=y_j,\ j=1,..,n\,, \tag{6}$$

то її можна розв'язати відносно змінних $x_1,..,x_n$:

$$x_j=g_j(y_1,...,y_n);\ j=1,...,n\,. \tag{7}$$

Якщо ці розв'язки підставити в (4), то одержимо зображення оберненої функції:

$$F^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\cdot e_j\right)=\sum_{j=1}^{n} g_j(y_1,...,y_n)\cdot e_j\,. \tag{8}$$

Функція вигляду (8) може бути багатозначною. В цьому випадку треба якимось способом виділити область головних значень, яка повинна входити до гіперкомплексної числової системи Γ. Усе вищевикладене можна представити у вигляді блок-схеми алгоритму побудови зображення обернених функцій від гіперкомплексного змінного.

Розглянемо декілька випадків побудови зображень різних нелінійностей в деяких гіперкомплексних числових системах.

Функцією, оберненою до експоненти, є логарифмічна функція. В системі квазікомплексних чисел, закон композиції якої

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$pe_1 + qe_2$

(9)

де $p + \frac{q^2}{4} < 0$, експонента має такий вигляд:

$$\mathrm{Exp}(m_1 e_1 + m_2 e_2) = e^{m_1 + \frac{q}{2} m_2}((\cos km_2 - \frac{q}{2k}\sin km_2)e_1 + \frac{1}{k}\sin km_2 \cdot e_2). \tag{10}$$

Будуємо систему рівнянь (6):

$$\begin{cases} e^{m_1 + \frac{q}{2} m_2}(\cos km_2 - \frac{q}{2k}\sin km_2) = x_1, \\ \frac{1}{k} e^{m_1 + \frac{q}{2} m_2} \sin km_2 \cdot e_2 = x_2, \end{cases} \tag{11}$$

яка має такі розв’язки:

$$\begin{aligned} m_1 &= \ln k\sqrt{(x_1 + \frac{q}{2}x_2)^2 + x_2^2} - \frac{q}{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1 + \frac{q}{2}x_2} + \frac{q\pi n}{2k}, \\ m_2 &= \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1 + \frac{q}{2}x_2} + \frac{\pi n}{k}. \end{aligned} \tag{12}$$

Якщо головні значення вибрати при $n = 0$, то зображення логарифмічної функції системи (12) буде таким:

$$\begin{gathered} \mathrm{Ln}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \\ = (\ln k\sqrt{(x_1 + \frac{q}{2}x_2)^2 + x_2^2} - \frac{q}{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1 + \frac{q}{2}x_2}) + \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1 + \frac{q}{2}x_2} e_2. \end{gathered} \tag{13}$$

Якщо в (13) підставити значення структурних констант, які відповідають системі комплексних чисел $\boldsymbol{C}$

$$q = 0,\ p = -1,\ k = 1,$$

то одержимо зображення логарифмічної функції у системі $\boldsymbol{C}$:

$$\mathrm{Ln}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, e_1 + \mathrm{arctg}\frac{x_2}{x_1} e_2 . \qquad (14)$$

У системі квазідуальних чисел, закон композиції якої має вигляд (9), але $p + \frac{q^2}{4} = 0$, експоненту запишемо наступним чином:

$$\mathrm{Exp}(m_1 e_1 + m_2 e_2) = e^{m_1 + \frac{q}{2} m_2}((1 - \frac{q}{2} m_2) e_1 + m_2 e_2), \qquad (15)$$

а систему (6):

$$\begin{cases} e^{m_1 + \frac{q}{2} m_2}(1 - \frac{q}{2} m_2) = x_1, \\ e^{m_1 + \frac{q}{2} m_2} m_2 = x_2, \end{cases} \qquad (16)$$

розв'язки якої відносно m_1 та m_2:

$$m_1 = \ln\left| x_1 + \frac{q}{2} x_2 \right| - \frac{q x_2}{2x_1 + q x_2}, \quad m_2 = \frac{2x_2}{2x_1 + q x_2}. \qquad (17)$$

Як бачимо, ці функції однозначні, а тому зображення логарифмічної функції в цій системі таке:

$$\mathrm{Ln}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = (\ln\left| x_1 + \frac{q}{2} x_2 \right| - \frac{q x_2}{2x_1 + q x_2}) e_1 + \frac{2x_2}{2x_1 + q x_2} e_2 . \qquad (18)$$

Якщо в (18) підставити значення структурних констант, які відповідають системі дуальних чисел

$$q = 0,\ p = 0,\ k = 0,$$

то одержимо зображення логарифмічної функції у системі дуальних чисел:

$$\mathrm{Ln}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \ln|x_1| e_1 + \frac{x_2}{x_1} e_2 . \qquad (19)$$

У системі квазіподвійних чисел, закон композиції якої (9), але $p+\frac{q^2}{4}>0$, експонента має такий вигляд:

$$\mathrm{Exp}(m_1e_1+m_2e_2)=e^{(m_1+\frac{q}{2}m_2)t}((ch(m_2k)-\frac{q}{2k}sh(m_2k))\cdot e_1+\frac{1}{k}\cdot sh(m_2k)\cdot e_2). \qquad (20)$$

Будуємо систему рівнянь (6):

$$\begin{cases} e^{(m_1+\frac{q}{2}m_2)t}(ch(m_2k)-\frac{q}{2k}sh(m_2k)=x_1, \\ \frac{1}{k}e^{(m_1+\frac{q}{2}m_2)t}sh(m_2k)=x_2. \end{cases} \qquad (21)$$

Її розв'язки мають вигляд:

$$m_1=\frac{1}{2k}(-q\ln\alpha-2k\ln\alpha+2k\ln(x_2k+\frac{1}{2}qx_2+x_1)),$$
$$m_2=\frac{1}{k}\ln\alpha, \qquad (22)$$

де $\alpha=\sqrt{\left|\frac{2x_2k+qx_2+2x_1}{2x_2k-qx_2-2x_1}\right|}$.

Ці функції однозначні, а тому зображення логарифмічної функції у цій системі таке:

$$\mathrm{Ln}(x_1e_1+x_2e_2)=\frac{1}{2k}(-q\ln\alpha-2k\ln\alpha+2k\ln(x_2k+\frac{1}{2}qx_2+x_1))\cdot e_1+\frac{1}{k}\ln\alpha\cdot e_2. \quad (23)$$

Якщо в (22) підставити значення структурних констант, які відповідають системі подвійних чисел:

$$q=0,\ p=1,\ k=1,$$

то одержимо зображення логарифмічної функції у системі подвійних чисел:

$$\mathrm{Ln}(x_1e_1+x_2e_2)=\frac{1}{2}\ln\left|x_1^2-x_2^2\right|\cdot e_1+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\right|\cdot e_2. \qquad (24)$$

У системі гіперкомплексних чисел, закон композиції якої:

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	e_1
e_3	e_3	e_1	e_2

експонента має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3) &= \frac{1}{3}(e^{m_1+m_2+m_3}(e_1+e_2+e_3)+ \\ &+e^{m_1-\frac{m_2+m_3}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}(m_2-m_3))(2e_1-e_2-e_3)+ \\ &+\sqrt{3}e^{m_1-\frac{m_2+m_3}{2}})\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}(m_2-m_3))(e_2-e_3). \end{aligned} \tag{25}$$

Будуємо систему рівнянь (6):

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(e^{m_1+m_2+m_3}+2e^{m_1-\frac{m_2+m_3}{2}}\cos(\frac{m_2-m_3}{2}\sqrt{3}))=x_1, \\ \frac{1}{3}(e^{m_1+m_2+m_3}+e^{m_1-\frac{m_2+m_3}{2}}(\sqrt{3}\cos(\frac{m_2-m_3}{2}\sqrt{3})-\sin(\frac{m_2-m_3}{2}\sqrt{3}))=x_2, \\ \frac{1}{3}(e^{m_1+m_2+m_3}-e^{m_1-\frac{m_2+m_3}{2}}(\sqrt{3}\cos(\frac{m_2-m_3}{2}\sqrt{3})+\sin(\frac{m_2-m_3}{2}\sqrt{3}))=x_3. \end{cases} \tag{26}$$

Її розв’язок виглядатиме наступним чином:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{3}(2a+c), \\ m_2 &= \frac{1}{3}(c-a)+b\sqrt{3}, \\ m_3 &= \frac{1}{3}(c-a)-b\sqrt{3}, \end{aligned} \tag{27}$$

де введені такі позначення:

$$\begin{aligned} a &= \ln\sqrt{3(3x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_1x_2-3x_1x_3-2x_2x_3)}, \\ b &= \pm\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}(2x_1+x_2-x_3)}{x_2-x_3}, \\ c &= \ln|3(x_1-x_2+x_3)|. \end{aligned} \tag{28}$$

Як видно з виразів (28), для того, щоб задовольнити умові існування логарифму, потрібно виконання умов:

$$x_1 - x_2 + x_3 \neq 0, \tag{29}$$

$$(x_1 \neq 0) \cap (x_2 \neq 0) \cap (x_3 \neq 0). \tag{30}$$

Крім того слід зауважити, що підкоренева квадратична форма невід'ємна, бо дискримінанти по всіх змінних від'ємні:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = -3(x_2 - x_3)^2 < 0, \\ &\Delta_2 = \Delta_3 = -x_1^2 < 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Для вибору головного значення оберненої функції приймаємо в другому виразі (28) тільки знак «+». З урахуванням цих обмежень, зображення логарифмічної функції у цій системі має такий вигляд:

$$\begin{gathered} \mathrm{Ln}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = \\ = \frac{1}{3}(2a+c)e_1 + (\frac{1}{3}(c-a) + b\sqrt{3})e_2 + (\frac{1}{3}(c-a) - b\sqrt{3})e_3, \end{gathered} \tag{32}$$

де величини a, b, c визначаються за (28).

Розглянемо побудову зображення функції, оберненої до тригонометричного синуса, в цій же гіперкомплексній числовій системі. Зображення синуса має такий вигляд:

$$\begin{gathered} \mathrm{Sin}(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3) = \frac{1}{3}((\sin\alpha + 2\sin\gamma \cdot ch\beta)e_1 + \\ + (\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\gamma \cdot sh\beta - \sin\gamma \cdot ch\beta)e_2 + (\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\gamma \cdot sh\beta - \sin\gamma \cdot ch\beta)e_3, \end{gathered} \tag{33}$$

де α, β та γ визначаються так:

$$\alpha = m_1 + m_2 + m_3, \tag{34}$$

$$\beta = \frac{m_2 - m_3}{2}\sqrt{3}, \tag{35}$$

$$\gamma = m_1 - \frac{m_2 + m_3}{2}. \tag{36}$$

Система (6) в даному випадку приймає вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(\sin\alpha + 2\sin\gamma \cdot ch\beta) = x_1, \\ \frac{1}{3}(\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\gamma \cdot sh\beta - \sin\gamma \cdot ch\beta) = x_2, \\ \frac{1}{3}(\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\gamma \cdot sh\beta - \sin\gamma \cdot ch\beta) = x_3. \end{cases} \quad (37)$$

звідки випливає:

$$\begin{aligned} &\alpha = (-1)^n \arcsin(x_1 - x_2 + x_3) + n\pi, \\ &\beta = \pm \mathrm{arctg}\sqrt{3}\,\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{x_2 - x_3}, \\ &\gamma = \pm arch\frac{\sqrt{3(x_2 - x_3)^2 + 9(2x_1 + x_2 + x_3)^2}}{2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Якщо підставити (37) в (33)–(35), то одержимо:

$$\begin{aligned} &m_1 = \frac{1}{3}(\alpha + 2\gamma), \\ &m_2 = \frac{1}{3}(\alpha - \gamma + \sqrt{3}\beta), \\ &m_3 = \frac{1}{3}(\alpha - \gamma - \sqrt{3}\beta). \end{aligned} \quad (39)$$

Для вибору головного значення оберненої функції приймаємо в першому виразі (38) $n = 0$, в другому та третьому виразах тільки знак «+». З урахуванням цих обмежень, зображення оберненої до синусу функції — арксинуса в цій системі має такий вигляд:

$$\mathrm{Arcsin}(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3) = \frac{1}{3}((\alpha + 2\gamma)e_1 + (\alpha - \gamma + \sqrt{3}\beta)e_2 + (\alpha - \gamma - \sqrt{3}\beta)e_3), \quad (40)$$

де величини α, β, γ визначаються за (39).

Розглянемо побудову зображень обернених тригонометричних функцій в системі четвертої вимірності з законом композиції:

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	0	0	0
e_3	e_3	0	0	0
e_4	e_4	0	0	0

Зображення синусу в цій системі має вигляд:

$$\begin{gathered}\mathrm{Sin}(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\\=\sin m_1\cdot e_1+m_2\cos m_1\cdot e_2+m_3\cos m_1\cdot e_3+m_4\cos m_1\cdot e_4.\end{gathered}\tag{41}$$

Будуємо систему (6):

$$\begin{cases}\sin m_1=x_1,\\ m_2\cos m_1=x_2,\\ m_3\cos m_1=x_3,\\ m_4\cos m_1=x_4,\end{cases}\tag{42}$$

розв'язки якої:

$$\begin{aligned}m_1&=(-1)^k\arcsin x_1+k\pi,\\ m_2&=\frac{x_i}{ar\cos\sqrt{1-x_1^2}+2n\pi}.\end{aligned}\tag{43}$$

Для вибору головного значення приймаємо значення $k=0$. З урахуванням цього, зображення арксинуса буде таким:

$$\begin{gathered}\mathrm{Arc}\sin(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\\=\arcsin m_1e_1+\frac{1}{\arccos\sqrt{1-m_1^2}}(m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4).\end{gathered}\tag{44}$$

Розглянемо також обернені функції в такій важливій для практики системи гіперкомплексних чисел як кватерніони. Логарифмічну функцію автори розглядали в роботі [3]. Наведемо її:

$$\mathrm{Ln}(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\ln|M|\cdot e_1+\frac{1}{\overline{m}}\arccos\frac{m_1}{|M|}(m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4),\tag{45}$$

де $|M|=\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2}$ — норма кватерніона; $\overline{m}=\sqrt{m_2^2+m_3^2+m_4^2}$.

Зображення синуса кватерніона наступне:

$$\mathrm{Sin}(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\sin m_1 ch\overline{m}\cos(m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4).\tag{46}$$

Система (6) буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \sin m_1 \cdot ch\overline{m} = x_1, \\ \dfrac{m_i}{\overline{m}}\cos m_1 \cdot sh\overline{m} = x_i, \quad i = 2,3,4. \end{cases} \tag{47}$$

Безпосереднє розв'язання системи (47) пов'язано з великими математичними труднощами. Тому для побудови зображення використаємо тригонометричну форму кватерніона [4, 5]:

$$M = |M|(\cos\nu + I\sin\nu), \tag{48}$$

де
$$\nu = \arccos\frac{m_1}{|M|}, \tag{49}$$

$$I = \frac{1}{\overline{m}}(m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4). \tag{50}$$

Оскільки $I^2 = -1$, то формально кватерніони у тригонометричній формі (48) можна розглядати як комплексне число. Зображення арксинуса комплексного члена відоме [6]:

$$\arcsin(x_1 + x_2I) = (\frac{\alpha+\beta}{2}) + \ln(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - \frac{1}{4}}) \cdot I, \tag{51}$$

де
$$\alpha = \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2}, \tag{52}$$

$$\beta = \sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2}. \tag{53}$$

Якщо в (52) та в (53) замість x_1 підставити $|M|\cos\nu$, замість x_2 — $|M|\sin\nu$, а I замінити на його вираз (50), то одержимо зображення арксинуса кватерніона:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Arc}\sin(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4) = \\ &= \arcsin(\frac{\alpha+\beta}{2})e_1 + \ln(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - \frac{1}{4}}) \cdot (m_2e_2 + m_3e_3 + m_4e_4), \end{aligned} \tag{54}$$

де α та β визначаються за (52) та (53).

Наведені приклади свідчать про можливість побудови зображень обернених функцій, які доцільно використовувати при побудові ефективних моделей в різних галузях науки та техніки.

1. *Калиновский Я.А., Роенко Н.В., Синьков М.В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.

2. *Catoni F.* Hypercomplex Numbers, Functions of Hypercomplex Variable and Physical Fields (RT/ERG/94/18). On line: http//www.studi131.casaccia.enea.it/enea/it/rt/exg9418.html (1994).

3. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Постникова Т.Г., Синькова Т.В.* Логарифмическая функция от кватерниона // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2002. — Т. 4, № 1. — С. 35–37.

4. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

5. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука,1973. — 319 с.

6. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. — М.: Физматгиз, 1985. — 336 с.

Надійшла до редакції 05.03.2005