

Є. О. Цибульська

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Математичні моделі рухомих об'єктів

Розглянуто методи математичної формалізації руху об'єктів різних типів для створення моделі зовнішнього середовища в автоматизованій системі моніторингу рухомих об'єктів. Рух об'єктів представлено як операцію перетворення базисів з використанням гіперкомплексної числової системи кватерніонів.

Ключові слова: математична модель, рухомий об'єкт, траєкторія руху, кватерніон.

Вступ

Головним елементом моделі зовнішнього середовища автоматизованої системи моніторингу рухомих об'єктів (АСМРО) є модель дій окремого рухомого об'єкта (РО), яка є відображенням у часі траєкторії його руху в просторі.

Дослідження руху рухомих об'єктів проводиться на основі попередньо визначеної математичної моделі — системи рівнянь руху, що задають умови рівності нулю всіх сил, які діють на об'єкт [1].

Рухомі об'єкти в системі моніторингу будемо представляти моделлю «твердого тіла», тобто сукупністю матеріальних точок, жорстко зв'язаних між собою. В такому разі координати кожної точки об'єкта при русі в просторі не змінюються відносно центра мас об'єкта, і траєкторію об'єкта можна описувати як траєкторію точки — центру мас.

Рух будь-якого РО можна розглядати як сукупність руху двох типів: поступального та обертового. Відповідно, швидкість РО складається з поступальної та обертової швидкостей $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$, причому кутова швидкість $\vec{\omega}$ виражається через похідні кутів Ейлера, або матриці спрямовуючих косинусів, що зберігаються у системі як параметри моделі руху. Однак при деяких значеннях кутів відбувається виродження кінематичних рівнянь, що робить неможливим точний перерахунок координат. Крім того, перетворення координат пов'язане з тригонометричними операціями, що знижує продуктивність обчислень.

Кінематичні рівняння у спрямовуючих косинусах є системою дев'яти лінійних скалярних рівнянь, що задовольняють шести зв'язкам, які є умовою ортогональності. Рівняння в кутах Ейлера є системою трьох незалежних лінійних рів-

нянь, що мають одну особливу точку, в якій система вироджується. Кватерніонні рівняння є системою чотирьох лінійних рівнянь, що не вироджуються та задовольняють одному рівнянню зв'язку. Представлення ортогональних перетворень координат у вигляді добутку кватерніонів дозволяє виконувати моделювання довільного руху з меншими обчислювальними витратами [2].

Постановка задачі

Будемо розглядати РО як об'єкти моделювання трьох типів: повітряні, надводні та наземні.

Вхідними даними для створення математичної моделі руху РО є його траєкторія, що задана у вигляді набору опорних точок на географічній карті заданого масштабу:

$A_0(x_0, y_0, z_0)$ — початкова точка траєкторії руху РО;

$A_j(x_j, y_j, z_j)$ — точка зміни параметрів руху РО;

$A_L(x_L, y_L, z_L)$ — кінцева точка траєкторії руху РО.

У кожній точці траєкторії задана швидкість руху РО $V^j(v_x^j, v_y^j, v_z^j)$, в загальному випадку $V^{j-1} \neq V^j$.

На основі цих даних потрібно побудувати математичну модель руху РО згідно заданої траєкторії, що задовольняє вимогам та обмеженням:

- рух РО розглядається як рух матеріальної точки – центру мас РО;
- моделювання руху забезпечується в усьому діапазоні технічних характеристик кожного РО;
- моделювання руху здійснюється в межах району відповідальності Системи у вибраній системі координат.

Модель повинна дозволяти обчислювати координати та параметри руху РО в будь-який момент часу t та із заданою точністю.

Таким чином, у результаті моделювання отримаємо набір векторів a_i , кожний з яких є вектором стану i -го рухомого об'єкта, та містить інформацію по усій траєкторії на будь-який момент часу t : $a_i = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(q)}, t)$.

Елементами a_i є просторові (як правило, прямокутні) координати об'єкта (x, y, z) ; параметри руху — швидкість, курс (V, Q) ; дані про тип і склад об'єкта тощо.

Формування математичної моделі руху рухомого об'єкта із застосуванням багатовимірних числових систем

Розглянемо довільний рух об'єкта відносно деякої системи відліку $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$. Зв'яжемо з об'єктом базис $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, в якому початок відліку співпадає з центром мас об'єкта, вісь \vec{e}_1 спрямована вздовж вектора швидкості у кожний момент часу, вісь \vec{e}_3 перпендикулярна до неї та спрямована вгору, вісь \vec{e}_2 доповнює базис до правої трійки векторів (рис. 1,а). Тоді для визначення положення

об'єкта в просторі у будь-який момент часу достатньо задати положення базису $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ відносно базису $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ [1, 2].

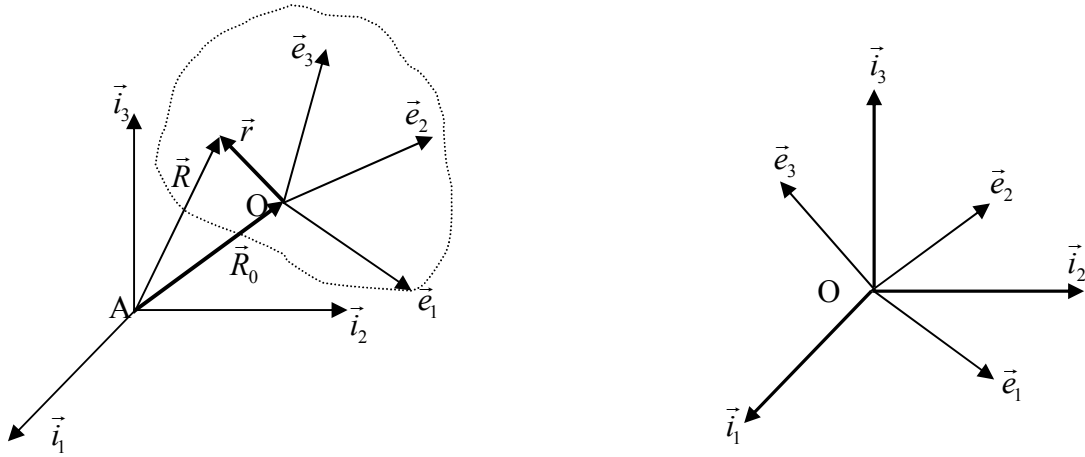


Рис. 1. Рух об'єкта як перетворення базисів

Введемо додатковий базис $O(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$, осі якого паралельні осям $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$, а центр знаходиться у точці O (рис. 1,б). Тоді рух об'єкта визначається рухом точки O (радіус-вектор \vec{R}_0) та поворотом базису $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ відносно $O(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$.

Поворот базису може бути заданий такими способами:

1) матрицею повертаючих косинусів $A = \|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^3$, де $\alpha_{kj} = (\vec{i}_k, \vec{e}_j)$ — коефіцієнти в розкладенні ортів базису $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ по ортам базису $O(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ [2, 3]. Тоді

$\vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \alpha_{kj} \cdot \vec{i}_k$, $j=1,2,3$, а рух об'єкта задається формулою: $\vec{r}(t) = \vec{R}_0 + A(t) \cdot \vec{r}(0)$;

2) кутами Ейлера [2, 3] — базис $O(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ переводиться до базису $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ послідовністю поворотів на кут прецесії ψ , кут нутації θ та кут власного обертання φ ;

3) кватерніоном обертання Λ [1–3]:

$$\vec{e}_k = \Lambda \circ \vec{i}_k \circ \tilde{\Lambda}, \quad k=1,2,3.$$

Тоді кінцеве положення об'єкта визначається формулою:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_0 + \Lambda \circ \vec{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}, \quad (1)$$

де Λ — деякий нормований кватерніон, $\Lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}_k$, $k=1,2,3$, $\tilde{\Lambda}$ — кватерніон,

обернений до Λ ($\Lambda \circ \tilde{\Lambda} = 1$). Компоненти кватерніона λ_k , $k = \overline{0,3}$ є параметрами Родріга–Гамільтона [2].

Використовуючи тригонометричне представлення кватерніонів [2, 3], визначимо зв'язок параметрів Родріга–Гамільтона та кутів Ейлера.

Кватерніон повороту на кут прецесії Ψ та його відображення мають вигляд:

$$\Lambda_1 = \cos \frac{\Psi}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\Psi}{2} = \Lambda_1^*.$$

Кватерніон повороту на кут нутації θ та його відображення:

$$\Lambda_2 = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad \Lambda_2^* = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{\theta}{2}$$

Кватерніон повороту на кут власного обертання φ та його відображення мають вигляд:

$$\Lambda_3 = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \Lambda_3^* = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Суперпозиція цих поворотів знаходиться за формулою $\Lambda^* = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* \circ \Lambda_3^*$. Звідси параметри Родріга–Гамільтона будуть дорівнювати [1]:

$$\left\{ \lambda_0^* = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\Psi + \varphi}{2}, \lambda_1^* = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\Psi - \varphi}{2}, \lambda_2^* = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\Psi - \varphi}{2}, \lambda_3^* = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\Psi + \varphi}{2} \right\} \quad (2)$$

Ці співвідношення дають можливість визначити вісь обертання та кут кінцевого повороту відносно початкового базису. Напрямок осі кінцевого повороту визначається компонентами $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$, кут кінцевого повороту обчислюється за формулою:

$$\alpha = 2 \arccos(\lambda_0^*) = 2 \arccos \left[\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\Psi + \varphi}{2} \right]. \quad (3)$$

Кінематичні рівняння руху об'єктів

Визначимо кутову швидкість об'єкта при повороті від базису $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ до $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (рис. 1). Положення об'єкта в системі $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ визначається формулою [4]:

$$\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r} = \vec{R}_O + \sum_{k=1}^3 r_k \vec{e}_k. \quad (4)$$

Використовуючи кватерніонне представлення поворотів, отримаємо:

$$\vec{R} = \vec{R}_O + \Lambda \circ \left(\sum_{k=1}^3 r_k \vec{i}_k \right) \circ \tilde{\Lambda} = \vec{R}_O + \Lambda \circ \vec{r}^0 \circ \tilde{\Lambda}, \quad (5)$$

де $\vec{r}^0 = \sum_{k=1}^3 r_k \vec{i}_k$ визначає початкове положення об'єкта в базисі $O(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$.

Враховуючи, що для нормованого кватерніона $\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} = 1 \Rightarrow \dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\tilde{\Lambda}} = 0$, то швидкість об'єкта в системі $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$ дорівнює

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_O + \dot{\vec{r}} = \vec{V}_O + \dot{\Lambda} \circ \vec{r}^0 \circ \tilde{\Lambda} + \Lambda \circ \vec{r}^0 \circ \dot{\tilde{\Lambda}} = \vec{V}_O + \dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} \circ \vec{r} - \vec{r} \circ \dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda},$$

де \vec{V}_O — швидкість точки O в системі $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$; $\dot{\Lambda}$ — похідна за часом від кватерніона Λ , $\dot{\Lambda} = \dot{\lambda}_0 + \sum_{k=1}^3 \dot{\lambda}_k \vec{i}_k$.

З урахуванням правил множення кватерніонів [2]

$$\vec{V} = \vec{V}_O + \dot{\vec{r}} = \vec{V}_O + 2(\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda}) \times \vec{r} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де $\vec{\omega}$ — вектор кутової швидкості об'єкта відносно базису $A(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$,

$$\vec{\omega} = 2(\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda}). \quad (6)$$

У разі, коли об'єкт обертається навколо деякої нерухомої осі $\vec{\xi}$, а α — кут повороту об'єкта навколо цієї осі, кватерніон повороту, швидкість та вектор кутової швидкості записуються таким чином:

$$\begin{cases} \Lambda = \cos \frac{\alpha}{2} + \vec{\xi} \sin \frac{\alpha}{2}, \\ \dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\alpha}{2} + \vec{\xi} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \dot{\alpha}, \quad (\dot{\vec{\xi}} = 0), \\ \vec{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} = \vec{\xi} \dot{\alpha}. \end{cases} \quad (7)$$

Тобто, кутова швидкість спрямована вздовж осі повороту об'єкта та дорівнює похідній за часом від кута повороту.

Формування математичної моделі при довільному русі об'єкта

Для визначення кінематичних рівнянь при довільному русі об'єкта, розглянемо два нескінченно близьких положення базису, що зв'язаний з об'єктом:

$O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)_{t(0)}$ та $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)_{t(0)+dt}$. За теоремою Ейлера, базис $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)_{t(0)+dt}$ отримуємо з базису $O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)_{t(0)}$ нескінченно малим поворотом навколо деякої осі \vec{e} , що проходить через центр координат O , на нескінченно малий кут $\delta\alpha$. Тоді система кінематичних рівнянь є такою [1, 4]:

$$\begin{cases} \delta\Lambda = \cos \frac{\delta\alpha}{2} + \vec{e} \cdot \sin \frac{\delta\alpha}{2}, \\ \Lambda(t) = \delta\Lambda \circ \Lambda(t_0), \\ \vec{\omega} = 2(\delta\dot{\Lambda}) \circ (\delta\tilde{\Lambda}) = \vec{e} \cdot \delta\dot{\alpha} + \dot{\vec{e}} \cdot \sin \frac{\delta\alpha}{2} \left(\cos \frac{\delta\alpha}{2} - e \cdot \frac{\delta\alpha}{2} \right) = e \cdot \delta\dot{\alpha}, \end{cases} \quad (8)$$

де $\delta\Lambda$ — нескінченно малий поворот за проміжок часу dt .

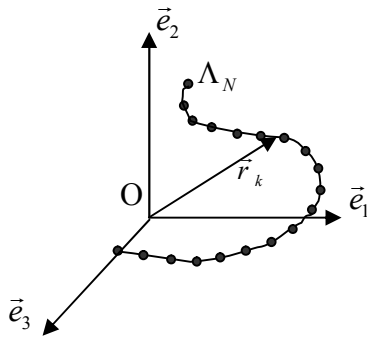


Рис. 2. Довільна траєкторія, що складається з окремих сегментів

У цьому випадку кутова швидкість спрямована вздовж осі нескінченно малого повороту об'єкта та дорівнює похідній за часом від кута нескінченно малого повороту. При поступальному русі об'єкта його кутова швидкість дорівнює нулю.

При довільному русі об'єкта його траєкторію будемо ділити на сегменти, що відповідають проміжкам часу dt (рис. 2), та для кожного визначимо кватерніон повороту Λ_k , $k = \overline{0, N}$ і вектор кутової швидкості $\vec{\omega}_k$, $k = \overline{0, N}$. Тоді результуюча траєкторія може бути описана добутком:

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \Lambda_1 \circ \dots \circ \Lambda_N. \quad (9)$$

Формування траєкторії руху повітряних об'єктів

Як було показано вище, планування траєкторії повітряного об'єкта (ПО) проводиться у вигляді набору опорних точок з координатами у визначеній системі координат та із заданими параметрами руху і основними характеристиками ПО.

З'єднавши опорні точки прямими, отримуємо ламану лінію, яка відображає загальний вигляд траєкторії, що планується (рис. 3).

Відповідно до законів динаміки польотів, реальна траєкторія руху ПО (а також її проекція на площину) відрізняється від ламаної, оскільки маневрування за курсом ПО виконує не під кутом, а дугою кола (рис. 4) [4, 5].

Тепер траєкторія руху ПО складається з відрізків прямих, що поєднані дугами кола відповідного радіусу, причому радіус кожного розвороту визначається із співвідношення [4]:

$$C_i = \frac{V_i^2}{g \cdot \sqrt{n^2 - 1}}, \quad i = 0, L, \quad (10)$$

де V_i — швидкість на ділянці i -го розвороту (вважаємо постійною); g — прискорення вільного падіння; n — допустиме перевантаження.

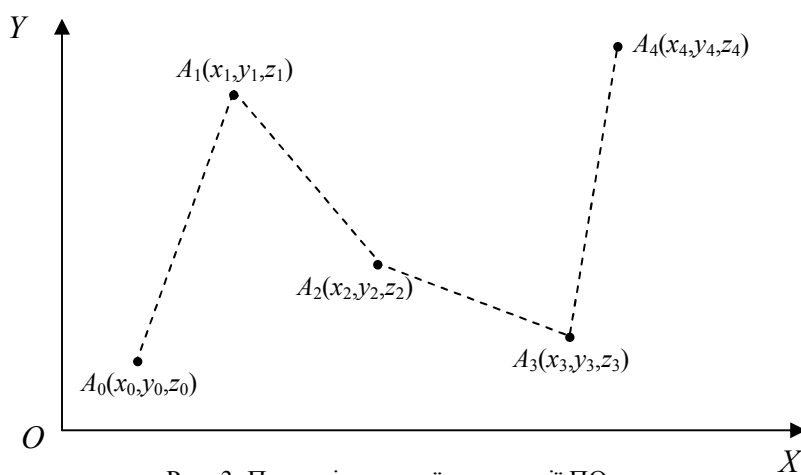


Рис. 3. Проекція заданої траєкторії ПО на площину

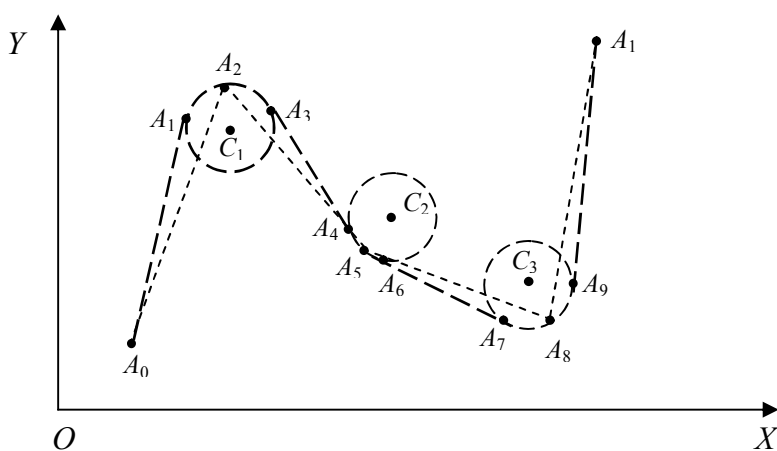


Рис. 4. Проекція на площину траєкторії ПО з урахуванням динаміки польоту

Таким чином, побудова траєкторії ПО полягає у знаходженні додаткових опорних точок A_j , $j = 0, 2L$, які визначають початок і кінець ділянок розворотів, причому дуга кола проходить через точку траєкторії A_i .

Час виконання розвороту обчислюється за формулою $T_i = \frac{\angle Q_i \cdot V_i}{g \cdot \sqrt{n^2 - 1}}$, $i = 0, L$, де $\angle Q_i$ — кут розвороту.

Будемо вважати, що ПО, який рухається з точки A_0 до точки A_{N+L} через усі проміжні точки A_i , проходить траєкторію за мінімальний час, тобто $\sum_{i=0}^{N+L-1} \frac{A_i A_{i+1}}{V_i} \rightarrow T_{\min}$. Ця умова виконується при мінімальному значенні радіусів розворотів, і, відповідно, при максимальному значенні допустимого перевантаження $C_{\min} = \frac{V^2}{g \cdot \sqrt{n_{\max}^2 - 1}}$.

Отже, довільна траєкторія руху ПО може бути представлена сукупністю ділянок таких типів:

- прямолінійного руху, з маневром за швидкістю та висотою;
- криволінійного руху дугою кола (маневр за курсом);
- криволінійного руху по спіралі (маневр за курсом і висотою).

Оскільки у вхідних даних курс РО не заданий, на першому етапі обчислюємо курс руху послідовно в усіх опорних точках за формулою:

$$Q_i = \begin{cases} \beta, & \text{при } \Delta X_i > 0, \Delta Y_i > 0, \\ \pi - \beta, & \text{при } \Delta X_i > 0, \Delta Y_i < 0, \\ \pi + \beta, & \text{при } \Delta X_i < 0, \Delta Y_i > 0, \\ 2\pi - \beta, & \text{при } \Delta X_i < 0, \Delta Y_i < 0, \end{cases} \quad \Delta X_i = X_i - X_{i-1}, \Delta Y_i = Y_i - Y_{i-1}, \beta = \arctg \frac{|\Delta X_i|}{|\Delta Y_i|} \quad (11)$$

Формування криволінійного руху по дузі кола

Розрахуємо параметри руху на ділянці $A_1 A_3$ (рис. 4), де радіус розвороту C визначається співвідношенням (10).

Мінімальний час t_{\min} може бути досягнутий при максимальному прискоренні $a_{\max} = g \cdot n_{Y\max} = g \cdot \frac{V^2}{C}$, де значення максимального нормального перевантаження береться з довідника ЛТХ літальних апаратів.

Розглянемо випадок, коли маневр за швидкістю відсутній. Кутова швидкість РО визначається за формулою $W_j = \frac{V_j}{C_j}$ [3].

Довжина шляху, що проходить РО при розвороті, обчислюється таким чином:

$$S_j = \alpha \cdot C = 2 \cdot C \cdot \arcsin \left(\frac{|A_j A_{j+2}|}{2 \cdot C} \right), \quad (12)$$

де α — кут розвороту; $|A_j A_{j+2}| = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$ — відстань між точками по-

чатку і закінчення розвороту. Тоді мінімальний час виконання розвороту дорівнює: $t_{\min} = \frac{\alpha}{W_j}$.

Визначимо компоненти кватерніону повороту за одиницю часу відповідно до формул (2), (3):

$$\delta\Lambda = \left[\lambda_0 = \cos \frac{\alpha}{2t}; \lambda_1 = \frac{1}{2}W_X; \lambda_2 = \frac{1}{2}W_Y; \lambda_3 = \frac{1}{2}W_Z \right], \quad (13)$$

де W_X, W_Y, W_Z — проекції кутової швидкості на координатні осі. Тоді рівняння руху РО можна записати таким чином:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{pmatrix} = \delta\Lambda(t_j - t_{j-1}) \circ u_j \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ X_{j-1} \\ Y_{j-1} \\ Z_{j-1} \end{pmatrix} \circ \tilde{\delta\Lambda}(t_j - t_{j-1}), \quad (14)$$

де $u_j = \begin{cases} (1,1,1,1) - \text{правий вираж з набором висоти,} \\ (1,1,1,-1) - \text{правий вираж з утратою висоти,} \\ (1,-1,-1,1) - \text{лівий вираж з набором висоти,} \\ (1,-1,-1,-1) - \text{лівий вираж з утратою висоти.} \end{cases}$

Формування прямолінійного руху

1. Формуємо масив даних по кожній опорній точці у вигляді $A_i(X_i, Y_i, Z_i, V_i, Q_i, P_i)$.

2. Розраховуємо параметри руху на ділянці A_0A_1 (рис. 6.), де $Q(t) = \text{const}$. Для цього обчислюємо час руху з урахуванням маневру за швидкістю:

$$t = t_{j-1} + \frac{1}{a} \cdot (V_j - V_{j-1}). \quad (15)$$

Мінімальний час t_{\min} може бути досягнутий при максимальному прискоренні $a_{\max} = g \cdot n_{X_{\max}}$, де значення максимального тангенційного перевантаження береться з довідника ЛТХ літальних апаратів.

3. Отримуємо формули розрахунку координат і швидкості РО в довільний момент часу для прямолінійної ділянки руху (наприклад, A_0A_1 на інтервалі часу $[t_0, t_1]$) мають вигляд:

$$\begin{cases} x(t) = X_{j-1} + V_{cp}(t) \cdot (t - t_{j-1}) \cdot \sin Q_{j-1}, \\ y(t) = Y_{j-1} + V_{cp}(t) \cdot (t - t_{j-1}) \cdot \cos Q_{j-1}, \\ V(t) = V_{j-1} + u_{Vj}(t) \cdot a_{\max} \cdot (t - t_{j-1}), \end{cases} \quad u_{Vj}(t) = \begin{cases} +1, & \text{при } V_{j-1} < V_j, \\ 0, & \text{при } V_{j-1} = V_j, \\ -1, & \text{при } V_{j-1} > V_j, \end{cases} \quad (16)$$

де значення параметру управління дозволяє проходити дану ділянку з потенційними ЛТХ ($n = n_{X_{\max}}$) за мінімальний час.

Довжина прямолінійної ділянки визначається з формули:

$$\Delta S_j = \sqrt{|X_{j-1} - X_j|^2 + |Y_{j-1} - Y_j|^2}. \quad (17)$$

При наявності маневру за швидкістю, довжина ділянки набору швидкості дорівнює:

$$S_V = V_2 \cdot t_V + \frac{a_{\max} \cdot t_V^2}{2}. \quad (18)$$

У загальному випадку ділянка прямолінійного руху $A_{j-1}A_j$ довжиною S ділиться на дві частини:

- ділянка $A_{j-1}A_V$ набору швидкості до значення V_j довжиною S_V ;
- ділянка рівномірного руху A_VA_j довжиною S_P .

Тоді довжина ділянки і час руху РО відповідно дорівнюють:

$$\begin{cases} S = S_V + S_P, \\ t_{\min} = t_V + t_P, \end{cases}$$

де t_V — час набору швидкості до значення V_j ; t_P — час рівномірного руху зі швидкістю V_j .

Залежно від довжини ділянки S_V , можливі різні варіанти рішення:

1) за умови $S_V = \Delta S$ ділянка набору швидкості дорівнює усій ділянці $A_{j-1}A_j$, тобто $S_P = 0$ та мінімальний час руху дорівнює $t_{\min} = t_V$. Такий варіант рішення буде також при рівноприскореному русі на усій ділянці $A_{j-1}A_j$ за умови $a_j \leq a_{\max}$, де прискорення дорівнює:

$$a_j = \frac{V_j^2 - V_{j-1}^2}{2 \cdot S} = \text{const}; \quad (19)$$

2) якщо за умови $a_j = a_{\max}$ $S_V < \Delta S$, то ділянка розбивається на дві частини — ділянку набору швидкості S_V та ділянку S_P рівномірного прямолінійного руху, причому $S_P = \Delta S - S_V$, $t_n = \frac{S_n}{V_j}$, а мінімальний час руху дорівнює $t_{\min} = t_V + t_P$;

3) якщо $S_V > \Delta S$, то некоректно задані граничні умови, і задача не має рішення.

Якщо одночасно є маневр за швидкістю й висотою, зміна висоти $\Delta Z_{j,j+1}$ та довжина проекції ділянки маневру за висотою на площину XOY визначаються за формулами:

$$\begin{cases} \Delta Z_j = |Z_{j-1} - Z_j|, \\ \Delta S_j = \sqrt{|X_{j-1} - X_j|^2 + |Y_{j-1} - Y_j|^2}, \end{cases} \quad (20)$$

і формула (16) буде мати вигляд:

$$\begin{cases} x(t) = X_{j-1} + V_{cp}(t) \cdot (t - t_{j-1}) \cdot \cos Q_{j-1} \cos \theta_{j-1}, \\ y(t) = Y_{j-1} + V_{cp}(t) \cdot (t - t_{j-1}) \cdot \sin Q_{j-1} \cos \theta_{j-1}, \\ z(t) = Z_{j-1} + u_{zj}(t) \cdot V_{cp}(t) \cdot \sin \theta_{j-1}, \\ V(t) = V_{j-1} + u_{Vj}(t) \cdot a_{\max} \cdot (t - t_{j-1}). \end{cases} \quad (21)$$

Тут інтенсивність маневру за висотою визначається параметром управління

$$u_{zj}(t) = \begin{cases} +1, & \text{якщо } Z_{j-1} < Z_j, \\ 0, & \text{якщо } Z_{j-1} = Z_j, \\ -1, & \text{якщо } Z_{j-1} > Z_j, \end{cases}$$

та кутом нахилу траєкторії до лінії горизонту: $\theta_{j-1} = \arctg \frac{\Delta Z_j}{\Delta S_j}$, де $\Delta Z_j = Z_j - Z_{j-1}$,

$$S_j = \sqrt{\Delta S_j^2 + \Delta Z_j^2}.$$

У результаті планування ділянки прямолінійного руху з урахуванням маневру за висотою формується масив даних за кожною j -ю опорною точкою у вигляді $A_j(X_j, Y_j, Z_j, V_j, Q_j, a_j, \theta_j, P_j, t_j)$.

Формування траєкторії руху наземних і надводних об'єктів

Вхідні дані та постановка задачі моделювання руху наземних і надводних РО аналогічна тим, що приведені для повітряних об'єктів. Відмінністю є те, що рух розглядається виключно у площинній прямокутній системі координат. у зага-

льному випадку траєкторія руху може представлятися сукупністю ділянок руху двох типів:

- прямолінійний рух (з маневром за швидкістю);
- рух дугою кола.

Для першого випадку формули розрахунку координат та швидкості РО на довільний момент часу $t_{j-1} < t < t_j$ на ділянці $A_{j-1}A$ мають вигляд:

$$\begin{cases} x(t) = X_{j-1} + V_{cp}(t) \cdot (t - t_{j-1}) \cdot \sin Q_{j-1}, \\ y(t) = Y_j + V_{cp}(t) \cdot (t - t_{j-1}) \cdot \cos Q_{j-1}, \\ V(t) = V_{j-1} + u_V(t) \cdot a_j \cdot n_X \cdot (t - t_{j-1}). \end{cases} \quad (22)$$

Тут n_X — коефіцієнт, який враховує переважання, а також вплив рельєфу (підйоми та спуски) для наземних РО і поверхні води для надводних РО на швидкість руху об'єкта.

Для наземних і надводних РО більш характерні траєкторії, які мають переважно прямолінійні ділянки. Оскільки різка зміна параметрів руху на переході між ділянками неможлива за будь-якої швидкості, то ділянка прямолінійного руху зазвичай ділиться на частини:

- ділянка набору швидкості $u_V(t) > 0$;
- ділянка руху з постійною швидкістю $u_V(t) = 0$;
- ділянка сповільнення $u_V(t) < 0$.

Це дозволяє спростити траєкторію руху наземних і надводних РО, порівняно з повітряними, за рахунок виключення з неї ділянок криволінійного руху при маневрі за курсом. Тобто, в даному випадку траєкторію можна представляти як ламану лінію, що з'єднує задані опорні точки (рис. 3).

У результаті моделювання в задані моменти часу t на виході отримуємо вектор стану зовнішнього середовища по кожному РО вигляду:

$$a_k = (X_k, Y_k, H_k, Q_k, V_k, \Pi_k, t), \quad k = \overline{1, M}. \quad (23)$$

Висновки

Проведений аналіз типів і характеристик РО, а також існуючих підходів до моделювання руху об'єктів, дозволив виділити базові математичні моделі руху РО, які є рівняннями динаміки твердого тіла.

На основі представлення траєкторії руху повітряного РО, що маневрує, у вигляді детермінованої динамічної системи, отримано необхідні розрахункові співвідношення, які дозволяють розрахувати координати і параметри руху об'єкта в просторі у довільний момент часу.

При цьому рух об'єкта у просторі запропоновано описувати як операцію перетворення базисів, де перехід від точки A до точки A' при русі дугою кола задається відповідним кватерніоном повороту. В цьому разі загальна траєкторія руху обчислюється як добуток кватерніонів, що задають одиничні сегменти траєкторії.

Аналогічно, але за більш простих умов, запропоновано рішення для моделювання траєкторій руху наземних і надводних РО.

Такий підхід зменшує кількість тригонометричних операцій, що дозволить підвищити продуктивність і точність обчислень, особливо при збільшенні геометричних розмірів зони відповідальності Системи моніторингу рухомих об'єктів.

1. *Амелькин Н.И.* Кинематика и динамика твердого тела / Н.И. Амелькин. — М.: МФТИ, 2000. — 64 с.

2. *Бранец В.Н.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела // В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. — М.: Наука, 1973. — 319 с.

3. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения / Ю.Н. Челноков. — М.: Физматлит, 2006. — 236 с.

4. *Бирюков А.Г.* Задача оптимального вывода твердого тела на заданную программную траекторию // А.Г. Бирюков, В.Г. Бирюков, Ю.Н. Челноков / Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. — 2010. — Вып. 12. — С. 140–143.

5. *Антипова А.С.* Кинематический оптимальный разворот твердого тела // А.С. Антипова, В.Г. Бирюков / Математика и ее приложения: ЖИМО. — 2010. — Вып. 1 (7). — С. 3–10.

Надійшла до редакції 05.04.2012