

УДК 551.465

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВРАЩЕНИЯ

В. В. НИКИШОВ, Р. В. ХРИСТЮК

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 15.07.2000

На основе линеаризованных уравнений движения в приближении Буссинеска проведен анализ движений вязкой стратифицированной по температуре жидкости при наличии вращения. В пространстве волновых чисел построены диаграммы, позволяющие выделять зоны, которые определяют тот или иной тип движения (гироскопические, внутренние, гравитационно-гироскопические волны и аперидические движения) в зависимости от пространственных размеров возмущений и параметров среды. Показано, что граница области аперидических движений имеет характерную "клювообразную" форму, получено точное выражение, определяющее положение угловой точки. Для указанных зон построены соответствующие асимптотические зависимости, описывающие волновые и аперидические режимы движений. Построена диаграмма движений в приближении "f-плоскости", проведено сравнение с аналогичной диаграммой, построенной без использования этого приближения.

На основі лінеаризованих рівнянь руху в наближенні Бусінеска проведено аналіз рухів в'язкої температурно стратифікованої рідини при наявності обертання. В просторі хвильових чисел побудовано діаграми, які дозволяють виділяти зони, що визначають той чи інший тип руху (гіроскопічні, внутрішні, гравітаційно-гіроскопічні хвилі та аперіодичні рухи) в залежності від просторових розмірів збурень та параметрів середовища. Показано, що межа області аперіодичних рухів має характерну "клювообразну" форму, знайдено точний вираз, який визначає положення куткової точки. Для вказаних зон побудовано асимптотичні залежності, що описують хвильовий і аперіодичний режими рухів. Побудовано діаграму рухів у наближенні "f-площини", проведено порівняння з аналогічною діаграмою, яку побудовано без використання цього наближення.

Analysis of motion of the viscous temperature-stratified fluid with the presence of the rotation has been carried out on the basis of the linearized equation of motion in Boussinesq approximation. The diagrams in the space of wave numbers has been constructed to determine the motion type (gyroscopic, internal, gravity-gyroscopic waves and aperiodic motions) in dependence of the space scales of the perturbations and the medium parameters. It is shown that the boundary of the aperiodic zone has characteristic "rostral" shape, exact relationship determining the position of the angular point is found. The corresponding asymptotic solutions describing the wave and aperiodic regimes of motion have been found for these zones. The diagram of motion in the "f-plane" approximation has been constructed too. The comparison of this diagram with the diagram constructed without this approximation is fulfilled.

ВВЕДЕНИЕ

Влияние сил плавучести приводит к существенным изменениям в характере движения стратифицированной жидкости. С одной стороны, эти силы препятствуют диапикническим обменным процессам и являются основной причиной формирования тонкой вертикальной структуры вод океана, локализации мелкомасштабной турбулентности в виде перемешанных "пятен" [1]. С другой стороны, они являются причиной возникновения специфического вида волновых движений – внутренних волн, характеризующихся широким спектром временных и пространственных масштабов. Эти волны играют важную, а во многих случаях и определяющую роль в процессах горизонтального и вертикального обмена массой и энергией в океане.

Другой вид волновых движений в океане обусловлен эффектом вращения. Во вращающейся нестратифицированной жидкости волновые движения определяются действием силы Кориолиса (гироскопические волны). Колебания вращающейся

стратифицированной жидкости совмещают свойства гироскопических и внутренних волн. Преобладающая роль эффектов вращения или стратификации определяется соотношением между частотой плавучести $N = \sqrt{-g/\rho_0(d\bar{\rho}/dz)}$ и параметром Кориолиса $f = 2\Omega$ [2]. Здесь g – ускорение силы тяжести, ρ_0 – характерное значение плотности жидкости, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(z)$ – невозмущенный профиль плотности, z – вертикальная координата, Ω – угловая скорость вращения жидкости.

Отметим для полноты картины, что в океане существуют также другие типы волновых движений: акустические, поверхностные и капиллярные волны. Однако генерация и характер их поведения определяются другими эффектами, и эти волновые движения в работе не рассматриваются.

Линейный анализ различных типов движений стратифицированной жидкости в отсутствие вращения выполнен в работе [3]. Авторы показали, что учет эффектов вязкости и температуропроводности приводит к тому, что наряду с внутренними волнами (волновая мода) в жидкости могут

возникать медленно затухающие слоистые структуры (интрузионная мода [4]). Движение жидкости в них происходит за счет запасенной потенциальной энергии, например, при турбулентном перемешивании. Третьим типом движения являются горизонтальные вихревые структуры (вихревая мода), на которые не влияют силы плавучести. Эти движения затухают с чисто вязкой скоростью $\exp(-\nu k^2 t)$, где k – волновое число, ν – кинематический коэффициент вязкости. Диагностическая диаграмма движений в пространстве волновых чисел, которая характеризует затухание каждой из мод, построена в работе [4], где выделены зоны, соответствующие аperiодическому и волновому режимам движений. Совместное влияние эффектов температуропроводности и диффузии соли на развитие слоистых структур в устойчиво стратифицированной по температуре и солености жидкости изучено в работе [5]. Показано, что скорость затухания температурных возмущений увеличивается в присутствии солевой стратификации, а скорость затухания солевых неоднородностей уменьшается. Это связано с тем, что на финальной стадии после затухания температурных возмущений профиль температуры рестратифицируется, но в жидкости остаются солевые неоднородности, так как имеет место существенное различие молекулярных коэффициентов температуропроводности χ_T и диффузии соли χ_s ($\chi_T \gg \chi_s$). Коллапс солевых неоднородностей вызывает нарушения в рестратифицированном профиле температуры и соответствующие силы тормозят процесс коллапса (эффект антиколлапса).

Следует отметить, что помимо указанных выше движений, в устойчиво стратифицированной жидкости существуют плоские течения с вертикальной структурой, которые описываются нелинейными уравнениями движения. Вертикальная завихренность переносится в них в горизонтальном направлении и генерируется вертикальной дивергенцией движений жидкости [6–8]. Такие квазигоризонтальные вихревые движения были зарегистрированы в дальнем следе за телом, движущимся в стратифицированной среде [9].

Диагностическая диаграмма волновых и аperiодических движений стратифицированной жидкости при наличии вращения в приближении "f-плоскости" построена в работе [10]. Основное внимание было уделено внутриволновым движениям жидкости. Показано, что зона аperiодических движений имеет "клювообразную" форму, приближенно определены характерные точки (по-

ложение угловой точки, экстремум) этой зоны.

Таким образом, в устойчиво стратифицированной жидкости сосуществуют различные типы движений: волновые, интрузионные, квазигоризонтальные вихревые. Наличие вращения существенно расширяет типы волновых движений. В данной работе выполнен линейный анализ уравнений движения вязкой стратифицированной жидкости при наличии вращения. В пространстве волновых чисел построена диаграмма движений, выделены зоны, соответствующие различным видам движений (гироскопические, внутренние, гравитационно-гироскопические, волны, аperiодические движения) без использования таких приближений, как приближения "f-плоскости" и "β-плоскости" [11]). Для указанных зон найдены асимптотические решения, описывающие эти движения.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Линеаризованные уравнения движения в приближении Буссинеска, переноса температуры и состояния среды могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + 2[\vec{\Omega} \vec{V}] &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{V} + \vec{g} \frac{\rho}{\rho_0}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + W \frac{d\bar{T}}{dz} &= 0, \\ \nabla \vec{V} &= 0, \\ \rho &= -\rho_0 \alpha_T T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\vec{V} = (U, V, W)$ – вектор скорости жидкости; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ – вектор ускорения силы тяжести; p, T, ρ – возмущения давления, температуры и плотности, соответственно; $\bar{T}(z)$ – средний профиль температуры; $\vec{\Omega}$ – вектор скорости вращения. После ряда преобразований эти уравнения могут быть сведены к одному уравнению относительно вектора скорости \vec{V} :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \frac{\partial}{\partial t} \Delta \vec{V} = \\ &= N^2 \left(\nabla \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\vec{g}}{g} \Delta W \right) - 2 \text{rot}(\vec{\Omega} \nabla) \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$\vec{V} = \vec{V}(t) \exp(i\vec{k}\vec{r}),$$

где $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ – волновой вектор. Тогда для

амплитуды возмущений вертикальной компоненты скорости получаем

$$(L_1^2 L_2 k^2 + N^2 m^2 L_1)W + 4L_2(\vec{\Omega}\vec{k})^2 W = 0, \quad (3)$$

где $m = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, $L_1 = d/dt + \nu k^2$, $L_2 = d/dt$.

Приведем уравнение (3) к безразмерному виду. Введем безразмерное время $\tau = \nu k^2 t$ и параметры $\epsilon = f_k / \nu k^2$ и $\beta = \omega^2 / f_k^2$, где $f_k = 2\Omega \cos \alpha$, $\omega = N \sin \vartheta$. Параметр ϵ , характеризующий отношение силы Кориолиса к вязким силам, может быть представлен в виде $\epsilon = \delta_N^2 / E$, где $E = \nu / 2\Omega \cos \alpha \cdot L^2$ – число Экмана (мало в большинстве тех случаев, когда преимущественно проявляются эффекты вращения); $\delta_N = H/L$ – отношение вертикального и горизонтального масштабов возмущений. Параметр β характеризует отношение эффектов плавучести и вращения.

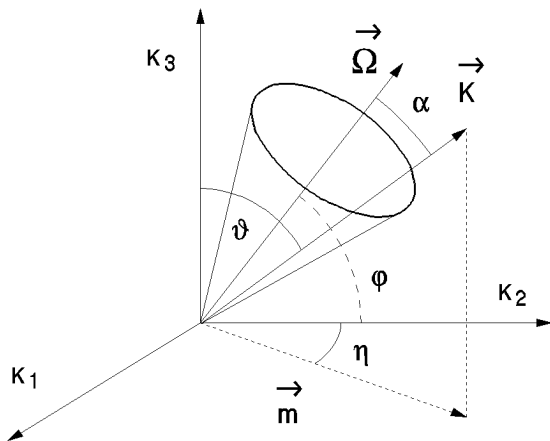


Рис. 1. Векторы $\vec{\Omega}$ и \vec{k} в пространстве (k_1, k_2, k_3)

На рис. 1 изображено взаимное расположение векторов $\vec{\Omega}$ и \vec{k} . Здесь α – угол между этими векторами; ϑ – угол между вектором \vec{k} и вертикальной осью z ; ϕ – широта; η – азимут вектора \vec{k} . Рассматривается случай $(\vec{\Omega}\vec{k}) \neq 0$, в противном случае уравнение (3) переходит в изученное ранее в [5]. Система координат (x, y, z) выбрана так, что вектор скорости вращения $\vec{\Omega}$ находится в плоскости (y, z) , ось z направлена вертикально вверх, ось y – перпендикулярно ей вдоль меридиана, ось x направлена перпендикулярно к вышеуказанным осям вдоль параллели.

Вводя безразмерное значение скорости $\tilde{W} = W/W_0$, где W_0 – характерное значение вертикальной скорости (знак “~” в дальнейшем опускаем),

приводим уравнение (3) к виду

$$\frac{d^3 \tilde{W}}{d\tau^3} + 2\frac{d^2 \tilde{W}}{d\tau^2} + \frac{d\tilde{W}}{d\tau} + \beta\epsilon^2 \left(\frac{d\tilde{W}}{d\tau} + \tilde{W} \right) + \epsilon^2 \frac{d\tilde{W}}{d\tau} = 0. \quad (4)$$

Здесь произведение $\beta\epsilon^2$ может быть представлено в виде

$$\beta\epsilon^2 = N^2 m^2 / \nu^2 k^6 = Re^2 \delta_N^2,$$

где $Re = NH^2/\nu$ – число Рейнольдса. При малых значениях ϵ и β решение ищем в виде $\tilde{W} \sim \exp(\lambda\tau)$, в итоге получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + \beta\epsilon^2(\lambda + 1) + \epsilon^2\lambda = 0. \quad (5)$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим решения, описывающие движение жидкости при различных соотношениях между параметрами ϵ и β .

2.1. Случай $\epsilon \ll 1$ и $\beta = O(1)$.

Рассмотрим малое влияние эффектов вращения по сравнению с вязкими эффектами, т.е. $\epsilon \ll 1$. Кроме того, полагаем, что

$$N^2 \sin^2 \vartheta / \nu^2 k^4 = \beta\epsilon^2 \ll 1,$$

т.е. $\beta \ll 1/\epsilon^2$. Пусть для определенности влияние сил плавучести такое же, как и силы Кориолиса, т.е. $\beta = O(1)$. В итоге получаем (в явном виде)

$$\begin{aligned} W = & a \exp \left(\left(-\frac{\omega^2}{\nu k^2} - \frac{\omega^4}{\nu^3 k^6} + \frac{\omega^2 f_k^2}{\nu^3 k^6} \right) t \right) + \\ & + \exp \left(\left(-\nu k^2 + \frac{\omega^2}{2\nu k^2} + \frac{\omega^4}{2\nu^3 k^6} - \frac{\omega^2 f_k^2}{2\nu^3 k^6} \right) t \right) \times \\ & \times \left[b \cos \left(f_k \left(1 + \frac{\omega^2}{2\nu^2 k^4} - \frac{\omega^4}{8f_k^2 \nu^2 k^4} \right) t \right) + \right. \\ & \left. + c \sin \left(f_k \left(1 + \frac{\omega^2}{2\nu^2 k^4} - \frac{\omega^4}{8f_k^2 \nu^2 k^4} \right) t \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Анализ показал, что подобное выражение может быть получено и для $\beta \ll 1$ путем переразложения.

Из уравнения (6) следует, что движение жидкости определяется тремя модами: аперiodической и двумя волновыми (затухающие гироскопические волны при слабом влиянии стратификации среды). Скорость затухания последних двух мод

выше, чем первой. Более того, скорость затухания аperiodической моды становится меньше, когда отношение $m/k = \sin \vartheta$ уменьшается, т.е. когда возмущение вытянуто по горизонтали.

2.2. Случай $\epsilon \ll 1$ и $\beta = O(1/\epsilon)$.

Рассматривая опять малое влияние сил Кориолиса по сравнению с вязкими эффектами, т.е. $\epsilon \ll 1$, остановимся на случае, когда $\beta = O(1/\epsilon)$, т.е. $\beta \gg 1$. Пусть для определенности $\beta = \gamma/\epsilon$, т.е. $\gamma = \beta\epsilon$, $\gamma = O(1)$. При этом параметр γ имеет вид $\gamma = N^2 \sin^2 \vartheta / 2\Omega \cos \alpha \cdot \nu k^2 = \omega^2 / \nu k^2 f_k$. Находя корни дисперсионного уравнения, окончательно получаем

$$\begin{aligned} W = & a \exp \left(\left(-\frac{\omega^2}{\nu k^2} - \frac{\omega^4}{\nu^2 k^4} \right) t \right) + \\ & + b \exp \left(\left(-\nu k^2 + \frac{\omega_a}{2} + \frac{\omega^2}{2\nu k^2} \right) t \right) + \\ & + c \exp \left(\left(-\nu k^2 - \frac{\omega_a}{2} + \frac{\omega^2}{2\nu k^2} \right) t \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega_a = \sqrt{\omega^4 / \nu^2 k^4 - 4f_k^2}$. Видно, что при $\gamma > 2$ эволюция возмущений определяется тремя аperiodическими модами, причем первая мода затухает медленней. Значение $\gamma = 2$, т.е.

$$N^2 \sin^2 \vartheta = 4\Omega |\cos \alpha| \cdot \nu k^2,$$

характеризует переход от аperiodического режима к волновому. Ниже этот вопрос будет исследован подробнее. Прежде, чем переходить к последующим разложениям, отметим некоторые особенности режимов, описанных в п.п. 3.1 и 3.2. На этапе эволюции, который характеризуется временами $\tau = O(1)$, т.е. $t \sim 1/\nu k^2$, имеет место баланс инерционных и вязких эффектов. Сила плавучести и сила Кориолиса оказывают слабое влияние на поведение возмущений на этом этапе эволюции. Аналогичная ситуация имеет место при отсутствии вращения [5, 12]. На следующем этапе, когда $\tau = O(1/\epsilon^2)$, т.е. $t \sim \nu k^2 / 4\Omega^2 \cos^2 \alpha$ или, что равносильно при $\beta = O(1)$ масштабу $\tau \sim O(1/\beta\epsilon^2)$, т.е. $t \sim \nu k^4 / N^2 m^2$, вклад волновых мод будет мал и эволюция возмущений будет определяться, в основном, аperiodической модой. В температуропроводной жидкости она будет иметь вид тонких структур, толщина которых определяется балансом эффектов температуропроводности и плавучести [3, 12].

2.3. Случай $\epsilon \ll 1$ и $\beta = O(1/\epsilon^2)$.

Рассмотрим $\epsilon \ll 1$ и $\beta = O(1/\epsilon^2)$. Пусть $\beta = \delta/\epsilon^2$, т.е. $\delta = \beta\epsilon^2 = O(1)$. После нахождения корней получаем выражение для амплитуды W :

$$\begin{aligned} W = & a \exp(-\nu k^2 t) + \\ & + b \exp \left(\left(-\frac{\nu k^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 k^4 - 4\omega^2} \right) t \right) + \\ & + c \exp \left(\left(-\frac{\nu k^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 k^4 - 4\omega^2} \right) t \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Видно, что возмущение характеризуется тремя модами, порядки скоростей затухания которых одинаковы. При $\tau = O(1)$ имеет место баланс эффектов инерции, вязкости и плавучести:

$$\frac{d^3 W}{d\tau^3} + 2 \frac{d^2 W}{d\tau^2} + \frac{dW}{d\tau} + \delta \frac{dW}{d\tau} + \delta W + O(\epsilon^2) = 0. \quad (9)$$

В дальнейшем ($\tau > 1$) все три моды затухают, и долгоживущие структуры при этом не наблюдаются. Отметим, что значение $\delta = 1/4$, $N^2 \sin^2 \vartheta / \nu^2 k^4 = 1/4$ определяет границу аperiodических движений и внутренних гравитационных волн. Данное разложение получено при $\delta = O(1)$. Результаты могут быть обобщены на случай $\delta \ll 1$ путем переразложения найденных выражений по малому параметру δ .

2.4. Случай $\epsilon = O(1)$ и $\beta \gg 1$

Рассмотрим умеренное влияние вращения, т.е. $\epsilon = O(1)$. Пусть $\beta \gg 1$. В данном случае найдем непосредственно решение уравнения (4) методом ВКБ, т.е. решение ищем в виде $W = \exp(\beta G(\beta, \tau))$. В итоге (в размерном виде) получаем

$$\begin{aligned} W = & a \exp \left(-\nu k^2 t + \frac{f_k^2}{\omega^2} \nu k^2 t \right) + \\ & + \exp \left(-\frac{\nu k^2}{2} t - \frac{f_k^2}{2\omega^2} \nu k^2 t \right) \times \\ & \times \left[b \cos \left(\left(\omega + \frac{f_k^2}{2\omega} - \frac{\nu^2 k^4}{8\omega} \right) t \right) + \right. \\ & \left. + c \sin \left(\left(\omega + \frac{f_k^2}{2\omega} - \frac{\nu^2 k^4}{8\omega} \right) t \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Видно, что решение описывается тремя модами: аperiodической и двумя волновыми (внутренние гравитационные волны). Отметим, что при $\tau \geq 1$ силы плавучести остаются несбалансированными, и долгоживущие слоистые структуры не наблюдаются.

2.5. Случай $\epsilon \gg 1$

Рассмотрим существенное влияние вращения, т. е. $\epsilon \gg 1$. Пусть $\beta \sim O(1)$, ищем решение уравнения (4) ВКБ-методом: $W = \exp(\epsilon, G(\epsilon, \tau))$. В результате разложений по большому параметру ϵ находим (в размерном виде)

$$W = a \exp\left(-\frac{\omega^2}{f_k^2 + \omega^2} \nu k^2 t\right) + \exp\left(\left(\frac{\omega^2}{2(f_k^2 + \omega^2)} - 1\right) \nu k^2 t\right) \times \left[b \cos\left(t\sqrt{\omega^2 + f_k^2}\right) + c \sin\left(t\sqrt{\omega^2 + f_k^2}\right) \right]. \quad (11)$$

Таким образом, имеются три моды: одна аперидическая и две волновых. Последние определяют гравитационно-гироскопические волны. Полученное выражение может быть переразложено для достаточно малых и достаточно больших β . Из выражения (11) следует, что скорость затухания волновых мод выше скорости затухания аперидической моды. Отметим, что при $\beta \ll 1$ скорости затухания мод существенно различаются и аперидическая мода является наиболее долгоживущей, т. е. со временем в жидкости остаются долгоживущие крупномасштабные структуры, а гравитационно-гироскопические волны затухают.

Отметим, что в работе [13] рассматривался вопрос о долгоживущих крупномасштабных структурах, которые эволюционируют в аперидическом режиме. Показано, что такие структуры характеризуются неравенством $8\Omega^2 \alpha^2 / N^2 \sin^2 \gg 1$ или в наших обозначениях $2/\beta \gg 1$, т. е. $\beta \ll 1$. Это соответствует ситуации, когда силы Кориолиса существенно превышают силы плавучести. Указанные структуры имеют определенную ориентацию в пространстве. Следует, однако, указать на то, что другой параметр, определяющий отношение сил Кориолиса к вязким силам $\epsilon = 2\Omega \cos \alpha / \nu k^2$, должен быть малым, $\epsilon \ll 1$.

2.6. Случай $\epsilon = O(1)$ и $\beta \ll 1$

Пусть $\epsilon = O(1)$ и $\beta \ll 1$. Тогда находим

$$W = a \exp\left(-\frac{\omega^2}{\nu^2 k^4 + f_k^2} \nu k^2 t\right) + \exp\left(\left(-\nu k^2 + \frac{\omega^2}{2(\nu^2 k^4 + f_k^2)} \nu k^2\right) t\right) \times$$

$$\times \left[b \cos\left(\left(f_k + \frac{f_k \omega^2}{2(\nu^2 k^4 + f_k^2)}\right) t\right) + c \sin\left(\left(f_k + \frac{f_k \omega^2}{2(\nu^2 k^4 + f_k^2)}\right) t\right) \right]. \quad (12)$$

Решение характеризуется тремя модами: аперидической и двумя волновыми (гироскопические волны). Скорость затухания аперидической моды меньше, чем скорость затухания волновых мод. Интересно отметить, что на этапе эволюции, характеризуемом временем $\tau = O(1)$, влияние инерционных эффектов такое же, как и влияние сил вязкости и Кориолиса в отличие от п.п. 3.1 и 3.2, когда влияние сил Кориолиса было мало. С течением времени при $\tau = O(1/\sqrt{\beta})$, т. е. $t \sim 2\Omega \cos \alpha / N \sin \vartheta \cdot \nu k^2$, роль инерционных эффектов падает, а влияние сил вязкости такое же по порядку, как и влияние сил Кориолиса. При таких временах влияние волновой моды становится малым. Далее, при $\tau = O(1/\beta)$, т. е. $t \sim 4\Omega^2 \cos^2 \alpha / N^2 \sin^2 \vartheta \cdot \nu k^2$, как и на предыдущем этапе, роль инерционных эффектов становится малой, а в балансе сил принимает участие и сила плавучести.

3. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО СООТНОШЕНИЯ

Возвращаясь к п.п. 3.2 и 3.3, отметим, что при определенных значениях параметров γ и $\delta = \beta \epsilon^2$ движение становилось полностью аперидическим. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Запишем дисперсионное уравнение (5) в виде

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + (1 + \gamma \epsilon + \epsilon^2)\lambda + \gamma \epsilon = 0. \quad (13)$$

и найдем его дискриминант

$$D = \frac{\epsilon^2}{27} f(\gamma, \epsilon), \quad (14)$$

где

$$f(\gamma, \epsilon) = \epsilon \gamma^3 + \left(3\epsilon^2 - \frac{1}{4}\right) \gamma^2 + (3\epsilon^3 - 5\epsilon) \gamma + (1 + \epsilon^2)^2. \quad (15)$$

При этом будем учитывать, что $\epsilon \gamma = \beta > 0$, т. е. знаки ϵ и β совпадают. Ограничимся случаем $\epsilon > 0$ и $\gamma > 0$, случай отрицательных ϵ и γ рассматривается аналогично. Отметим, что в зависимости от знака дискриминанта уравнение (13) имеет: один действительный корень и два мнимых ($D > 0$), три действительных корня ($D < 0$). Представляя асимптотические решения уравнения

$f(\gamma, \epsilon) = 0$ при малых ϵ в виде

$$\gamma = \frac{\gamma_0 - 1}{\epsilon} + \gamma_0 + \gamma_1 \epsilon,$$

находим положительные корни

$$\gamma_1 = 2 - 2\epsilon, \quad \gamma_2 = \frac{1}{4\epsilon} + \epsilon. \quad (16)$$

Как было показано ранее, для $\epsilon \ll 1$ малые значения γ соответствуют гироскопическим волнам, большие γ – внутренним гравитационным волнам. Интервалу $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ соответствует аперидическое движение жидкости (заштрихованный участок на рис. 2).

С ростом ϵ корни γ_1 и γ_2 приближаются друг к другу, и при некотором $\epsilon = \epsilon_{cr}$ они совпадают. При $\epsilon > \epsilon_{cr}$ корни исчезают, и появляются гравитационно-гироскопические волны.

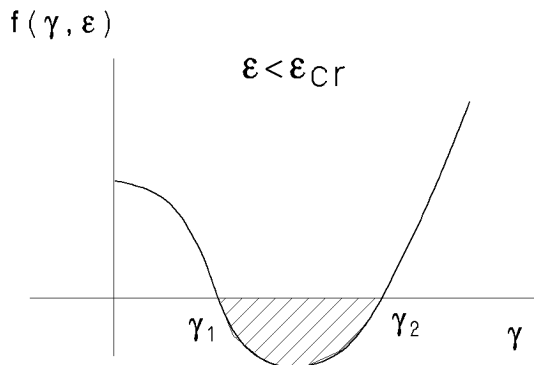


Рис. 2. Функция $f(\gamma, \epsilon)$ при малых ϵ

Найдем критическое значение ϵ_{cr} , при котором это происходит. Для этого нужно исследовать дискриминант кубического многочлена (15) и найти область значений ϵ , при которых многочлен (15) имеет один корень. Дискриминант D_S многочлена (15) имеет вид

$$D_S = \frac{1}{64 \cdot 27 \epsilon^4} (27 \epsilon^2 - 1)^3. \quad (17)$$

Таким образом мы получили, что

$$\epsilon_{cr} = \frac{1}{3\sqrt{3}}. \quad (18)$$

При $\epsilon < \epsilon_{cr}$ функция (15) имеет три корня, один из которых отрицательный, а при $\epsilon > \epsilon_{cr}$ функция (15) имеет один отрицательный корень. При $\epsilon = \epsilon_{cr}$ функция имеет два корня: один из которых

– отрицательный, а второй корень это – совпадающие корни $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{cr}$. При этом

$$\gamma_{cr} = \frac{8}{9} \sqrt{3}. \quad (19)$$

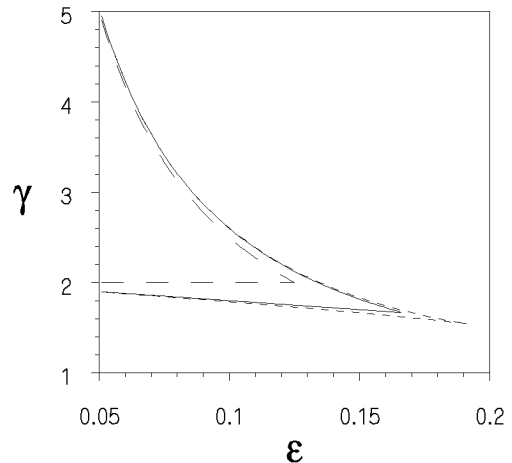


Рис. 3. Зависимость корней γ от ϵ

На рис. 3 изображены рассчитанные зависимости корней γ многочлена (15) от ϵ . Длинный штрих – нулевое приближение, сплошная кривая – первое приближение и короткий штрих – численное решение.

4. ДИАГРАММА ДВИЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ (m, k_3)

Используя найденные ранее значения корней γ_1 и γ_2 , была построена диаграмма режимов движения в переменных (m, k_3) для фиксированного значения угла α . Схематически она изображена на рис. 4.

Заштрихованная область соответствует аперидическому движению жидкости. Кривая γ_1 отделяет эту область от области гироскопических волн, γ_2 – от области гравитационных волн. Штриховая кривая – геометрическое место точек пересечения кривых γ_1 и γ_2 при различных значениях частоты плавучести, т.е. соответствует равенству (18). Цифрами 1 – 6 обозначены области, для которых выше приведены соответствующие асимптотические решения (соответственно в п.п. 3.1, ..., 3.6).

Вводя характерный вязкий масштаб длины стратифицированной жидкости $\sqrt{\nu/N}$ [12] и учитывая, что $\epsilon = 2\Omega \cos \alpha / \nu k^2$ и $\gamma = N^2 m^2 / 2\Omega \cos \alpha$

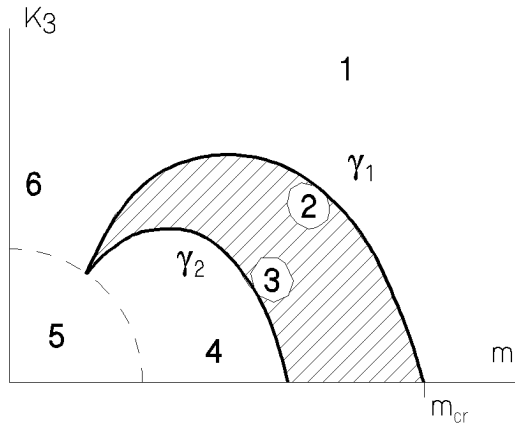


Рис. 4. Схема диаграммы движений в пространстве (m, k_3)

νk^4 , в безразмерном виде получаем

$$\tilde{k}^2 = \frac{R}{\epsilon} \quad \text{и} \quad \tilde{k}^4 = \frac{\tilde{m}^2}{\gamma R}, \quad (20)$$

где $R = 2\Omega \cos \alpha / N$. Откуда нетрудно найти

$$\tilde{k}_3^2 = \frac{R}{\epsilon} \left(1 - \frac{\gamma R^2}{\epsilon}\right) \quad \text{и} \quad \tilde{m}^2 = \frac{\gamma R^3}{\epsilon^2}. \quad (21)$$

В дальнейшем знак "≈" опускаем. Зная численные зависимости корней $\gamma_1(\epsilon)$ и $\gamma_2(\epsilon)$, можно построить искомую диаграмму в координатах (m, k_3) .

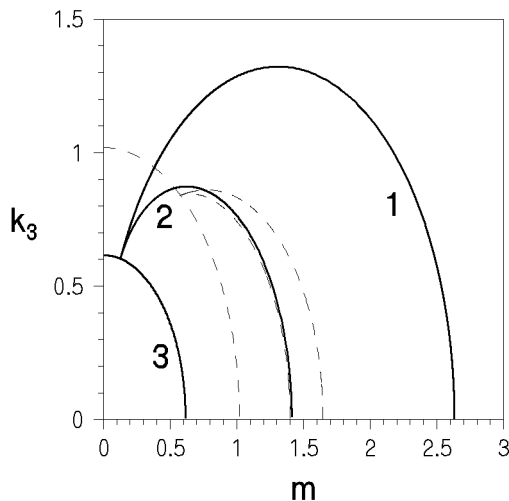


Рис. 5. Диаграмма движений в пространстве (m, k_3)

На рис. 5 изображены диаграммы для $\cos \alpha = 1/2$ для разных отношений Ω/N при $N = 10^{-3} c^{-1}$. Сплошной линией обозначены кривые для отношения $\Omega/N = 7.3 \cdot 10^{-2}$, которое характерно для Земли, штриховой линией обозначены кривые для отношения $\Omega/N = 0.2$. На диаграмме цифрой

1 показана линия, отделяющая область волновых движений (область выше кривой) от аperiodических движений (область ниже кривой). Эта кривая определяется корнем $\gamma_1(\epsilon)$. Хотя в области над кривой 1 существуют волновые движения, как следует из выражения (6), вязкая диссипация здесь настолько велика ($\epsilon \gg 1, \gamma = O(1)$), что реализующиеся волновые движения являются несущественными [10]. Цифрой 2 показана кривая, отделяющая гравитационные волны (область ниже кривой) от аperiodических движений (область выше кривой). Эта кривая определяется корнем $\gamma_2(\epsilon)$. Геометрическое место точек пересечения кривых γ_1 и γ_2 определяется равенством (18). Цифрой 3 обозначено это геометрическое место точек. Данная кривая ограничивает область гравитационно-гироскопических волн. Были найдены характерные точки диаграммы (точки пересечения линий γ_1, γ_2 и ϵ_{cr} с осью абсцисс). Анализ показывает, что с ростом Ω радиус окружности, определяемый выражением (18), растет, значение m_{cr} (точка пересечения кривой, отделяющей область гироскопических волн от аperiodических движений с осью m) уменьшается, тем самым приводя к расширению области гироскопических волн и соответственно к уменьшению зоны аperiodических движений. Кривая γ_2 при этом также слегка сдвигается. По мере дальнейшего роста Ω наступает момент, когда область аperiodических движений исчезает и в жидкости остаются только волновые движения. Это происходит при $N \leq 4\sqrt{2}\Omega \cos \alpha$. Отсюда можно сделать вывод, что при $N < N_{cr} = 4\sqrt{2}\Omega$ в пространстве волновых чисел существует область в виде конуса, при попадании в которую волновых векторов возмущений в жидкости всегда будут присутствовать волновые движения независимо от масштабов возмущений. При уменьшении Ω имеет место противоположная картина, радиус окружности, определяемый равенством (18), уменьшается, значение m_{cr} растет, т.е. область гироскопических волн уменьшается, и соответственно растут размеры зоны аperiodических движений. При $\Omega \rightarrow 0$ кривые γ_1 и $\epsilon = 1/3\sqrt{3}$ вырождаются и мы получаем диаграмму, изученную в [4, 5].

5. ДИАГРАММА ДВИЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ (k_1, k_2, k_3)

Указанные выше диаграммы получены для фиксированного значения $\cos \alpha$. Это накладывает существенные ограничения на их использование.

Рассмотрим аналогичные диаграммы без наложения условия постоянства $\cos \alpha$. Нетрудно видеть, что

$$\cos \alpha = \sin \vartheta \cos \eta \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi, \quad (22)$$

величины α , ϑ , η , φ указаны на рис. 1. Из выражения (22) видно, что параметр $\cos \alpha$ в неявном содержит k_1 , k_2 и k_3 . Таким образом, имеет смысл рассмотреть построенные выше диаграммы движений в пространстве (k_1, k_2, k_3) .

1) Диаграмма, отделяющая область гироскопических волн от аperiодических движений.

Данная диаграмма определяется корнем γ_1 уравнения (15). Рассмотрим нулевое приближение этого корня, т.е. $\gamma_1 = 2$. Тогда в безразмерном виде получаем

$$k^2 = \frac{\sin^2 \vartheta}{4P \cos \alpha}, \quad (23)$$

где $P = \Omega/N$. Исследуем случай $\cos \alpha > 0$ (случай $\cos \alpha < 0$ рассматривается аналогично). Положим также, что широта, на которой находится начало системы координат, равна 45° , т.е. $\varphi = 45^\circ$. Тогда получим

$$k_1 = \frac{\sin^2 \vartheta \sin \eta}{\sqrt[4]{8\sqrt{P}} \sqrt{\cos \eta \sin \vartheta + \cos \vartheta}}, \quad (24)$$

$$k_2 = \frac{\sin^2 \vartheta \cos \eta}{\sqrt[4]{8\sqrt{P}} \sqrt{\cos \eta \sin \vartheta + \cos \vartheta}}, \quad (25)$$

$$k_3 = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt[4]{8\sqrt{P}} \sqrt{\cos \eta \sin \vartheta + \cos \vartheta}}. \quad (26)$$

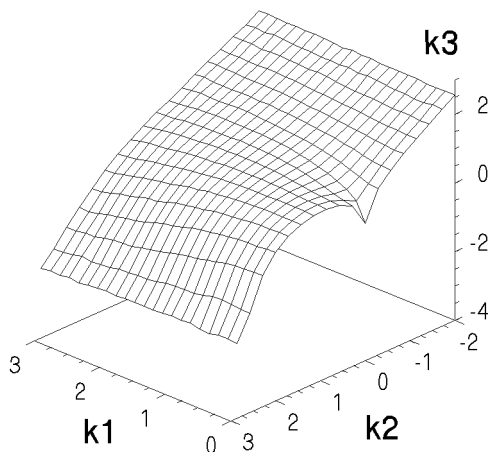


Рис. 6. Трехмерное изображение участка поверхности $\gamma = 2$ в пространстве (k_1, k_2, k_3)

Таким образом, найдено параметрическое уравнение поверхности $\gamma = 2$ при $\cos \alpha > 0$ в пространстве (k_1, k_2, k_3) . Участок этой поверхности, построенный для $P = 7.3 \cdot 10^{-2}$, изображен на рис. 6.

В целом поверхность $\gamma = 2$ симметрична относительно плоскости (k_2, k_3) , а также относительно оси k_1 . Если волновые векторы возмущений попадают вне области, ограниченной данной поверхностью, то для таких возмущений будут наблюдаться гироскопические волны. Следует помнить, что на рисунке показано изображение только части поверхности $\gamma = 2$, а именно для $k_3 > 0$. В действительности указанная поверхность симметрична относительно оси k_1 , поэтому для $k_3 < 0$ существует аналогичная диаграмма. При достаточно больших k_1 и k_2 поверхность $\gamma = 2$ в пространстве волновых чисел (k_1, k_2, k_3) асимптотически приближается к плоскости, перпендикулярной направлению вектора $\vec{\Omega}$ и проходящей через начало координат. Используя указанную выше диаграмму, следует также учитывать, что при достаточно малых параметрах k_1 , k_2 и k_3 могут наблюдаться гравитационные и гравитационно-гироскопические волны. Аналогичные диаграммы для этих случаев рассмотрены ниже.

2) Диаграмма, отделяющая область гравитационных волн от области аperiодических движений.

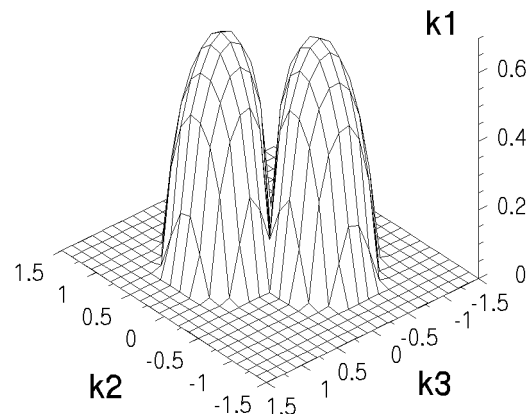


Рис. 7. Трехмерное изображение участка поверхности $\epsilon_{cr} = 1/8$ в пространстве (k_1, k_2, k_3)

Данная диаграмма определяется корнем γ_2 уравнения (15). В нулевом приближении этот корень имеет вид $\gamma_2 = 1/4\epsilon$. Откуда в безразмерном виде

имеем

$$k^2 = \sqrt[3]{4}m^{2/3} - m^2, \quad (27)$$

что полностью соответствует результату, полученному в [5], где данная диаграмма была получена в плоскости (m, k_3) . Очевидно, что в пространстве (k_1, k_2, k_3) аналогичной диаграммой будет являться поверхность вращения кривой (27).

3) Диаграмма гравитационно - гироскопических волн.

Данная диаграмма определяется точкой пересечения кривых $\gamma_1(\epsilon) = 2$ и $\gamma_2(\epsilon) = 1/4\epsilon$.

Точка пересечения указанных выше кривых будет $\epsilon_{cr} = 1/8$. Откуда в безразмерном виде получаем

$$k^2 = 16P \cos \alpha, \quad (28)$$

где $P = \Omega/N$. Учитывая уравнение (22) и полагая $\varphi = 45^\circ$, получаем

$$k_1 = \sqrt{8\sqrt{2}\sqrt{P} \sin \vartheta \sin \eta \sqrt{\cos \eta \sin \vartheta + \cos \vartheta}}, \quad (29)$$

$$k_2 = \sqrt{8\sqrt{2}\sqrt{P} \sin \vartheta \cos \eta \sqrt{\cos \eta \sin \vartheta + \cos \vartheta}}, \quad (30)$$

$$k_3 = \sqrt{8\sqrt{2}\sqrt{P} \cos \vartheta \sqrt{\cos \eta \sin \vartheta + \cos \vartheta}}. \quad (31)$$

Таким образом, получено параметрическое уравнение искомой поверхности. Эта поверхность является геометрическим местом точек пересечения поверхностей $\gamma_1 = 2$ и $\gamma_2 = 1/4\epsilon$.

На рис. 7 показано изображение участка указанной поверхности, построенной при $P = 7.2 \cdot 10^{-2}$. В целом эта поверхность симметрична относительно плоскости (k_2, k_3) . Для всех возмущений, волновые вектора которых попадают внутрь пространства, ограниченного указанной выше поверхностью, будут наблюдаться гравитационно-гироскопические волны. Данный рисунок может служить диагностической диаграммой наличия или отсутствия гравитационно-гироскопических волн для заданных k_1, k_2, k_3 .

6. ДИАГРАММА ДВИЖЕНИЙ В СЛУЧАЕ "ТРАДИЦИОННОГО" ПРИБЛИЖЕНИЯ

Построим аналогичные диаграммы в "традиционном" приближении. При этом в этом приближении φ полагается равным 90° , и $2\Omega \cos \alpha$ нужно заменить на $f \cos \vartheta$. Таким образом, в безразмерном виде имеем

$$k^2 = \frac{Q \cos \vartheta}{\epsilon}, \quad k^4 = \frac{m^2}{\gamma Q \cos \vartheta}, \quad (32)$$

где $Q = f/N$. Откуда, исключая $\cos \vartheta$, получаем

$$m^2 = \frac{\gamma Q^3}{(\epsilon + \gamma Q^2) \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon \gamma Q^2}}, \quad (33)$$

$$k_3^2 = \frac{\epsilon Q}{(\epsilon + \gamma Q^2) \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon \gamma Q^2}}. \quad (34)$$

Используя полученные ранее численные решения $\gamma_1(\epsilon)$ и $\gamma_2(\epsilon)$, построены кривые, отделяющие тот или иной вид движения. Кривая, ограничивающая область гравитационно-гироскопических волн, определяется равенством (18). Откуда в безразмерном виде получаем

$$m^2 = 3\sqrt{3}Q \sin^2 \vartheta \cos \vartheta, \quad k_3^2 = 3\sqrt{3}Q \cos^3 \vartheta. \quad (35)$$

На рис. 8 показаны диаграммы такого типа, построенные для различных значений параметра Q при $N = 10^{-3}$. Сплошной линией показан случай $Q = 1.46 \cdot 10^{-1}$, что является характерным значением для Земли, штриховой линией показан случай $Q = 0.4$. На диаграмме кривая 1 отделяет гироскопические волны (область выше кривой) от аperiодических движений (область ниже кривой), кривая 2 отделяет гравитационные волны (область ниже кривой) от аperiодических движений (область выше кривой), кривая 3 ограничивает область гравитационно-гироскопических волн.

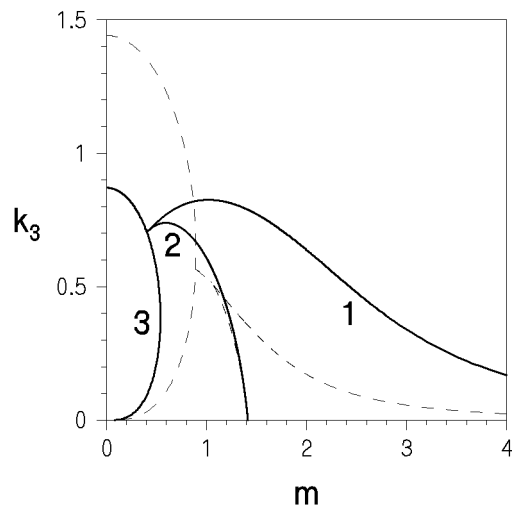


Рис.8. Диаграмма движений

Анализ показывает, что с ростом f расширяется область гироскопических волн, а также область гравитационно-гироскопических волн, при этом область аperiодических движений сужается. Характерной особенностью этой диаграммы является асимптотическое приближение кривой 1 к оси m при $m \rightarrow \infty$. Действительно, кривая 1 определяется корнем $\gamma_1(\epsilon)$ уравнения (15), который ограничен при $\epsilon \rightarrow 0$ ($\gamma_1(\epsilon) \rightarrow 2$ при $\epsilon \rightarrow 0$). При этом

из зависимостей (33) и (34) следует, что $m \rightarrow \infty$ и $k_z \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Указанное выше асимптотическое приближение кривой 1 к оси m и представлено на рис. 8. Сравнение с рис. 5 показывает, что имеются заметные различия в диаграммах при больших значениях m и области малых k_z и m . Однако, как указано ранее, в области выше кривой 1 возникающие волновые флуктуации быстро вырождаются и они являются несущественными в анализе общей картины движений. При анализе области малых k_z и m следует иметь в виду, что в рассматриваемом приближении членами Ω_y пренебрегают [14]. Как следует из уравнения (2), это справедливо при $|k_y| \ll |k_z \Omega_z / \Omega_y|$ [14]. Другими словами, пространственное изменение волнового поля в вертикальной плоскости должно быть существенно меньше, чем в горизонтальной плоскости, а широта места не должна быть слишком малой. Тогда становится ясно, что область малых k_z и m (нижняя часть кривой 3 на рис. 8) не попадает в область, где данное приближение может быть использовано. В остальных же областях конфигурации диаграмм соответствуют друг другу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ характеристик движений вязкой стратифицированной по температуре жидкости при наличии вращения. Показано, что влияние последнего видоизменяет движение жидкости, в частности, приводит к появлению гироскопических и гравитационно-гироскопических волн. В пространстве волновых чисел построены диаграммы, характеризующие движения жидкости в зависимости от параметров среды и масштабов возмущений. Проведенный асимптотический анализ движений жидкости показал, что влияние вязкости существенным образом изменяет характер движения. Под влиянием вязкости в зависимости от масштабов возмущений возникает зона аперiodических движений. Обнаружено, что в жидкости могут возникать крупномасштабные долгоживущие неосциллирующие движения. Показано, что в отличие от случая отсутствия вра-

щения зона аперiodических движений ограничена при больших значениях вертикальных и горизонтальных волновых чисел кривой (в данном случае γ_1) и не достигает области малых m и k_z , т.е. имеет своеобразную “клювоподобную” структуру, изображенную на рисунках 3 и 6. Определены как численно, так и аналитически границы зоны аперiodических движений, показано как изменяется положение этих границ при изменении частоты вращения.

1. Монин А.С., Озмидов Р.В. Океанская турбулентность.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.— 320 с.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т.1.— М.: Мир, 1981.— 480 с.
3. Pearson H.J., Linden P.F. The final stage of decay of turbulence in stably stratified fluid // J. Fluid Mech.— 1983.— **134**.— Р. 195-203..
4. Мадерич В.С., Никишов В.И. Перемешивание и рестратификация в устойчиво стратифицированной жидкости // Гидромеханика.— 1996.— Вып. 70.— С. 69-77.
5. Гетман Е.Н., Никишов В.И. О вырождении слоистых структур в стратифицированной жидкости // Гидромеханика.— 1989.— Вып. 60.— С. 15-20.
6. Riley J.J., Metcalfe R.W., Weissman M.A. Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density-stratified fluids // Proc. AIP Conference on Nonlinear properties of internal waves. (West B.J., ed) American Inst. of Physics.— 1981.— .— Р. 76-112.
7. Lilley D.K. Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere // J. Atmosph. Sci.— 1983.— **40**, No. 3.— Р. 749-761.
8. Riley J.J., Lelong M.-P. Fluid motion in the presence of strong stable stratification // Ann. Rev. Fluid Mech.— 2000.— **32**.— Р. 613-657.
9. Lin J.T., Pao Y.N. Wakes in stratified fluids // Ann. Rev. Fluid Mech.— 1979.— **11**.— Р. 317-338.
10. Пантелеев Н.А., Охотников И.Н., Слепышев А.А. Мелкомасштабная структура и динамика океана.— К.: Наукова думка, 1993.— 195 с.
11. Каменкович В.М. Основы динамики океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1973.— 240 с.
12. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде.— К.: Наукова думка, 1988.— 239 с.
13. Маслов В.П. О влиянии вязкости на мелкомасштабные движения в стратифицированном океане // Океанология.— 1986.— **26**, Вып. 4.— С. 15-20.
14. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред.— М.: Наука, 1982.— 335 с.