

УДК 532.595

# МОДАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛЕСКАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКАХ С НЕВЕРТИКАЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ. МЕТОДИКА НЕКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

И. А. ЛУКОВСКИЙ, А. Н. ТИМОХА

Институт математики НАН Украины

Получена 14.05.2000

Анализируются нелинейные плескания идеальной несжимаемой жидкости (потенциальные течения). Жидкость частично занимает гладкий бак с невертикальными стенками. Опрокидывающиеся волны, буруны и мелководные волны исключаются из рассмотрения. Развивается техника неконформных отображений Луковского (1975). Она предполагает, что внутренность бака может быть трансформирована в некоторую цилиндрическую область, в которой уравнение свободной поверхности допускает нормальную форму и модальное представление. Допустимые тензорные трансформации неизбежно имеют сингулярности при отображении нижней (верхней) угловой точки бака в дно (потолок) цилиндра. Это ведет к вырождению спектральной задачи о собственных колебаниях. Статья представляет математическую теорию таких спектральных задач и устанавливает соответствующие спектральные и вариационные теоремы. Собственные формы в круговом коническом баке вычисляются с помощью вариационного алгоритма, основанного на этих теоремах. Показано, что алгоритм робастный и численно эффективный как для низших, так и высших мод. В статье показано, что известная бесконечномерная модальная система Луковского (построенная ранее для плескания в цилиндрических баках) остается инвариантной относительно допустимых тензорных преобразований (при поступательных движениях сосуда). Это делает возможным предложить простой алгоритм построения модальных систем для исследуемого случая. Используя анзац Луковского, выводится пятимерная модальная система для нелинейных плесканий в круговом коническом баке.

Аналізуються нелінійні плескання ідеальної нестисливої рідини (потенціальні течії). Рідина частково займає гладкий бак із невертикальними стінками. Хвилі, що опрокидуються, буруни та мілководні хвилі виключаються із розглядання. Розвивається техніка неконформних відображень Луковського (1975). Вона передбачає, що внутрішність бака може бути трансформована в деяку циліндричну область, в якій рівняння вільної поверхні допускає нормальну форму і модальне представлення. Допустимі тензорні трансформації мають сингулярності при відображенні нижньої (верхньої) кутової точки бака в дно (стелю) циліндра. Це веде до виродження спектральної задачі про власні коливання. Стаття представляє математичну теорію таких спектральних задач і встановлює відповідні спектральні та варіаційні теореми. Власні форми в коловому конічному баку визначаються за допомогою варіаційного алгоритму, що базується на цих теоремах. Показано, що алгоритм робастий і чисельно ефективний як для нижчих, так і для вищих мод. Е статті показано, що відома нескінченномірна модальна система Луковського (побудована раніше для плескання в циліндричних баках) лишається інваріантною відносно допустимих тензорних перетворень (при поступальних рухах сосуду). Це дає можливість запропонувати простий алгоритм побудови модальних систем для випадку, що досліджується. Використовуючи анзац Луковського, виводиться п'ятимірна модальна система для нелінійних плескань у коловому конічному баку.

Nonlinear sloshing of an incompressible fluid with irrotational flow is analysed. The fluid occupies partly a smooth tank with walls having non-cylindrical shape. No overturning, breaking and shallow water waves are assumed. Non-conformal mapping technique by Lukovsky (1975) is developed. It assumes that tank's cavity can be transformed into an artificial cylindrical domain, where equation of free surface allows both normal form and modal representation of instantaneous surface shape. Admissible tensor transformations have due singularities in mapping the lower (upper) corners of the tank into artificial bottom (roof). It leads to degenerating spectral boundary problems on natural modes. The paper delivers the mathematical background for these spectral problem and establishes the spectral and variational theorems. Natural modes in circular conical cavity are calculated by variational algorithm based on these theorems. It is shown that the algorithm is robust and numerically efficient for calculating both lower and higher natural modes. Finally, the paper shows that the well-known infinite-dimensional modal systems by Lukovsky (derived for sloshing in cylindrical tank) keep invariant structure with respect to admissible tensor transformations (for translatory motions of the vehicle). This makes it possible to offer the simple derivation algorithm of nonlinear modal systems for the studied case. When utilising ansatz by Lukovsky we derive the five-dimensional modal system for nonlinear sloshing in circular conic tanks.

## ВВЕДЕНИЕ

Жидкость, частично занимающая гладкий подвижный бак, совершает волновые движения большой амплитуды, обусловленные подвижностью ее свободной границы относительно гидростатического равновесия. Модель "замороженной" жидкости неприемлема в данном случае. Для получения статистических оценок амплитудного и сило-

вого отклика жидких грузов необходимы методы, позволяющие рассчитывать плескание в реальном времени и с учетом сложных переходных процессов.

Задача о плескании обычно основывается на потенциальной теории идеальной несжимаемой жидкости. Примеры непосредственного расчета плесканий с помощью CFD методов представлены в отчетах [26, 28], где констатируются сложности

при симуляции достаточно больших промежутков реального времени. CFD методы устойчивы лишь в течение нескольких секунд реального времени, они также не способны описывать установившиеся движения. Одна из причин связывается с удовлетворением условий сохранения объема и энергии. Существует также проблема в точном описании взаимодействия жидкости со стенками бака (см. обзор этой проблемы Фалтинсена и Рогнебакке [20]). Взамен развиваются аналитические и численно-аналитические методы, большинство из которых используют асимптотическую и модальную технику (см. детальный обзор Фалтинсена и др. [21]). Модальное представление означает, что используется ряд Фурье с варьируемыми во времени коэффициентами (модальными функциями) для описания эволюции свободной поверхности:

$$x = f(y, z, t) = \sum \beta_i(t) f_i(y, z), \quad (1)$$

где  $Oxyz$  – координатная система, жестко связанная с баком и  $t$  – время. Модальное представление (1) означает, что игнорируются опрокидывающиеся волны и буруны (султаны) на свободной поверхности. Это представление также неприменимо для теории мелкой воды (см. анализ этой проблемы Фалтинсена и Тимохи [22]).

Функции  $\{f_i(x, y)\}$  должны составлять базис Фурье на невозмущенной свободной поверхности  $\Sigma_0$ . Спектральные теоремы линейной теории (доказанные, например, в монографии Фещенко и др. [12]) устанавливают, что подходящим базисом является набор собственных форм. Имеется ограниченный класс баков, где спектральная задача имеет аналитическое решение. Примерами являются двух- или трехмерные прямоугольные баки и вертикальные цилиндрические баки кругового сечения. Представление (1) дает тогда общее решение задачи о линейных плесканиях. Предполагая, что обобщенные координаты  $\beta_i(t)$  достаточно малы и асимптотические соотношения между ними известны, ряд Фурье (1) может быть использован для асимптотических подходов, которые преобразуют исходную задачу со свободной границей к конечной последовательности асимптотических аппроксимаций. Асимптотическая процедура обычно предполагает наличие единичной (часто спаренной) доминирующей модальной функции, соответствующей стоячей волне с минимальной собственной частотой. Некоторые асимптотические процедуры были предложены Наримановым [10], Моисеевым [9], Фалтинсеном [19] и Додже, Кана и Абрамсоном [18]. Они вводили различные асимптотические межмодальные соотно-

шения, среди которых наиболее известным является соотношение Моисеева, приводящее к кубическому секулярному уравнению в терминах амплитуды основной собственной формы. Метод возмущения является также способом получения малоразмерных модальных систем (систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений), связывающих обобщенные координаты  $\beta_i(t)$  или их усредненные значения (для резонансных волн). (Мы отсылаем заинтересованных читателей к обзорам, написанным Луковским [5], Луковским и Тимохой [8], Солаас и Фалтинсеном [27] и Фалтинсеном и др. [21].) Такие нелинейные модальные системы имеют 1-2 степени свободы и связывают доминантные модальные функции. Поскольку вывод подобных систем требует значительного числа аналитических преобразований, возрастающих экспоненциально с ростом желаемой размерности модальной системы, является сомнительным получение многомерных систем с помощью асимптотических подходов. Вариационная методика, упрощающая вывод модальных систем, была независимо предложена Луковским [4] и Майлсом [25]. Она базируется на эквивалентной вариационной постановке в форме вариационных принципов Гамильтона-Остроградского или Люка-Бейтмена (см. фундаментальные работы Бейтмена [14], Люка [24], Бердичевского [1], Уизема [29] и некоторые обобщения, предложенные Байером и др. [17]). Эквивалентность дифференциальной и вариационной формулировок, будучи доказанной при предположении нормального представления свободной границы  $x = f(y, z, t)$ , обосновывает вывод многомерных нелинейных модальных систем Луковского [5], Лимарченко и Ясинского [2] и Фалтинсена и др. [21].

Мультимодальное моделирование является робастным и численно эффективным. Это было продемонстрировано Луковским [5], Лимарченко и Ясинским [2], Луковским и Тимохой [8], Фалтинсеном и др. [21] и Фалтинсеном и Тимохой [22] для различных ситуаций, даже когда амплитудный отклик жидкости соизмерим с размерами бака. С увеличением числа мод и учетом вторичных резонансов оно может быть принято для расчетов реальных течений и моделирования взаимодействия в системе "тело-жидкость". Оно может быть также распространено на случай, когда спектральная задача линейной теории не имеет аналитических решений и собственные формы приближаются приближенно-аналитически. Подходящие численно-аналитические методы были развиты в монографиях Фещенко и др. [12], Луковского [5] и в работе Солаас и Фалтинсена [27]. Необходи-

мым условием, однако, остается вертикальность стенок около свободной границы в ее равновесном состоянии. В противном случае формы в (1) имеют изменяемую во времени область определения. Это делает модальный подход неприменимым, вообще говоря, даже для линейной задачи. Действительные волновые движения около стенок не могут быть тогда описаны.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи о нелинейных плесканиях в гладких баках, когда их стенки не цилиндрические. Она развивает методику неконформных отображений Луковского [3], которая предполагает, что полость бака может быть гладко трансформирована в цилиндрическую область в некоторой криволинейной координатной системе  $(z^1, z^2, z^3)$ , где уравнение свободной границы допускает нормальный вид

$$\xi^*(z^1, z^2, z^3, t) = z^1 - f^*(z^2, z^3, t) = 0. \quad (2)$$

В свою очередь, трансформируется и исходная нелинейная краевая задача, а  $f^*$  раскладывается в ряд Фурье

$$f^*(z^2, z^3, t) = \text{const} + \sum \beta_i(t) f_i(z^2, z^3), \quad (3)$$

где  $f_i$  – трансформированные собственные формы, которые должны быть найдены численно-аналитически. Луковский [3] совместил с такой техникой асимптотическую схему Нариманова и вывел одномерную нелинейную модель нелинейных плесканий в конических и сферических сосудах, описывающих эволюцию основной резонансно возмущенной собственной стоячей волны. Минимальная собственная форма была найдена численно путем разложения в ряд по гармоническим полиномам с использованием вариационной процедуры, предложенной в монографии Фещенко и др. [12]. В дальнейшем книги Луковского [5] и Луковского и Тимохи [8] обобщили этот метод. Была построена двумерная модальная система, описывающая нелинейное взаимодействие продольной и поперечной доминантных стоячих волн в коническом баке. Эти системы являются, однако, неудовлетворительными для расчета реальных нелинейных плесканий, прежде всего, неустановившихся, поскольку пренебрегают влиянием высших форм.

Двойная цель этой работы состоит в обобщении вариационных методов для спектральных проблем линейной теории, сформулированных в криволинейной координатной системе, и в получении многомерных нелинейных модальных систем в вспомогательной цилиндрической области. Поскольку допустимые тензорные трансформации неизбежно имеют сингулярности при отображении нижних (верхних) угловых вершин в искусственное

дно (потолок) цилиндрической области, соответствующие энергетические (вариационные) формулировки трансформированной спектральной задачи линейной теории нуждаются в математическом обосновании. Статья дает его и устанавливает спектральные и вариационные теоремы в подходящих весовых пространствах Соболева. Развивается вариационный алгоритм, базирующийся на этих теоремах, который применяется для случая трансформированного конического бака. Показана робастность и численная эффективность этого алгоритма. Приближенные решения дают более высокую точность по отношению к известным алгоритмам Фещенко и др. [12], Луковского и Билыка [7], Луковского, Барняка и Комаренко [6], Бауэра [15], Бауэра и Эйделя [16], которые применялись к нетрансформированной проблеме. Мы также обнаруживаем, что бесконечномерная нелинейная модальная система Луковского [5] и Фалтинсена и др. [21] сохраняет инвариантную структуру по отношению к допустимым тензорным трансформациям (в случае поступательных движений), что позволяет предложить простой алгоритм вывода нелинейных модальных систем. В настоящей работе это делается с использованием модального анзаца Луковского [5] для вывода пятимерной модальной системы нелинейных плесканий в конических сосудах. Предполагаемая межмодальная асимптотика соответствует Моисеевской. Полученная нелинейная система связывает две основные доминантные формы и три вторичных формы.

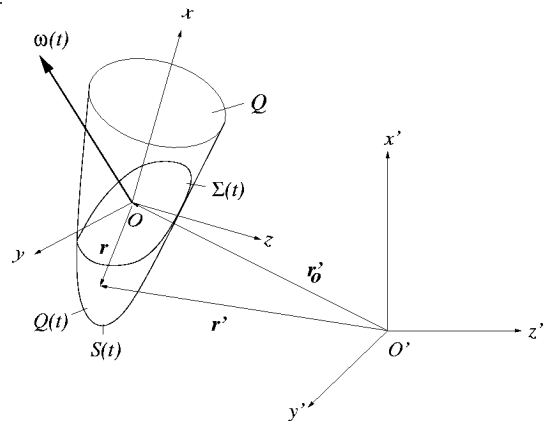


Рис. 1. Эскиз носителя с баком и принятые обозначения

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем волновые движения несжимаемой идеальной жидкости, частично занимаю-

шей абсолютно твердый подвижный бак  $Q$  носителя (рис. 1). Движения носителя описываются в абсолютной декартовой координатной системе  $O'x'y'z'$  парой зависимых от времени векторов  $\mathbf{v}_O(t)$  и  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . Они обозначают мгновенные поступательную и угловую скорости. Движение жидкости описывается в неинерциальной системе  $Oxyz$ , жестко связанной с носителем. Поскольку любой абсолютный радиус-вектор  $\mathbf{r}'(t) = (x', y', z')$  может быть разложен в сумму  $\mathbf{r}'_O(t) = \overline{O'O}$  и  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , потенциал гравитационных сил зависит от пространственных координат  $(x, y, z)$  и времени  $t$ :  $U(x, y, z, t) = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_O + \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{g}$  – ускорение гравитации.

Мы предполагаем потенциальность течений и вводим потенциал скоростей  $\Phi(x, y, z, t)$ . Следующая краевая задача со свободной границей (выведенная, к примеру, в монографиях Нариманова, Докучаева и Луковского [11] и Луковского [5]) связывает  $\Phi(x, y, z, t)$  и мгновенное положение свободной границы, определяемое уравнением  $\xi(x, y, z, t) = 0$ :

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{в } Q(t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}] \quad \text{на } S(t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}] - \frac{\xi_t}{|\nabla\xi|} \quad \text{на } \Sigma(t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi \cdot (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + U = 0 \quad \text{на } \Sigma(t), \quad (7)$$

$$\int_{Q(t)} dQ = \text{const}, \quad (8)$$

где  $S(t) = \partial Q(t) \cap \partial Q$  – смоченные стенки и дно,  $\boldsymbol{\nu}$  – внешняя нормаль.

Динамическое граничное условие (7) базируется на интеграле Лагранжа-Коши, переписанном для подвижной системы  $Oxyz$  (см. дискуссию в книге Кочин, Кибель и Розе [23]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi \cdot (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \\ + U + \frac{p - p_0}{\rho} = 0 \quad \text{в } Q(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Давление  $p$  на  $\Sigma(t)$  предполагается равным  $p_0 = \text{const}$ . Интегральное условие (8) (сохранение объема) является условием разрешимости краевой задачи Неймана (4)–(6).

Эволюционная задача со свободной границей (4)–(8) требует начальные условия Коши. Они

определяют начальный профиль свободной границы  $\Sigma(t_0)$  и нормальную скорость на нем  $\Sigma(t_0)$ :

$$\xi(t_0, x, y, z) = \xi_0(x, y, z); \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right|_{\Sigma(t_0)} = \Phi_0(x, y, z), \quad (10)$$

где  $\xi_0(x, y, z)$  и  $\Phi_0(x, y, z)$  являются известными функциями.

## 2. ДОПУСТИМЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ТРАНСФОРМАЦИИ

Пусть  $Q$  – полость бака, рассмотренная в декартовой параметризации, и  $Q^* = (0, d) \times D$  – цилиндрическая область в  $(z^1, z^2, z^3)$ -координатах, соответствующих некоторой криволинейной координатной системе. Мы предполагаем, что  $Q$  и  $Q^*$  – Соболевские области (открытые ограниченные линейно-связные области в  $R^3$  с кусочно-гладкой границей, см. математическое определение, приведенное Обэном [13]), и определяем следующее прямое и обратное преобразование между  $Q$  и  $Q^*$ :

$$\begin{aligned} z^1 = x, \quad z^2 = z^2(x, y, z), \quad z^3 = z^3(x, y, z); \\ z^2(\cdot, \cdot, \cdot), z^3(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^2(Q); \\ x = z^1, \quad y = y(z^1, z^2, z^3), \quad z = z(z^1, z^2, z^3); \\ y(\cdot, \cdot, \cdot), z(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^2(\bar{Q}^*) \end{aligned} \quad (11)$$

с положительно определенными матрицами Якоби (на замыканиях  $\bar{Q}$  и  $\bar{Q}^*$ ), вырождающимися не более чем на ограниченном числе изолированных односвязных участках границы  $\partial Q^*$ , где

$$J^*(z^1, z^2, z^3) = \frac{D(x, y, z)}{D(z^1, z^2, z^3)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial z^1} & \frac{\partial y}{\partial z^2} & \frac{\partial y}{\partial z^3} \\ \frac{\partial z}{\partial z^1} & \frac{\partial z}{\partial z^2} & \frac{\partial z}{\partial z^3} \end{vmatrix} = 0, \quad J^* \in C^2(\bar{Q}^*) \quad (12)$$

и в изолированных сингулярных точках на границе  $\partial Q$ , где  $J(x, y, z) = 1/J^* = \infty$ . Эти сингулярные точки отделены от невозмущенной свободной границы  $\Sigma_0 : x = h$ .

В дальнейшем мы предполагаем, что плоскость  $Oyz$  является касательной к  $\partial Q$ , так что  $x \geq 0$  для  $(x, y, z) \in Q$  и  $h$  – максимальная гидростатическая глубина жидкости. Плоскость  $Oz^2z^3$  совмещена с искусственным дном  $Q^*$  (рис. 2).

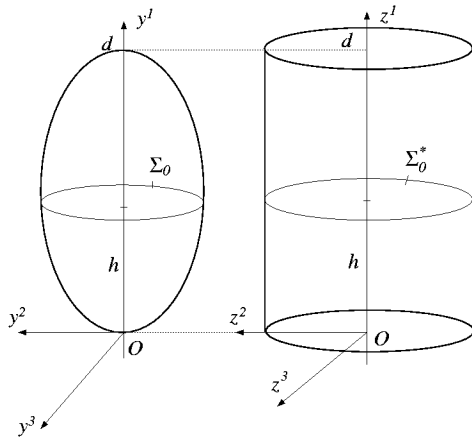


Рис. 2. Допустимые тензорные трансформации "кокона", определяемые (13)

**2.1. Сингулярные точки при тензорных трансформациях сосуда в виде кокона**

Очевидно, что следует избегать сингулярностей при тензорных трансформациях (11). Однако это невозможно сделать для сосудов в виде "кокона". Связано это с локальными нижней и верхней угловыми точками, трансформируемыми в искусственные дно и потолок. Эта ситуация изображена на рис. 2 для осесимметричной области  $Q = \{(x, y, z) : \sqrt{y^2 + z^2} = f(x), f(x) > 0, f \in C^2(0, d), x \in (0, d), f(0) = f(d) = 0\}$  и тензорной трансформации

$$z^1 = x; \quad z^2 = \frac{y}{f(x)}; \quad z^3 = \frac{z}{f(x)}, \quad (13)$$

отображающей  $Q$  в круговой цилиндр  $Q^* = (0, d) \times \{(z^2)^2 + (z^3)^2 < 1\}$ .

Трансформация (13) и ее обращение  $x = z^1; y = z^2 f(z^1); z = z^3 f(z^1)$  обладают положительно определенными матрицами Якоби (и, следовательно, Якобианами):

$$J^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f'(z^1) & f(z^1) & 0 \\ f'(z^1) & 0 & f(z^1) \end{vmatrix} = f^2(z^1) > 0, \quad (14)$$

( $J = \frac{1}{J^*} > 0$ ) во внутренних точках  $Q$  и  $Q^*$ . Однако,  $J^*$  неизбежно равны нулю на дне и потолке ( $z^1 = 0$  и  $z^1 = d$ ) цилиндра  $Q^*$ .

**2.2. Тензорное преобразование вариационного принципа Бейтмена**

Книга Луковского и Тимохи [8] доказывает следующую теорему, выражающую математическую

формулировку вариационного принципа Бейтмена для плескания жидкости в баках сложной геометрии: Пусть  $Q$  - область Соболева и  $(t_1, t_2)$  - промежуток времени. Пусть неравенство  $\xi(x, y, z, t) < 0, t \in (t_1, t_2)$  вырезает зависящие от времени Соболевские подобласти  $Q(t) \subset Q$ . Если существует независимая от времени область Соболева  $\tilde{Q}$ , т.ч.  $\tilde{Q}(t) \subset \tilde{Q} \subset Q$  и  $\Phi(x, y, z, t), \xi(x, y, z, t) \in C^2(\tilde{Q} \times [t_1, t_2])$ , тогда задача (4)-(8) является необходимым условием экстремума для функционала

$$W(\Phi, \xi) = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \\ L = \int_{Q(t)} (p - p_0) dQ = -\rho \int_{Q(t)} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \nabla \Phi \cdot (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + U \right] dQ, \quad (15)$$

на пробных функциях

$$\delta \Phi|_{t_1, t_2} = 0; \quad \delta \xi|_{t_1, t_2} = 0. \quad (16)$$

Принцип Бейтмена-Люка использует Лагранжиан в форме интеграла давления (см. обзоры Луковского и Тимохи [8] и Фалтинсена и др. [21]). Допустимые тензорные трансформации сохраняют инвариантными как Лагранжиан, так и функционал Бейтмена-Люка  $W = W^*$ :

$$L \equiv L^* = -\rho \int_{Q^*(t)} \left[ \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla^* \Phi^*)^2 - \nabla^* \Phi^* \cdot (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^* + U^* \right] J^* dQ^* \quad (17)$$

при метрическом тензоре

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (18)$$

сохраняющем начальную пространственную метрику

$$dS^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = g_{ij}(z^1, z^2, z^3) dz^i dz^j, \quad (19) \\ dQ = J^* dQ^* \quad (dQ^* = dz^1 dz^2 dz^3).$$

Здесь  $Q^*(t)$  - трансформированная область  $Q(t)$ ,

$$U^* = U(x(z^1, z^2, z^3), y(z^1, z^2, z^3), z(z^1, z^2, z^3), t), \\ \Phi^* = \Phi(x(z^1, z^2, z^3), y(z^1, z^2, z^3), z(z^1, z^2, z^3), t), \\ \nabla \Phi = \nabla^* \Phi^* = \left( g^{1j} \frac{\partial \Phi^*}{\partial z^j}, g^{2j} \frac{\partial \Phi^*}{\partial z^j}, g^{3j} \frac{\partial \Phi^*}{\partial z^j} \right) \quad (20)$$

и  $(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^*$  обозначает проекции на координатные орты криволинейной координатной системы;  $\{g^{ij}\}$  - ковариантный тензор к  $\{g_{ij}\}$ .

**2.3. Модальная система в случае поступательного движения носителя**

Предполагая натуральную параметризацию свободной границы (2), мы раскладываем  $f^*(z^2, z^3, t)$  и потенциал скоростей  $\Phi^*(z^1, z^2, z^3, t)$  (для поступательных движений носителя  $\omega = 0$ ) в ряды Фурье

$$f^* = z_{10} + \beta_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(z^2, z^3), \quad (21)$$

$$\Phi^* = v_0 \cdot r + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(t) \phi_n(z^1, z^2, z^3), \quad (22)$$

где  $z_{10} = h$ ,  $\{f_i(z^2, z^3)\}$  и  $\{\phi_n(z^1, z^2, z^3)\}$  составляют полный набор функций на невозмущенной поверхности  $\Sigma_0^*$  и в  $Q$  соответственно. Подставляя (21), (22) в вариационную задачу  $\delta W^* = 0$  и произведя выкладки, с точностью до тензорного вида совпадающие с выкладками работы Луковского [5] (предложенные для цилиндрических полостей), получаем следующую модальную систему:

$$\frac{d}{dt} A_n - \sum_k A_{nk} R_k = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

$$\sum_n \dot{R}_n \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2} \sum_{nk} \frac{\partial A_{nk}}{\partial \beta_i} R_n R_k + (\dot{v}_{01} - g_1) \lambda_{i1} \beta_i + (\dot{v}_{02} - g_2) \lambda_{i2} + (\dot{v}_{03} - g_3) \lambda_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (24)$$

связывающую обобщенные координаты  $R_n(t)$  и  $\beta_i(t)$ , включенные явно и неявно через интегралы

$$\begin{aligned} A_n &= \rho \int_D \left( \int_0^{f^*} \phi_n J^* dz^1 \right) dz^2 dz^3, \\ A_{nk} &= \rho \int_D \left( \int_0^{f^*} (\nabla^* \phi_n^*, \nabla^* \phi_k^*) J^* dz^1 \right) dz^2 dz^3, \\ \lambda_{i1} &= \int_{\Sigma_0^*} (f_i)^2 J^* dz^2 dz^3, \\ \lambda_{i2} &= \rho \int_{\Sigma_0^*} y(z^1, z^2, z^3) f_i J^* dz^2 dz^3, \\ \lambda_{i3} &= \rho \int_{\Sigma_0^*} z(z^1, z^2, z^3) f_i J^* dz^2 dz^3. \end{aligned} \quad (25)$$

**3. ЛИНЕЙНЫЕ ПЛЕСКАНИЯ**

Задача о плескании жидкости в неподвижном ( $v = \omega = 0$ ) цилиндрическом сосуде может быть линеаризована относительно гидростатического равновесия. При этом нормальное представление свободной границы является одним их

условий линеаризации. Процедура предполагает (в  $(z^1, z^2, z^3)$ -координатах)  $|\Phi^*| \sim |f^* - h| \sim |\nabla^* \Phi| \sim |\nabla^* f^*| = \epsilon \ll 1$  и редуцирует задачу до членов порядка  $O(\epsilon)$ . После этого мы постулируем  $\Phi^* = i\sqrt{\kappa} \phi^*(z^1, z^2, z^3) \exp(\sqrt{i\kappa}t)$ ;  $f^* = \exp(i\sqrt{\kappa}t) F(z^1, z^2)$  и получаем следующую спектральную задачу о собственных колебаниях со спектральным параметром  $\kappa$  на  $\Sigma_0^*$ :  $z^1 = h$ ,

$$\begin{aligned} \Delta^* \phi^* &= 0 \quad \text{в } Q_0^*; \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu^*} = 0 \quad \text{на } S_0^*, \\ \kappa \phi^* &= \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu^*} \quad \text{на } \Sigma_0^*; \quad \int_{\Sigma_0^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu^*} J^* dz^2 dz^3 = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $Q_0^* = (0, h) \times D$  – трансформированный невозмущенный объем,  $S_0^*$  – образ смоченных стенок бака в гидростатическом равновесии и  $\Sigma_0^*$  – трансформированная невозмущенная поверхность. Кроме того, мы обозначили

$$\begin{aligned} \Delta^* \varphi^* &= \Delta \varphi = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial z^i \partial z^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^*}{\partial z^k} \right), \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu^*} &= \nabla \phi \cdot \nu = g^{ij} \frac{\partial \phi^*}{\partial z^j} \nu_i, \end{aligned}$$

где  $\nu_i(z^1, z^2, z^3)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекции на ковариантные орты в системе  $(z^1, z^2, z^3)$  и  $\Gamma_{kl}^i$  – тензоры Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{\alpha k} \left( \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial z^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial z^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Если  $J^* > \epsilon > 0$  на замыкании  $\bar{Q}_0^*$ , спектральная задача (26) изоморфна хорошо известной спектральной задаче

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0 \quad \text{в } Q_0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } S_0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= \kappa \phi \quad \text{на } \Sigma_0; \quad \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} dy dz = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

сформулированной в Декартовой системе координат и  $\partial Q_0^* = S_0^* \cup \Sigma_0^*$ . В противном случае тензорная трансформация может иметь изолированные сингулярные точки и  $\partial Q^* \neq S^* \cup \Sigma_0^*$  (с ненулевой поверхностной мерой  $\mu(\partial Q^* \setminus S^*) \neq 0$ ). Это означает, что эллиптическая спектральная проблема (26) вырождается на  $\partial Q^* \setminus S^*$ , где нет граничного условия. Следующий параграф устанавливает спектральные теоремы для этого сингулярного случая.

**3.1. Спектральные теоремы**

**Теорема 1.** Пусть функции  $\psi, \varphi \in C^2(Q_0)$  интегрируемы вместе с квадратами градиентов и

$\psi^*, \varphi^* \in C^2(Q_0^*)$  их тензорные образы. Замыкание множества  $\{\psi^*\}$  в метрике, определяемой скалярным произведением

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle &= \int_{Q_0} ((\nabla \varphi, \nabla \psi) + \varphi \psi) dQ = \\ &= \int_{Q_0^*} ((\nabla^* \varphi^*, \nabla^* \psi^*) + \varphi^* \psi^*) J^* dQ^* = \end{aligned} \quad (28)$$

$$= \langle \varphi^*, \psi^* \rangle_*; \quad \|\psi^*\|^2 = \langle \psi^*, \psi^* \rangle_*$$

составляет Гильбертово пространство  $W_{J^*,2}^1(Q_0^*) = \{\phi^* : \|\phi^*\|_*^2 < \infty\}$ , которое изометрически эквивалентно Соболевскому пространству  $W_2^1(Q_0)$  и

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &= \int_{\Sigma_0} (\varphi \psi) dy dz = \\ &= \int_{\Sigma_0^*} (\varphi^* \psi^*) J^* dz^2 dz^3 = (\varphi^*, \psi^*)_*, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} [\varphi, \psi] &= \int_{Q_0} (\nabla \varphi, \nabla \psi) dQ = \\ &= \int_{Q_0^*} (\nabla^* \varphi^*, \nabla^* \psi^*) J^* dQ^* = [\varphi^*, \psi^*]_* \end{aligned} \quad (30)$$

Кроме того, для гладких функций  $\varphi^*, \psi^* \in W_{J^*,2}^1(Q_0^*)$

$$\int_{Q_0^*} (\varphi^* \Delta^* \psi^* + \nabla^* \varphi^* \nabla^* \psi^*) dQ^* = \int_{\partial Q_0^* \setminus G} \varphi^* \frac{\partial \psi^*}{\partial \nu^*} d\sigma, \quad (31)$$

где  $G = \{(z^1, z^2, z^3) : J^* = 0\}$ .

*Доказательство.* Два метрических пространства  $W_2^1(Q_0)$  и  $W_{J^*,2}^1(Q_0^*)$  являются изометрически эквивалентными как замыкания одного носителя в эквивалентных метриках. Формулы (28)-(30) верны для гладких функций их носителя, следовательно, метрические пространства имеют эквивалентные скалярные произведения (28).

Следующие выкладки доказывают формулу Грина (31):

$$\begin{aligned} &\int_{Q_0^*} (\varphi^* \Delta^* \psi^* + \nabla^* \varphi^* \nabla^* \psi^*) J^* dQ^* = \\ &= \int_{Q_0} (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \nabla \psi) dQ = \int_{\partial Q_0} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\sigma = \\ &= \int_{\partial Q_0 \setminus (J^*=0)} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\sigma = \\ &= \int_{\partial Q_0^* \setminus \{(z^1, z^2, z^3): J^*=0\}} \varphi^* \frac{\partial \psi^*}{\partial \nu^*} d\sigma. \end{aligned}$$

**Теорема 2** Спектральные граничные задачи (26) и (27) эквивалентны на допустимых компактных

носителях  $D_{T^*} = \{\phi^* \in W_{J^*,2}^1(Q_0^*) : \frac{\partial \phi^*}{\partial \nu^*} \in L_2(\Sigma_0^*); \int_{\Sigma_0^*} \phi^* J^* dz^2 dz^3 = 0\}$  и  $D_T = \{\phi \in W_2^1(Q_0) : \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L_2(\Sigma_0); \int_{\Sigma_0} \phi dy dz = 0\}$  соответственно.

*Доказательство.* Рассмотрим оператор  $T^*$ , определяемый задачей Дирихле-Неймана:

$$\Delta^* \varphi^* = 0 \text{ в } Q_0^*; \quad \varphi^* = u^* \text{ на } \Sigma_0^*; \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu^*} = 0 \text{ на } S_0^*,$$

так что  $T^* u^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu^*}|_{\Sigma_0^*}, \varphi^* \in D_{T^*}$ .

Спектральная проблема (26) имеет тогда следующую операторную постановку:

$$T^* u^* = \kappa u^*, \quad u^* \in \bar{L}_2(\Sigma_0^*) = \{\phi^*|_{\Sigma_0^*} : \phi^* \in D_{T^*}\}$$

и, вследствие (31), вариационную постановку

$$[\varphi^*, \eta^*]_* - \kappa (\varphi^*, \eta^*)_* = 0, \quad \eta^* \in D_{T^*}, \quad (32)$$

которая эквивалентна задаче

$$[\varphi, \eta] - \kappa (\varphi, \eta) = 0, \quad \eta \in D_T.$$

### 3.2. Спектральная задача для осесимметричных баков

Когда бак имеет осесимметричную форму, спектральная задача (27) может быть сведена к последовательности двумерных спектральных краевых задач в меридиональном сечении  $G$  с помощью перехода к цилиндрической системе координат

$$x = z_1, \quad y = z_2 \cos z_3, \quad z = z_2 \sin z_3, \quad (33)$$

совмещенного с отделением угловой переменной

$$\phi(z_1, z_2, z_3) = \psi_m(z_1, z_2) \frac{\cos}{\sin} m z_3, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

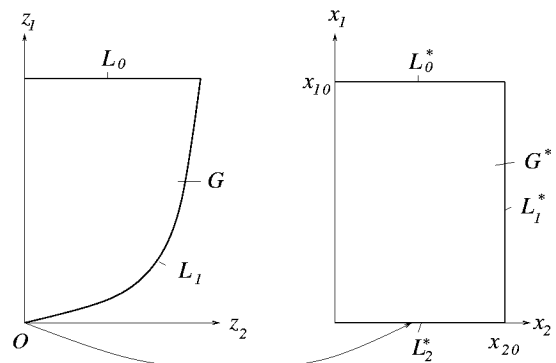


Рис. 3. Исходное и трансформированное меридиональные сечения

Эти спектральные задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_2} \left( z_2 \frac{\partial \psi_m}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_2} \left( z_2 \frac{\partial \psi_m}{\partial z_2} \right) - \frac{m^2}{z_2} \psi_m &= 0 \text{ в } G, \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial z_2} &= \kappa \psi_m \text{ на } L_0, \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} &= 0 \text{ на } L_1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ |\psi_m(z_1, 0)| < \infty; \quad \int_{L_0} \psi_0 z_2 dz_2, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $L_0$  и  $L_1$  – границы  $G$  как это показано на рис. 3 и  $\nu$  – внешняя нормаль к  $L_1$ , математическое выражение для которой совпадает с определенным выше для задачи (27). Граничные условия на  $z_2 = 0$  заменяются условием ограниченности, поскольку уравнение вырождается на  $x_2 = 0$ . Последнее интегральное условие (27) автоматически выполняется для  $m \neq 0$ , но не для  $m = 0$ . Теория спектральных задач (35) приведена в книгах Фещенко и др. [12] и Луковского, Барняка и Комаренко [6]. Спектры этих задач формируют вместе спектр исходной задачи (27).

Область  $G$  допускает тензорную трансформацию

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = \zeta(x_1, x_2), \quad (z_3 = x_3), \quad (36)$$

отображающую ее в прямоугольник  $G^*$ , как это показано на рис. 3, где  $L_0 \rightarrow L_0^*, L_1 \rightarrow L_1^*$ . Это преобразование может иметь сингулярность в угловых точках  $O$ , обусловленную отображением ее в границу  $L_2^*$ . Спектральная задача имеет тогда следующий вид:

$$\begin{aligned} p \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2q \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} + s \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \\ + \left( \frac{\partial s}{\partial x_2} + \frac{\partial q}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - cm^2 \psi = 0 \text{ в } G^*, \\ p \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + q \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \kappa \psi \text{ на } L_0^*, \\ s \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + q \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 \text{ на } L_1^*, \\ \int_0^{x_{20}} \psi_0 \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x^2} dx^2 = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} p(x^1, x^2) &= \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}; \quad q(x^1, x^2) = pa, \\ s(x^1, x^2) &= p(a^2 + b^2); \quad a(x^1, x^2) = \frac{\partial x_2}{\partial y}, \\ b(x^1, x^2) &= \frac{\partial x_1}{\partial \zeta}; \quad c(x^1, x^2) = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (38)$$

### 3.3. Спектральные задачи для кругового конического бака

Мы рассматриваем спектральную задачу для линейных плесканий в обратном круговом коническом баке с углом раствора  $2\alpha$ , изображенном на рис. 4. Начало координат  $O$  расположено в угловой точке, ось  $Ox$  направлена вверх и совмещена с осью симметрии. Стенки описываются уравнением  $x = \text{ctg } \alpha \sqrt{y^2 + z^2}$ . Невозмущенная свободная граница  $x = h = x_{10}$  имеет форму круга радиуса  $r_0 = htg \alpha$  и связывается с максимальной глубиной в статическом состоянии  $h$ .

Множество спектральных проблем (37), полученных из (27) с помощью результирующей тензорной трансформации (33) + (36)

$$x = x_1; \quad y = x_1 x_2 \cos x_3; \quad z = x_1 x_2 \sin x_3 \quad (39)$$

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - 2x_1 x_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2 (1 + x_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \\ + (1 + 2x_2^2) \frac{\psi}{\partial x_2} - \frac{m^2}{x_2} \psi = 0 \text{ в } G^*, \quad m = 0, \dots, \end{aligned} \quad (40)$$

$$x_1^2 x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - x_1 x_2^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \kappa x_1^2 x_2 \psi \text{ на } L_0^*, \quad (41)$$

$$x_2 (x_2^2 + 1) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_1 x_2^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 \text{ на } L_1^*, \quad (42)$$

$$\int_0^{x_{20}} \psi_0 x_2 dx_2 = 0, \quad (43)$$

где  $G^* = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq x_{01}, 0 \leq x_2 \leq x_{20}\}$ ,  $x_{20} = \text{tg } \alpha$  и  $a = -\frac{x_2}{x_1}$ ;  $b = \frac{1}{x_1}$ ;  $p = x_1^2 x_2$ ;  $q = -x_1 x_2^2$ ,  $s = x_2 (x_2^2 + 1)$ ;  $c = \frac{1}{x_2}$ . (Некоторые вспомогательные формулы приведены в Приложении А).

## 4. МОДАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В КРУГОВОМ КОНИЧЕСКОМ БАКЕ

### 4.1. Численно-аналитические решения спектральных задач

Если  $v_k^{(m)}(x_2)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} x_2 (1 + x_2^2) v_k'' + (1 + 2x_2^2 - 2kx_2^2) v_k' + [k(k-1)x_2 - \\ - \frac{m^2}{x_2}] v_k = 0, \quad |v_k(0)| < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (44)$$

$w_k^{(m)} = x_1^k v_k^{(m)}(x_2)$  – аналитические решения уравнения (40). Когда  $k$  – целое число, множество



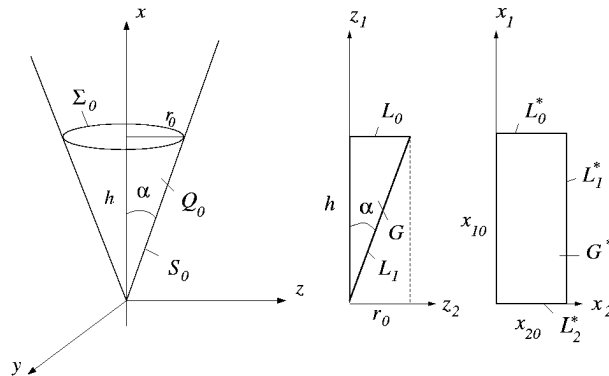


Рис. 4. Эскиз конического бака, его меридионального сечения  $G$  и трансформированной области  $G^*$ ;  $x_{10} = h, x_{20} = \text{tg } \alpha$ .

$\{v_k^{(m)}\}$  состоит из полиномов, вычисляемых по следующим рекурсивным формулам:

$$\begin{aligned} v_0^{(0)} &= 1; \quad v_1^{(0)} = 1; \quad v_1^{(1)} = x_2, \\ (k+m+1)v_{k+1}^{(m)} &= \\ &= (2k+1)v_k^{(m)} - (k-m)(1+x_2^2)v_{k-1}^{(m)}, \\ (k+m+1)x_2v_k^{(m+1)} &= \\ &= 2(m+1)[(1+x_2^2)v_{k-1}^{(m)} - v_k^{(m)}], \\ \frac{dv_k^{(m)}}{dx_2} &= \frac{1}{x_2}[kv_k^{(m)} - (k-m)v_{k-1}^{(m)}]. \end{aligned}$$

Мы представляем приближенные решения спектральной задачи (40)-(42) в виде суммы по  $w_k^{(m)}$ :

$$\psi_m = \sum_{k=m}^q a_k^{(m)} w_k^{(m)}(x_1, x_2) = \sum_{k=m}^q a_k^{(m)} x_1^k v_k^{(m)}(x_2), \quad (45)$$

где условие сохранения объема (43) удовлетворяется путем подстановки  $v_k^{(0)} = v_k^{(0)} - c_k$ ,

$$c_k = \frac{2}{x_{20}^2} \int_0^{x_{20}} w_k^{(0)}(x_{10}, x_2) x_2 dx_2 = \frac{x_{10}^k v_{k+1}^{(1)}(x_{20})}{x_{20}}.$$

Неизвестные коэффициенты  $a_k^{(m)}$  могут быть найдены из вариационного уравнения

$$\begin{aligned} J = \int_{G^*} & \left[ p \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} \right)^2 + 2q \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2} + s \left( \frac{\psi_m}{\partial x_2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{m^2}{x_2} \psi_m^2 \right] dx_1 dx_2 - \kappa \int_{L_0^*} p \psi_m^2 dx_2, \quad (46) \end{aligned}$$

выведенного из (32). Оно преобразует выражения (40)-(42) к спектральной матричной задаче

$$\det |\alpha_{ij}^{(m)} - \kappa_m \beta_{ij}^{(m)}| = 0, \quad (47)$$

Табл. 1. Приближенное  $\kappa_{mn}$  versus  $q$  в (45). Коническая область угла расвора  $2\alpha = \pi/2$ .

$q$	$\kappa_{01}$	$\kappa_{11}$	$\kappa_{12}$	$\kappa_{21}$	$\kappa_{22}$
3	7.1999	1.0	16.960	1.76754	25.40706
4	3.153	1.0	5.4313	1.76749	7.71464
5	2.93888	1.0	4.5837	1.76738	6.09618
6	2.93077	1.0	4.5143	1.76738	5.91582
7	2.92728	1.0	4.4915	1.76738	5.83602
8	2.92659	1.0	4.4839	1.76738	5.83160
9	2.92657	1.0	4.4831	1.76838	5.82743
10	2.92657	1.0	4.4830	1.76838	5.82693
11	2.92657	1.0	4.4830	1.76838	5.82689

где  $\alpha_{ij}^{(m)}$  и  $\beta_{ij}^{(m)}$  (принимая во внимание  $\frac{\partial w_k^{(m)}}{\partial x_1} = \frac{k}{x_1} w_k^{(m)}$ ) может быть вычислено по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(m)} &= h^{i+j+1} \left[ (i-m) \int_0^{x_{20}} v_{i-1}^{(m)} v_j^{(m)} x_2 dx_2 + \right. \\ & \left. + \frac{[i v_i^{(m)} - (i-m)(1+x_{20}^2) v_{i-1}^{(m)}] v_j^{(m)} |_{x_2=x_{20}}}{i+j+1} \right], \quad (48) \end{aligned}$$

$$\beta_{ij}^{(m)} = h^{i+j+2} \int_0^{x_{20}} v_i^{(m)} v_j^{(m)} x_2 dx_2. \quad (49)$$

Матричная спектральная задача (47) имеет множество собственных значений, число которых зависит от размерности  $q$  в анзатце (45). Для любого  $m$  эти собственные значения  $\kappa_{mn}$  будут упорядочены в порядке возрастания по индексу  $n = 1, 2, \dots$ . Собственные значения и собственные вектора (47) отвечают собственным частотам ( $\sigma_{mn} = \sqrt{g \kappa_{mn}}$ ) и собственным модам ( $\psi_{mn}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=m}^q a_k^{(mn)}$ )

$w_k^{(mn)}(x_1, x_2) \cos mx_3$ ), определяемым спектральной задачей (26). Поверхностные собственные формы вычисляются по формуле

$$f_{mn}(x_2, x_3) = \frac{\sigma_{mn}}{g} \psi_{mn}(x_{10}, x_2, x_3). \quad (50)$$

Семейство функций  $\{f_{mn}\}$  является полным в  $L_2(\Sigma_0^*)$ . Ряды Фурье по  $f_{mn}$  с коэффициентами, зависящими от времени (21), определяют эволюцию свободной границы. Потенциал скоростей может быть разложен в ряды Фурье по  $\psi_{mn}(x_1, x_2, x_3)$ .

Предложенный алгоритм определения собственных частот и форм является робастным и численно эффективным. Его сходимость продемонстрирована в табл. 1. Сходимость, по всей вероятности, может быть улучшена, если принять во внимание, что граничное условие (41) допускает разделение переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Это добавляет к уравнению (44) следующее граничное условие:

$$v'(x_{20}) = k \frac{x_{20}}{1 + x_{20}^2} v(x_{20}). \quad (51)$$

Уравнение (44) с граничным условием (51) составляют спектральную задачу со спектральным параметром  $k$  в уравнении и граничном условии одновременно. Здесь  $k$  не является фиксированным целым числом, и базис  $w_k^{(m)}(x_1, x_2)$  в решении (45) удовлетворяет условию Неймана вдоль стенок бака. Нелинейная модальная теория Луковского [5] требует выполнения такого условия под и над линией контакта жидкости в невозмущенном состоянии.

#### 4.2. Нелинейная модальная система

Мы используем пятимодовый анзац Луковского [5]

$$f^*(x_2, x_3, t) = x_{10} + f(x_2, x_3, t) = x_{10} + \beta_0(t) + p_0(t)f_0(x_2) + [r_1(t) \sin x_3 + p_1(t) \cos x_3]f_1(x_2) + [r_2(t) \sin 2x_3 + p_2(t) \cos 2x_3]f_2(x_2); \quad (52)$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = P_0(t)\psi_0(x_1, x_2) + [R_1(t) \sin x_3 + P_1(t) \cos x_3]\psi_1(x_1, x_2) + [R_2(t) \sin 2x_3 + P_2(t) \cos 2x_3]\psi_2(x_1, x_2) \quad (53)$$

для того, чтобы приблизить поверхность и потенциал скоростей. Гипотеза пятимодового анзаца была подтверждена для плесканий в круговом цилиндрическом баке. Аргументация такого выбора базируется на настройке Моисеева [9], которая устанавливает предпочтение для низших собственных стоячих волн (модальных функций  $r_1, R_1$

и  $p_1, P_1$ ). Другие модальные функции в анзаце имеют второй порядок малости, т.е.

$$\begin{aligned} r_1 \sim R_1 \sim p_1 \sim P_1 \sim \epsilon^{1/3}, \\ p_0 \sim P_0 \sim r_2 \sim R_2 \sim p_2 \sim P_2 \sim \epsilon^{2/3}, \end{aligned} \quad (54)$$

где  $\epsilon$  – отношение амплитуды гармонических горизонтальных колебаний (sway) сосуда к  $\max(x_{10}, x_{20})$ . В соответствии с настройкой Моисеева, секулярное уравнение должно быть асимптотически усечено до членов  $O(\epsilon)$ . После подстановки уравнений (52) и (53) в общую модальную систему (23)-(24) и учета (54) мы получаем в терминах  $O(\epsilon)$  следующую нелинейную модальную систему, связывающую  $p_1, r_1, p_0, r_2$  и  $p_2$  (вывод в некоторых деталях представлен в Приложении В):

$$\begin{aligned} \mu_1(\ddot{r}_1 + \sigma_1^2 r_1) + d_1(r_1^2 \ddot{r}_1 + r_1 \dot{r}_1^2 + r_1 p_1 \ddot{p}_1 + r_1 \dot{p}_1^2) + \\ + d_2(p_1^2 \ddot{r}_1 + 2p_1 \dot{r}_1 \dot{p}_1 - r_1 p_1 \ddot{p}_1 - 2r_1 \dot{p}_1^2) - \\ - d_3(p_2 \ddot{r}_1 - r_2 \ddot{p}_1 + \dot{r}_1 \dot{p}_2 - \dot{p}_1 \dot{r}_2) + \\ + d_4(r_1 \ddot{p}_2 - p_1 \ddot{r}_2) + d_5(p_0 \ddot{r}_1 + \dot{r}_1 \dot{p}_0) + d_6 r_1 \ddot{p}_0 + \\ + w_1 d_1^k r_1 (r_1^2 + p_1^2) + 2d_2^k w_1 (p_1 r_2 - r_1 p_2) + \\ + 2d_3^k w_1 r_1 p_0 + w_2 (2d_5^k r_1 p_1 + d_6^k r_2) + w_3 [\lambda + \\ + d_4^k p_0 + d_5^k (p_1^2 + 3r_1^2) - d_6^k p_2 + d_7^k p_0^2] = 0; \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \mu_1(\ddot{p}_1 + \sigma_1^2 p_1) + d_1(p_1^2 \ddot{p}_1 + p_1 \dot{p}_1^2 + r_1 p_1 \ddot{r}_1 + p_1 \dot{r}_1^2) + \\ + d_2(r_1^2 \ddot{p}_1 + 2r_1 \dot{r}_1 \dot{p}_1 - r_1 p_1 \ddot{r}_1 - 2p_1 \dot{r}_1^2) + \\ + d_3(p_2 \ddot{p}_1 + r_2 \ddot{r}_1 + \dot{r}_1 \dot{r}_2 + \dot{p}_1 \dot{p}_2) - \\ - d_4(p_1 \ddot{p}_2 + r_1 \ddot{r}_2) + d_5(p_0 \ddot{p}_1 + \dot{p}_1 \dot{p}_0) + d_6 p_1 \ddot{p}_0 + \\ + w_1 d_1^k p_1 (r_1^2 + p_1^2) + 2d_2^k w_1 (r_1 r_2 + p_1 p_2) + \\ + 2d_3^k w_1 p_1 p_0 + w_3 (2d_5^k r_1 p_1 + d_6^k r_2) + w_2 [\lambda + \\ + d_4^k p_0 + d_5^k (r_1^2 + 3p_1^2) - d_6^k p_2 + d_7^k p_0^2] = 0; \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \mu_0(\ddot{p}_0 + \sigma_0^2 p_0) + d_6(r_1 \ddot{r}_1 + p_1 \ddot{p}_1) + d_8(\dot{r}_1^2 + \dot{p}_1^2) + \\ + w_1 d_3^k (r_1^2 + p_1^2) + w_2 [d_4^k p_1 + 2d_7^k p_1 p_0 + \\ + d_9 p_1 (r_1^2 + p_1^2) + d_{12}^k (r_1 r_2 p_1 p_2)] + w_3 [d_4^k r_1 + \\ + 2d_7^k r_1 p_0 + d_9^k r_1 (r_1^2 p_1^2) + d_{12}^k (p_1 r_2 - r_1 p_2)] = 0; \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \mu_2(\ddot{r}_2 + \sigma_2^2 r_2) - d_4(p_1 \ddot{r}_1 + r_1 \ddot{p}_1) - 2d_7 \dot{r}_1 \dot{p}_1 + \\ + 2w_1 d_2^k r_1 p_1 + w_2 [d_6^k r_1 + 2d_8^k p_1 r_2 + 2d_{10}^k r_1 p_1^2 + \\ + d_{11}^k r_1 (r_1^2 + p_1^2) + d_{12}^k r_1 p_0] + w_3 [d_6^k p_1 + 2d_8^k r_1 r_2 + \\ + 2d_{10}^k r_1^2 p_1 + d_{11}^k p_1 (r_1^2 + p_1^2) + d_{12}^k p_1 p_0] = 0; \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \mu_2(\ddot{p}_2 + \sigma_2^2 p_2) - d_4(r_1 \ddot{r}_1 - p_1 \ddot{p}_1) - d_7(\dot{r}_1^2 - \dot{p}_1^2) - \\ - w_1 (d_2^k r_1^2 - p_1^2) + w_2 [d_6^k p_1 + 2d_8^k p_1 p_2 + \\ + d_{10}^k (p_1^2 - r_1^2) + d_{11}^k p_1 (r_1^2 + p_1^2) + d_{12}^k p_1 p_0] + \\ + w_3 [-d_6^k r_1 + 2d_8^k r_1 p_2 + d_{10}^k r_1 (p_1^2 - r_1^2) - \\ - d_{11}^k r_1 (r_1^2 + p_1^2) - d_{12}^k r_1 p_0] = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь коэффициенты  $\mu_i, d_i$  являются функциями  $x_{10}$  и  $x_{20}$ , и  $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t)) = \dot{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{g}$  – вектор кажущегося ускорения.

Уравнения (55)-(59) отличаются от модальных уравнений, выведенных Луковским [5] для прямого кругового цилиндра. Они содержат дополнительные члены, связанные с "геометрической" нелинейностью.

## ВЫВОДЫ

1. Развивается методика неконформных отображений Луковского [3]. Определен класс допустимых тензорных трансформаций. Он отображает полость бака в искусственный цилиндрический объем. Это делает возможным представить уравнение свободной поверхности в виде, разрешенном относительно вертикальной координаты, и разложить это уравнение в ряд Фурье по собственным формам, трансформированным в данную криволинейную систему. Коэффициенты Фурье предполагаются зависимыми от времени функциями.

2. Допустимые тензорные трансформации обязательно имеют сингулярности при отображении нижних (верхних) угловых точек в искусственное дно (потолок). Построена математическая теория спектральных задач теории линейных колебаний, рассмотренных в искусственной области. Она учитывает возможное вырождение уравнения Бельтрами-Лапласа и граничных условий на части границы области, являющихся прообразами сингулярных точек. Спектральные и вариационные теоремы устанавливают, что исходная и трансформированная задачи изоморфно эквивалентны в подходящих весовых пространствах Соболева.

3. Хорошо известная бесконечномерная модальная система Луковского [5] (выведенная для плесканий жидкости в цилиндрических сосудах) сохраняет инвариантную структуру по отношению к введенным допустимым тензорным трансформациям, если сосуд совершает поступательные движения. Следовательно, она может быть использована для вывода многомерных модальных систем, учитывающих сложные межмодальные взаимодействия низших и ряда высших форм, если существует высокоточный алгоритм для определения высших собственных форм в криволинейной параметризации.

4. Спектральная проблема о собственных формах плесканий в круговом коническом баке не имеет аналитических решений как в декартовой, так и в криволинейных параметризациях. Трансформированное уравнение Лапласа допускает, однако,

полное множество полиномиальных решений. Используя их как базис, мы следуем доказанной вариационной формулировке, чтобы получить алгоритм для приближения высших форм. Этот алгоритм является предпочтительней, чем прямые методы Бауэра, Луковского и Бауэра и Эйделя. Он робастный и численно эффективный.

5. После подсчета собственных форм мы используем анзац Луковского для вывода многомерных модальных систем нелинейных плесканий жидкости в конических баках. Этот анзац включает пять низших собственных форм и обусловлен асимптотической настройкой Моисеева. Эта асимптотика предполагает две связанных доминанты, которые отличаются только азимутальным вращением на  $\frac{1}{2}\pi$  и имеют равные собственные частоты. Они нелинейно связаны как непосредственно, так и через вторичные формы. Следующие три формы представляют из себя три наиболее энергетически важных вторичных формы. Выведенная модальная система связывает их нелинейно. Она может быть позднее применима для подсчета установившихся и переходных волн, обусловленных различными "sway" возбуждениями со средней частотой в частотном диапазоне минимального тона.

## Благодарность

Работа авторов была частично поддержана немецким исследовательским обществом (Deutsche Forschungsgemeinschaft, DFG).

## Приложение А

Якобиан  $J^* = x_1^2 x_2$ . Компоненты метрических тензоров  $g_{ij}$  и  $g^{ij}$

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + x_2^2; & g_{12} &= g_{21} = x_1 x_2; & g_{13} &= g_{31} = 0, \\ g_{22} &= x_1^2; & g_{23} &= g_{32} = 0; & g_{33} &= x_1^2 x_2^2; \\ g^{11} &= 1; & g^{12} &= g^{21} = -\frac{x_2}{x_1}; & g^{13} &= g^{31} = 0, \\ g^{22} &= \frac{1 + x_2^2}{x_1^2}; & g^{23} &= g^{32} = 0; & g^{33} &= \frac{1}{x_1^2 x_2^2}. \end{aligned}$$

## Приложение В

Мы переписываем (45) в виде

$$\psi_m = x_1^m \sum_{i=1}^{p_m} x_1^i b_i^{(m)}(x_2), \quad (m = 0, 1, 2), \quad (60)$$

где  $b_i^{(m)} = a_i^{(m)} + m v_{i+m}^{(m)}(x_2)$ ,  $p_m = q_m - m$ .

Производные по  $x_1$  и  $x_2$  и произведения  $\psi_m$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \psi_{mx_1} &= x_1^{\alpha_m} \sum_{i=0}^{r_m} x_1^i C_i^{(m)}(x_2), \\ C_i^{(0)}(x_2) &= (i+1)a_{i+1}^{(0)}v_{i+1}^{(0)}(x_2), \\ C_i^{(1)}(x_2) &= (i+1)a_{i+1}^{(1)}v_{i+1}^{(1)}(x_2), \\ C_i^{(2)}(x_2) &= (i+2)a_{i+2}^{(2)}v_{i+2}^{(2)}(x_2), \\ (r_0 &= q_0 - 1, \quad r_1 = q_1 - 1, \quad r_2 = q_2 - 2), \\ \alpha_m &= \begin{cases} 0 & \text{for } m = 0, 1 \\ 1 & \text{for } m = 2 \end{cases}, \\ \psi_{mx_2} &= x_1^m \sum_{i=1}^{p_m} x_1^i d_i^{(m)}, \\ d_i^{(m)} &= a_{m+i}^{(m)} \frac{d}{dx_2} v_{m+i}^{(m)}(x_2); \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \psi_m \psi_n &= x_1^{m+n} \sum_{i=0}^{p_m+p_n} x_1^i b_i^{(m,n)}(x_2), \\ \psi_{mx_1} \psi_{nx_1} &= x_1^{\alpha_m+\alpha_n} \sum_{i=0}^{r_m+r_n} x_1^i C_i^{(m,n)}(x_2), \\ \psi_{mx_1} \psi_{nx_2} &= x_1^{\alpha_m+n} \sum_{i=0}^{r_m+p_n} x_1^i l_i^{(m,n)}(x_2), \\ \psi_{mx_2} \psi_{nx_2} &= x_1^{m+n} \sum_{i=0}^{p_m+p_n} x_1^i d_i^{(m,n)}(x_2) \end{aligned} \quad (62)$$

где  $b_i^{(m,n)}(x_2), C_i^{(m,n)}(x_2), l_i^{(m,n)}(x_2), d_i^{(m,n)}(x_2)$  вычисляются посредством  $b_i^{(m)}(x_2), C_i^{(m)}(x_2), l_i^{(m)}(x_2), d_i^{(m)}(x_2)$ .

Модальная система (23)-(24) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \dot{A}_n - \sum_{k=1}^5 A_{nk} Z_k &= 0 \quad (n = 1, \dots, 5), \quad (63) \\ \sum_{k=1}^5 \dot{Z}_n \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 \sum_{k=1}^5 \frac{\partial A_{nk}}{\partial \beta_i} Z_n Z_k + \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial l_j}{\partial \beta_j} &= 0, \quad (64) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_0(t) &= Z_1(t); \quad R_1(t) = Z_2(t); \quad P_1(t) = Z_3(t), \\ R_2(t) &= Z_4(t); \quad P_2(t) = Z_5(t); \\ \varphi_1 &= \psi_0; \quad \varphi_2 = \psi_1 \sin x_3; \quad \varphi_3 = \psi_1 \cos x_3, \\ \varphi_4 &= \psi_2 \sin 2x_3; \quad \varphi_5 = \psi_2 \cos 2x_3 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= p_0(t); \quad \beta_2(t) = r_1(t); \quad \beta_3(t) = p_1(t), \\ \beta_4(t) &= r_2(t); \quad \beta_5(t) = p_2(t). \end{aligned} \quad (65)$$

Условие сохранения объема с точностью до  $O(\epsilon)$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{x_{20}} (\alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \alpha_3 f^3) x_2 dx_2 dx_3 = 0, \quad (66)$$

где  $\alpha_1 = x_{10}^2, \alpha_2 = x_{10}, \alpha_3 = \frac{1}{3}$ , и, следовательно,

$$\begin{aligned} \beta_0(t) &= k_0 p_0^2 + k_1 (r_1^2 + p_1^2) + k_2 (r_2^2 + p_2^2) + \\ &+ k_3 (r_2^2 + p_2^2) + k_4 (\frac{1}{2} p_2 p_1^2 - \frac{1}{2} p_2 r_1^2 + r_1 r_2), \end{aligned} \quad (67)$$

с

$$\begin{aligned} k_0 &= -\frac{\alpha_2 l_{00}}{S_0}; \quad k_1 = -\frac{\alpha_2 l_{11}}{S_0}; \quad k_2 = -\frac{\alpha_2 l_{22}}{S_0}, \\ k_3 &= -\frac{l_{011}}{S_0}; \quad k_4 = -\frac{l_{211}}{S_0}; \\ \alpha_2 &= x_{10}; \quad S_0 = \pi x_{10}^2 x_{20}^2, \\ l_{11} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 f_1^2 dx_2; \quad l_{00} = 2\pi \int_0^{x_{20}} x_2 f_0^2 dx_2, \\ l_{22} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 f_2^2 dx_2; \quad l_{011} = \pi \int_0^{x_{20}} f_0 f_1^2 x_2 dx_2, \\ l_{211} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2 f_2 f_1^2 dx_2; \quad l_4 = \pi \int_0^{x_{20}} x_2 f_1^4 dx_2. \end{aligned}$$

Компоненты вектора  $l$  (положение центра масс)

$$\begin{aligned} l_1 &= \rho \int_0^{x_{20}} \int_0^{2\pi} \int_0^{x_{10}+f} x_1^3 x_2 dx_1 dx_3 dx_2, \\ l_2 &= \rho \int_0^{x_{20}} \int_0^{2\pi} \int_0^{x_{10}+f} x_1^3 x_2^2 \cos x_3 dx_1 dx_3 dx_2, \\ l_3 &= \rho \int_0^{x_{20}} \int_0^{2\pi} \int_0^{x_{10}+f} x_1^3 x_2^2 \sin x_3 dx_1 dx_3 dx_2. \end{aligned}$$

С точностью до  $O(\epsilon)$  мы имеем

$$\begin{aligned} l_1 &= \rho [l_1^{(0)} + l_1^{(1)}(r_1^2 + p_1^2) + l_1^{(2)} p_0^2 + l_1^{(3)}(r_2^2 + p_2^2) + \\ &+ l_1^{(4)}(r_1^2 + p_1^2)^2 + l_1^{(5)}(\frac{1}{2} p_1^2 p_2 - \frac{1}{2} r_1^2 p_2 + r_1 p_1 r_2^2) + \\ &+ l_1^{(6)} p_0 (r_1^2 + p_1^2)]; \\ l_2 &= l_2^{(1)} p_1 + l_2^{(2)} p_1 p_0 + l_2^{(3)} p_1 (r_1^2 + p_1^2) + \\ &+ l_2^{(4)} (r_1 r_2 + p_1 p_2) + l_2^{(5)} p_1 p_0^2 + l_2^{(6)} p_1 (r_2^2 + p_2^2) + \\ &+ l_2^{(7)} p_1 p_0 (r_1^2 + p_1^2) + l_2^{(8)} p_1 (\frac{1}{2} p_2 p_1^2 - \frac{1}{2} p_2 r_1^2 + r_1 p_1 r_2) + \\ &+ l_2^{(9)} (r_1 r_2 + p_1 p_2^2) (r_1^2 + p_1^2) + l_2^{(10)} p_0 (r_1 r_2 + p_1 p_2), \\ l_3 &= l_3^{(1)} r_1 + l_3^{(2)} p_0 r_1 + l_3^{(3)} r_1 (r_1^2 + p_1^2) + l_3^{(4)} (p_1 r_2 - \\ &- r_1 p_2) + l_3^{(5)} r_1 p_0^2 + l_3^{(6)} r_1 (r_2^2 + p_2^2) + l_3^{(7)} r_1 p_0 (r_1^2 + \\ &+ p_1^2) + l_3^{(8)} r_1 (\frac{1}{2} p_2 p_1^2 - \frac{1}{2} p_2 r_1^2 + r_1 p_1 r_2) + \\ &+ l_3^{(9)} (r_1^2 p_1^2) (p_1 r_2 - r_1 p_2) + l_3^{(10)} p_0 (p_1 r_2 - r_1 p_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 l_1^{(0)} &= \frac{\pi}{4}x_{10}^4x_{20}^2; \quad l_1^{(1)} = \frac{1}{2}x_{10}^2l_{11}; \quad l_1^{(2)} = \frac{1}{2}x_{10}^2l_{00}, \\
 l_1^{(3)} &= \frac{1}{2}x_{10}^2l_{22}; \quad l_1^{(4)} = \frac{3}{16}l_4 - \frac{3x_{10}^2}{2S_0}l_{11}^2, \\
 l_1^{(5)} &= 2x_{10}l_{211}; \quad l_1^{(6)} = 2x_{10}l_{011}, \\
 l_2^{(1)} &= l_3^{(1)} = \rho x_{10}^3S_1; \quad l_2^{(2)} = l_3^{(2)} = 3\rho x_{10}^2S_{01}, \\
 l_2^{(3)} &= l_3^{(3)} = 3\rho(x_{10}^2k_1S_1 + \frac{1}{4}x_{10}S_{13}), \\
 l_2^{(4)} &= l_3^{(4)} = \frac{3}{2}\rho x_{10}^2S_{12}, \\
 l_2^{(5)} &= l_3^{(5)} = 3\rho(x_{10}^2k_0S_1 + x_{10}S_{102}), \\
 l_2^{(6)} &= l_3^{(6)} = 3\rho(x_{10}^2k_2S_1 + \frac{1}{2}x_{10}S_{122}), \\
 l_2^{(7)} &= l_3^{(7)} = 3\rho(x_{10}^2k_3S_1 + 2k_1x_{10}S_{01} + \frac{1}{4}S_{013}), \\
 l_2^{(8)} &= l_3^{(8)} = 3\rho x_{10}^2k_4S_1; \quad l_2^{(9)} = l_3^{(9)} = 3\rho x_{10}k_1S_{12}, \\
 l_2^{(10)} &= l_3^{(10)} = 3\rho x_{10}S_{012}; \\
 S_1 &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_1 dx_2; \quad S_{01} = \pi \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_0 f_1 dx_2, \\
 S_{13} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_1^3 dx_2; \quad S_{12} = \pi \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_2 f_1 dx_2, \\
 S_{102} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_0^2 f_1 dx_2; \quad S_{122} = \pi \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_2^2 f_1 dx_2, \\
 S_{013} &= \pi \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_0 f_1^3 dx_2; \quad S_{012} = \pi \int_0^{x_{20}} x_2^2 f_0 f_1 f_2 dx_2.
 \end{aligned}$$

Асимптотическое разложение (25) дает с точностью до  $O(\epsilon)$ :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= a_0 + a_4(r_1^2 + p_1^2) + a_{17}p_0; \quad A_2 = a_5r_1 + \\
 &+ a_6r_1(r_1^2 + p_1^2) + a_{18}(p_1r_2 - r_1p_2) + a_{14}r_1p_0, \\
 A_3 &= a_5p_1 + a_6p_1(p_1^2 + r_1^2) + a_{18}(r_1r_2 + p_1p_2) + a_{14}p_1p_0, \\
 A_4 &= a_{20}r_2 - 2a_7r_1p_1; \quad A_5 = a_{20}p_2 + a_7(r_1^2 - p_1^2); \\
 A_{11} &= 2a_1 + 2a_9(r_1^2 + p_1^2) + 2a_{21}p_0; \quad A_{12} = a_{15}r_1 + \\
 &+ a_{26}(p_1r_2 - r_1p_2) + a_{23}r_1p_0 + a_{30}r_1(r_1^2 + p_1^2), \\
 A_{13} &= a_{15}p_1 + a_{26}(r_1r_2 + p_1p_2) + a_{23}p_1p_0 + a_{30}p_1(r_1^2 + p_1^2), \\
 A_{14} &= -2a_{16}r_1p_1 + a_{24}r_2; \quad A_{15} = a_{16}(r_1^2 - p_1^2) + a_{24}p_2, \\
 A_{22} &= 2a_{10} + 2a_{11}r_1^2 + 2a_{12}p_1^2 + 2a_{22}p_0 - 2a_{19}p_2, \\
 A_{23} &= a_8r_1p_1 + 2a_{19}r_2; \quad A_{24} = a_3p_1 + a_{27}r_1r_2 + \\
 &+ a_{28}p_0p_1 + a_{29}p_1p_2 + a_{31}r_1^2p_1 + a_{32}p_1^3, \\
 A_{25} &= -a_3r_1 + a_{27}r_1p_2 - a_{28}p_0r_1 - a_{29}p_1r_2 - a_{33}p_1^2r_1 - \\
 &- a_{34}r_1^3; \quad A_{33} = 2a_{10} + 2a_{11}p_1^2 + 2a_{12}r_1^2 + 2a_{19}p_2 + 2a_{22}p_0, \\
 A_{34} &= a_3r_1 + a_{28}r_1p_0 - a_{29}r_1p_2 + a_{27}p_1r_2 + a_{32}r_1^3 + a_{31}r_1p_1^3, \\
 A_{35} &= a_3p_1 + a_{27}p_1p_2 + a_{28}p_0p_1 + a_{29}r_1r_2 + a_{34}p_1^3 + \\
 &+ a_{33}p_1^3 + a_{33}p_1r_1^2; \quad A_{44} = 2a_2 + 2a_{13}(r_1^2p_1^2) + 2a_{25}p_0, \\
 A_{45} &= 0; \quad A_{55} = A_{44}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_{34}$  из этих выражений определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 2\pi\rho \int_0^{x_{20}} B_0^{(0)} x_2 dx_2; \quad a_1 = \pi\rho \int_0^{x_{20}} F_0^{(0,0)}(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_2 &= \frac{\pi}{2}\rho \int_0^{x_{20}} (F_0^{(2,2)}(x_2) + \frac{4}{x_2^2} B_0^{(2,2)}(x_2)) x_2 dx_2, \\
 a_3 &= \frac{\pi}{2}\rho \int_0^{x_{20}} (F_1^{(1,2)}(x_2) + \frac{2}{x_2^2} B_1^{(1,2)}(x_2)) f_1(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_4 &= \pi\rho \int_0^{x_{20}} B_0^{(2)} f_1^2(x_2) x_2 dx_2 + 2\pi\rho k_1 \int_0^{x_{20}} B_0^{(1)} x_2 dx_2, \\
 a_5 &= \pi\rho \int_0^{x_{20}} B_1^{(1)} f_1(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_6 &= \rho\pi \left( \frac{3}{4} \int_0^{x_{20}} B_1^{(3)}(x_2) f_1^3(x_2) x_2 dx_2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2k_1 \int_0^{x_{20}} B_1^{(2)}(x_2) f_1(x_2) x_2 dx_2 \right), \\
 a_7 &= -\frac{\pi}{2}\rho \int_0^{x_{20}} B_2^{(2)}(x_2) f_1^2(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_8 &= \frac{\pi}{2}\rho \int_0^{x_{20}} (F_2^{(1,1)}(x_2) - \frac{1}{x_2} B_2^{(1,1)}(x_2)) f_1^2(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_9 &= \frac{\pi}{2}\rho \int_0^{x_{20}} F_2^{(0,0)}(x_2) f_1^2(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_{10} &= \frac{\pi}{2}\rho \int_0^{x_{20}} (F_0^{(1,1)}(x_2) + \frac{1}{x_2^2} B_0^{(1,1)}(x_2)) x_2 dx_2, \\
 a_{11} &= \frac{\pi}{2}k_1\rho \int_0^{x_{20}} [F_1^{(1,1)}(x_2) + \frac{1}{x_2^2} B_1^{(1,1)}(x_2)] x_2 dx_2 + \\
 &+ \frac{3}{8}\pi\rho \int_0^{x_{20}} [F_2^{(1,1)}(x_2) + \frac{1}{3x_2^2} B_2^{(1,1)}] f_1^2(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_{12} &= \frac{\pi}{2}k_1\rho \int_0^{x_{20}} [F_1^{(1,1)}(x_2) + \frac{1}{x_2^2} B_1^{(1,1)}(x_2)] x_2 dx_2 + \\
 &+ \frac{3}{8}\pi\rho \int_0^{x_{20}} [\frac{1}{3}F_2^{(1,1)}(x_2) + \frac{1}{x_2^2} B_2^{(1,1)}] f_1^2(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_{13} &= \frac{\pi}{4}\rho \int_0^{x_{20}} [F_2^{(2,2)}(x_2) + \frac{4}{x_2^2} B_2^{(2,2)}(x_2)] f_2^2(x_2) x_2 dx_2 + \\
 &+ \frac{1}{2}\pi\rho k_1 \int_0^{x_{20}} [F_1^{(2,2)}(x_2) + \frac{4}{x_2^2} B_1^{(2,2)}] x_2 dx_2, \\
 a_{14} &= 2\pi\rho \int_0^{x_{20}} B_1^{(2)}(x_2) f_0(x_2) f_1(x_2) dx_2, \\
 a_{15} &= \pi\rho \int_0^{x_{20}} F_1^{(0,1)} f_1(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_{16} &= -\frac{\pi}{2}\rho \int_0^{x_{20}} F_2^{(0,2)}(x_2) f_1^2(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_{17} &= 2\pi\rho \int_0^{x_{20}} B_0^{(1)}(x_2) f_0(x_2) x_2 dx_2, \\
 a_{18} &= \pi\rho \int_0^{x_{20}} B_1^{(2)} f_1(x_2) f_2(x_2) x_2 dx_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{19} &= \frac{\pi}{4} \rho \int_0^{x_{20}} [F_1^{(1,1)}(x_2) - \frac{1}{x_2^2} B_1^{(1,1)}(x_2)] f_2(x_2) x_2 dx_2, & C_2^{(n,m)}(x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{r_n+r_k} (i+\alpha+2) x_{10}^{i+\alpha+1} c_i^{(n,k)}(x_2), \\
 a_{20} &= \pi \rho \int_0^{x_{20}} B_2^{(1)}(x_2) f_2(x_2) x_2 dx_2, & D_0^{(n,k)}(x_2) &= \sum_{i=0}^{p_n+p_k} \frac{x_{10}^{i+n+k+1}}{i+n+k+1} d_i^{(n,k)}(x_2), \\
 a_{21} &= \pi \rho \int_0^{x_{20}} F_1^{(0,0)}(x_2) f_0(x_2) x_2 dx_2, & D_1^{(n,k)}(x_2) &= \sum_{i=0}^{p_n+p_k} x_{10}^{i+n+k} d_i^{(n,k)}(x_2), \\
 a_{22} &= \rho \frac{\pi}{2} \int_0^{x_{20}} [F_1^{(1,1)}(x_2) + \frac{1}{x_2^2} B_1^{(1,1)}(x_2)] f_0(x_2) x_2 dx_2, & D_2^{(n,k)}(x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p_n+p_k} (i+n+k) x_{10}^{i+n+k-1} d_i^{(n,k)}(x_2), \\
 a_{23} &= 2\pi \rho \int_0^{x_{20}} F_2^{(0,1)}(x_2) f_0(x_2) f_1(x_2) x_2 dx_2, & B_0^{(n,k)}(x_2) &= \sum_{i=0}^{p_n+p_k} \frac{x_{10}^{i+n+k+1}}{i+n+k+1} b_i^{(n,k)}(x_2), \\
 a_{24} &= \pi \rho \int_0^{x_{20}} F_1^{(0,2)}(x_2) f_2(x_2) x_2 dx_2, & B_1^{(n,k)}(x_2) &= \sum_{i=0}^{p_n+p_k} x_{10}^{i+n+k} b_i^{(n,k)}(x_2), \\
 a_{25} &= \frac{\pi}{2} \rho \int_0^{x_{20}} [F_1^{(2,2)}(x_2) + \frac{4}{x_2^2} B_1^{(2,2)}(x_2)] f_0(x_2) x_2 dx_2, & B_2^{(n,k)}(x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p_n+p_k} (i+n+k) x_{10}^{i+n+k-1} b_i^{(n,k)}(x_2), \\
 a_{26} &= \pi \rho \int_0^{x_{20}} F_2^{(0,1)}(x_2) f_1(x_2) f_2(x_2) x_2 dx_2, & L_0^{(n,k)}(x_2) &= \sum_{i=0}^{r_n+p_k} \frac{x_{10}^{i+k+\beta+2}}{i+k+\beta+2} l_i^{(n,k)}(x_2), \\
 a_{27} &= \pi \rho \int_0^{x_{20}} F_2^{(1,2)}(x_2) f_1(x_2) f_2(x_2) x_2 dx_2, & L_1^{(n,k)}(x_2) &= \sum_{i=0}^{r_n+p_k} x_{10}^{i+k+\beta+1} l_i^{(n,k)}(x_2), \\
 a_{28} &= \frac{\pi}{2} \rho \int_0^{x_{20}} [F_2^{(1,2)}(x_2) + & L_2^{(n,k)}(x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{r_n+p_k} (i+k+\beta+1) x_{10}^{i+k+\beta} l_i^{(n,k)}(x_2), \\
 &+ \frac{2}{x_2^2} B_2^{(1,2)}(x_2)] f_0(x_2) f_1(x_2) x_2 dx_2, & L_0^{(k,n)}(x_2) &= \sum_{i=0}^{r_k+p_n} \frac{x_{10}^{i+n+\alpha_k+2}}{i+n+\alpha_k+2} l_i^{(k,n)}(x_2), \\
 a_{29} &= 2\pi \rho \int_0^{x_{20}} B_2^{(1,2)}(x_2) f_1(x_2) f_2(x_2) \frac{dx_2}{x_2}, & L_1^{(k,n)}(x_2) &= \sum_{i=0}^{r_k+p_n} x_{10}^{i+n+\alpha_k+1} l_i^{(k,n)}(x_2), \\
 a_{30} &= 2\pi \rho k_1 \int_0^{x_{20}} F_2^{(0,1)}(x_2) f_1(x_2) x_2 dx_2. & L_2^{(k,n)}(x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{r_k+p_n} (i+n+\alpha_k+1) x_{10}^{i+n+\alpha_k} l_i^{(k,n)}(x_2),
 \end{aligned}$$

Подынтегральные функции, представленные выше, определяются формулами

$$B_m^{(0)} = \sum_{k=m}^{q_m} a_k^{(m)} \frac{x_{10}^{k+3}}{k+3} v_k^{(m)}(x_2),$$

$$B_m^{(1)} = \sum_{k=m}^{q_m} a_k^{(m)} x_{10}^{k+2} v_k^{(m)}(x_2),$$

$$B_m^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=m}^{q_m} (k+2) a_k^{(m)} x_{10}^{k+1} v_k^{(m)}(x_2),$$

$$B_m^{(3)} = \frac{1}{6} \sum_{k=m}^{q_m} (k+1)(k+2) a_0^{(m)} x_{10}^k v_k^{(m)}(x_2),$$

$$F_s^{(m,n)} = C_s^{(m,n)}(x_2) - x_2 (L_s^{(m,n)} + L_s^{(n,m)}) + (1+x_2^2) D_s^{(m,n)},$$

$$C_0^{(n,m)}(x_2) = \sum_{i=0}^{r_n+r_k} \frac{x_{10}^{i+\alpha+3}}{i+\alpha+3} c_i^{(n,k)}(x_2),$$

$$C_1^{(n,m)}(x_2) = \sum_{i=0}^{r_n+r_k} x_{10}^{i+\alpha+2} c_i^{(n,k)}(x_2),$$

где

$$\alpha = \alpha_n + \alpha_k, \quad \alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{for } n=0, n=1, \\ 1 & \text{for } n=2. \end{cases}$$

Рассмотрим (63) как систему линейных алгебраических уравнений от  $Z_k(t)$ . Тогда, с точностью до  $O(\epsilon)$ :

$$\begin{aligned}
 R_1(t) &= Q_1 \dot{r}_1 + C_2 r_1^2 \dot{r}_1 + B_3 r_1 \dot{p}_0 + D_3 p_1^2 \dot{r}_1 + C_1 r_1 p_1 \dot{p}_1 + \\
 &+ D_2 (r_2 \dot{p}_1 - p_2 \dot{r}_1) + C_3 (p_1 \dot{r}_2 - r_1 \dot{p}_2) + B_0 p_0 \dot{r}_1, \\
 P_1(t) &= Q_1 \dot{p}_1 + C_2 p_1^2 \dot{p}_1 + B_3 p_1 \dot{p}_0 + D_3 r_1^2 \dot{p}_1 + C_1 p_1 r_1 \dot{r}_1 + \\
 &+ D_2 (r_2 \dot{r}_1 + p_2 \dot{p}_1) + C_3 (r_1 \dot{r}_2 + p_1 \dot{p}_2) + B_0 p_0 \dot{p}_1, \\
 P_0(t) &= C_0 (r_1 \dot{r}_1 + p_1 \dot{p}_1) + D_0 \dot{p}_0, \\
 R_2(t) &= Q_2 \dot{r}_2 - D_1 (r_1 \dot{p}_1 + p_1 \dot{r}_1), \\
 P_2(t) &= Q_2 \dot{p}_2 + D_1 (r_1 \dot{r}_1 - p_1 \dot{p}_1),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{a_4}{a_1} - \frac{a_5 a_{15}}{4 a_1 a_{10}}; \quad D_0 = \frac{a_{17}}{2 a_1}; \quad Q_1 = \frac{a_5}{2 a_{10}}, \\
 Q_2 &= \frac{a_{20}}{2 a_2}; \quad C_1 = \frac{1}{a_{10}} \left( a_6 - \frac{a_4 a_{15}}{2 a_1} - \frac{a_5 a_8}{4 a_{10}} + \frac{a_5 a_{15}^2}{8 a_1 a_{10}} \right), \\
 C_3 &= \frac{1}{2 a_{10}} \left( a_{18} - \frac{a_3 a_{20}}{2 a_2} \right); \quad B_0 = \frac{1}{2 a_{10}} \left( a_{14} - \frac{a_5 a_{22}}{a_{10}} \right), \\
 B_3 &= \frac{1}{2 a_{10}} \left( a_{14} - \frac{a_{15} a_{17}}{2 a_1} \right); \quad D_1 = \frac{a_7}{a_2} + \frac{a_3 a_5}{4 a_2 a_{10}}, \\
 D_2 &= \frac{1}{2 a_{10}} \left( a_{18} - \frac{a_5 a_{19}}{a_{10}} \right); \quad C_2 = D_3 + C_1, \\
 D_3 &= \frac{a_6}{2 a_{10}} + Q_1 \left( \frac{a_3^2}{4 a_2 a_{10}} - \frac{a_{12}}{a_{10}} + \frac{a_3 a_7}{a_2 a_5} \right).
 \end{aligned}$$

$P_0, \dots, P_2$  должны быть подставлены в (64). Это приводит к системе (55)-(59), где квадраты собственных частот определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 \sigma_0^2 &= g \frac{2l_0^{(2)}}{\mu_0}; \quad \sigma_1^2 = g \frac{2l_1^{(1)}}{\mu_1}; \quad \sigma_2^2 = g \frac{2l_1^{(3)}}{\mu_2}, \\
 \mu_0 &= a_{17} D_0; \quad \mu_1 = a_5 Q_1; \quad \mu_2 = a_{20} Q_2,
 \end{aligned} \tag{68}$$

и другие коэффициенты (55)-(59) определяются как

$$\begin{aligned}
 d_1 &= 2 a_4 C_0 + 2 a_7 D_1 + a_5 C_2 + 3 a_6 Q_1, \\
 d_2 &= a_5 D_3 + a_6 Q_1 + 2 a_7 D_1, \\
 d_3 &= a_5 D_2 + a_{18} Q_1, \\
 d_4 &= 2 a_7 Q - 2 - a_5 C_3, \\
 d_5 &= a_5 B_0 + a_{14} Q_1, \\
 d_6 &= 2 a_4 D_0 + a_5 B_3, \\
 d_7 &= d_4 + \frac{1}{2} d_3; \quad d_8 = d_6 - \frac{1}{2} d_5, \\
 d_1^k &= 4 l_1^{(4)}; \quad d_2^k = \frac{1}{2} l_1^{(5)}; \quad d_3^k = l_1^{(6)}, \\
 d_4^k &= l_2^{(2)}; \quad d_5^k = l_2^{(3)}; \quad d_6^k = l_2^{(4)}, \\
 d_7^k &= l_2^{(5)}; \quad d_8^k = l_2^{(6)}; \quad d_9^k = l_2^{(7)}, \\
 d_{10}^k &= \frac{1}{2} l_2^{(8)}; \quad d_{11}^k = l_2^{(9)}; \quad d_{12}^k = l_2^{(10)}, \\
 \lambda &= l_2^{(1)} = l_3^{(1)}.
 \end{aligned} \tag{69}$$

1. Бердичевский, В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды.- М.: Наука, 1983.- 3 с.480
2. Лимарченко, О.С., Ясинский, В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью.- Киев: Киевский политехнический университет, 1997.- 338 с.
3. Луковский, И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы.- Киев: Наукова думка, 1975.- 136 с.

4. Луковский, И.А. Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью // В кн.: "Колебания упругих конструкций с жидкостью".- М.: Волна, 1976.- С. 260-264.
5. Луковский, И.А. Введение в нелинейную динамику тел с полостями, частично заполненными жидкостью.- Киев: Наукова думка, 1990.- 296 с.
6. Луковский, И.А., Барняк, М.Я., Комаренко, А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости.- Киев: Наукова думка, 1984.- 232 с.
7. Луковский, И.А., Билык, А.Н. Вынужденные нелинейные колебания жидкости в подвижных осесимметричных конических полостях // В кн.: "Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем".- Киев: Институт математики АН УССР, 1985.- С. 12-26.
8. Луковский, И.А., Тимоха, А.Н. Вариационные методы в нелинейной динамике ограниченного объема жидкости.- Киев: Иститут математики НАНУ, 1995.- 400 с.
9. Моисеев, Н.Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости // Прикладная матем. и механика.- 1958.- 22.- С. 612-621.
10. Нариманов, Г.С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движения последней // Прикладная матем. и механика.- 1957.- 21, # 4.- С. 513-524.
11. Нариманов, Г.С., Докучаев, Л.В., Луковский, И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью.- М.: Машиностроение, 1977.- 203 с.
12. Фещенко, С.Ф., Луковский, И.А., Рабинович, Б.И., Докучаев, Л.В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях.- Киев: Наукова думка, 1969.- 250 с.
13. Aubin, J.-P. Approximation of elliptic boundary-value problems.- New York-London-Sidney-Toronto: Wiley-Interscience, a Division of John Wiley & Sons, Inc., 1972.- 383 p.
14. Bateman, H. Partial differential equations of mathematical physics.- N.-Y.: Dover publications, 1944.- 522 p.
15. Bauer, H.F. Sloshing in conical tanks // Acta Mechanica.- 1982.- 43, # 3-4.- P. 185-200.
16. Bauer, H.F., Eidel, W. Non-linear liquid motion in conical container // Acta Mechanica.- 1988.- 73, # 1-4.- P. 11-31.
17. Beyer, K., Güther, M., Gawrilyuk, I., Lukovsky, I., Timokha, A. Compressible potential flows with free boundaries. Part I: Vibrocappillary equilibria.- Preprint 99/1: Leipzig University, 1999.- 17 p.
18. Dodge, F.T., Kana, D.D., Abramson, H.N. Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers // AIAA Journal.- 1965.- 3, # 4.- P. 685-695.
19. Faltinsen, O.M. A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks // J. Ship. Res.- 1974.- 18, # 4.- P. 224-241.
20. Faltinsen, O.M., Rognebakke, O.F. Sloshing // NAV 2000. Proceeding of the International Conference on Ship and Shipping Research.- Venice, 19-22 September, 2000, Italy, 2000.- P. 56-68.
21. Faltinsen, O.M., Rognebakke, O.F., Lukovsky, I.A., Timokha, A.N. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth // J.Fluid Mech.- 2000, 407.- P. 201-234.

22. Faltinsen, O.M., Timokha, A.N. Adaptive multi-modal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank // *J. Fluid Mechanics* (accepted for publication in 2000).
23. Kochin, N.E., Kibel, I.A., Roze, N.V. *Theoretical hydromechanics*.— New-York-London-Sydney: Interscience Publishers. A division of John Wiley & Sons., 1964.— 434 p.
24. Luke, J.C. A variational principle for a fluid with a free surface // *J. Fluid Mech.*— 1967.— **27**.— P. 395-397.
25. Miles, J.W. Nonlinear surface waves in closed basins // *J. Fluid Mech.*— 1976.— **75**.— P. 419-448.
26. *Report of Committee I.2 “Loads”*. 1997 // *Proceedings of 13th Int. Ship and Offshore Structures Congress*.— (ed. T.Moan& S.Berge). Vol. 1, Pergamon.— P. 59-122.
27. Solaas F., Faltinsen O.M. Combined numerical and analytical solution for sloshing in two-dimensional tanks of general shape // *J. Ship Research*.— 1997.— **41**.— P. 118–129.
28. *Syntesis Report for Publication*. Experimental and Numerical Analysis of Sloshing and Impact Loads (EUROSLOSH).— Project Coordinator: M.Dogliani: Project BE-4354, 26/04/01, 1995.— 35 p.
29. Whitham, G.B. Variational methods and applications to water waves // *Proc. Royal Soc.*— 1967.— **A299**, # 1456.— P. 6-25.