

УДК 519.816

В. В. Циганок

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Агрегація групових експертних оцінок, що отримані у різних шкалах

У системах підтримки прийняття рішень для більш ефективного отримання інформації від експерта запропоновано застосовувати метод парних порівнянь з наданням експертові можливості проводити оцінювання в шкалі, докладність якої адекватно відображає його компетентність у питанні експертизи. Для агрегації отриманих таким чином експертних оцінок запропоновано метод, який враховує різну важливість оцінок, що отримані у різних шкалах. Зроблено припущення, що важливість оцінки пропорційна компетентності експерта в конкретному питанні експертизи та його впевненості у висловленому судженні. Запропоновано застосування зворотного зв'язку з експертами для підвищення узгодженості даних ними оцінок.

Ключові слова: шкала експертного оцінювання, агрегація експертних оцінок, компетентність експертів, зворотний зв'язок з експертами, система підтримки прийняття рішень.

Вступ

У слабо структурованих предметних областях для побудови моделі, яка би найповніше відповідала особистим уявленням (знанням) експертів про дану сферу, пропонується розробити експертні системи підтримки прийняття рішень (СППР), що адаптуються до рівня компетентності експертів [1]. Для підвищення достовірності експертної інформації у таких СППР передбачається застосування виключно групових експертиз, і тому необхідним вбачається процес обробки та узагальнення інформації, що отримана від різних експертів. У [2] викладено обґрунтування необхідності застосування в експертизах так званих невідчутних (англійською мовою — intangible) факторів, методу парних порівнянь як методу відносних вимірювань. Запропоновано оснастити цей метод механізмом, який дозволяє експертові вибирати шкалу експертного оцінювання з кількістю градацій, що адекватно відображає його компетентність у питанні, яке розглядається. Отже,

оскільки в загальному випадку, експерти дають свої оцінки в різних шкалах, то постає питання агрегації індивідуальних експертних оцінок (ЕО) у деяку узагальнену групову оцінку.

У науковій літературі задача обробки ЕО, що задані у різних шкалах розглядалася в контексті визначення метрик, відстаней між наборами параметрів, мір близькості відношень при групуванні об'єктів у галузі кластерного аналізу [3]. Серед мір близькості, що можуть застосовуватися до довільних шкал згадуються міра близькості Журавльова [4], апроксимаційна міра близькості Міркіна [5], міри схожості Вороніна [6]. З ряду причин, про які мова піде нижче, викладені підходи не повною мірою вирішують задачу агрегації індивідуальних ЕО, що задані у довільних шкалах.

Сутність запропонованого підходу

Формальна постановка задачі визначення ваг об'єктів у загальному вигляді може бути наступною.

Дано:

— $A_i, i = (1, m)$ — експертні матриці парних порівнянь (МПП) розмірністю $n \times n$, які мають наступні властивості: 1) матриці зворотно-симетричні, тому використовуються елементи, що належать трикутнику, вище головної діагоналі; 2) матриці мультиплікативні, тобто кожен елемент a_{ij} показує у скільки разів об'єкт з індексом i переважає за деяким критерієм об'єкт з індексом j ; 3) у загальному випадку матриці неповні, оскільки експерт з ряду причин може не виконати (відмовитися виконувати) деяке з парних порівнянь; 4) кожен окремий елемент МПП отримано в деякій шкалі, яка має ваговий коефіцієнт $s_j, j \in [0..8]$;

— $c_l, l = (1, m)$ — відносна компетентність експертів у групі.

Знайти: результуючий вектор ваг об'єктів $w_k, k = (1, n)$.

У даній роботі для вирішення поставленої задачі пропонується метод, у якому задля досягнення достатнього ступеня узгодженості індивідуальних парних порівнянь застосовується зворотний зв'язок з експертами. Спрощену схему методу зображено на рис. 1. Зупинимось далі на блоках даної схеми докладніше.

Приведення оцінок до єдиної шкали

Задача агрегації індивідуальних ЕО включає приведення оцінок, що задані у довільних шкалах, до уніфікованого виду. Тобто, на цьому етапі вбачається доцільним приводити оцінки, зроблені різними експертами в різних шкалах, до єдиної, найбільш інформативної (деталізованої) шкали. Приведення (перетворення) ЕО до менш інформативних шкал вбачається недоречним, оскільки в такому разі, можлива втрата інформації, представленої у шкалах з більшою кількістю градацій (у більш інформативних шкалах). Деякі з вищезгаданих метрик, серед яких, наприклад, міра близькості Журавльова, не можуть бути застосовані саме через можливість втрати інформації, що відбувається при приведенні оцінок до найменш інформативної (номінальної) шкали.

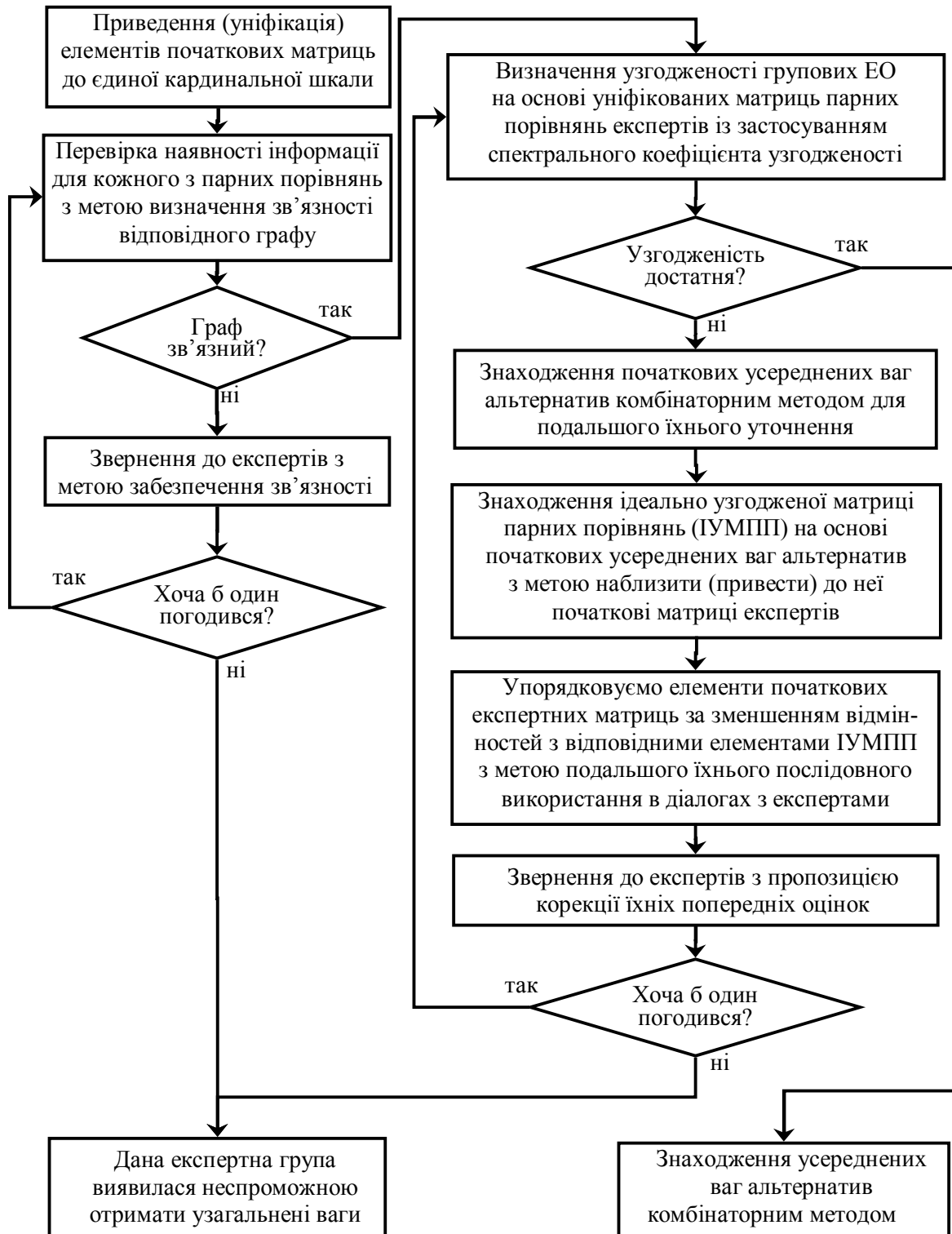


Рис. 1. Спрощена схема методу знаходження узагальнених ваг об'єктів зі зворотним зв'язком з експертами

Одним із шляхів вирішення задачі уніфікації оцінок є визначення однозначної відповідності між кожною з усіх градацій менш інформативної шкали та деякою підмножиною градацій більш інформативної, з подальшим приведенням оцінок до єдиної, більш інформативної шкали, шляхом вибору відповідних градацій на цій єдиній шкалі. Щоб задати таку однозначну відповідність варто врахувати, що у випадку, якщо градація менш інформативної шкали покриває деякий діапазон градацій більш інформативної шкали (одна градація відповідає діапазону градацій), то при приведенні оцінок доцільно визначати (вибирати) на більш інформативній шкалі деяку градацію, що є рівновіддаленою від границь цього діапазону. У такому випадку буде вибрано деяке, найбільш імовірне значення оцінки експерта.

Якщо розглядати, що усі можливі оцінки, які відповідають деякій градації шкали, як випадкові величини, розподілені за деяким, близьким до нормального, законом розподілу, тоді при уніфікації інформації до більш інформативної шкали, до оцінки потрібно ставити у відповідність математичне сподівання згаданого закону розподілу. Для симетричних законів розподілу, до яких належить і нормальний закон, доцільно взяти середнє арифметичне граничних значень градацій більш інформативної шкали, що лежать у межах градації менш інформативної шкали.

На рис. 2,а показано стандартну цілочислову шкалу [7, 8] з 9-ма градаціями (максимальна кількість градацій серед тих, що розглядаються), яким відповідають числові значення від 2 до 9. Виходячи з вищенаведених міркувань, при парних порівняннях у шкалах, що містять від 2-х до 9-ти градацій переваги однієї з альтернатив над іншою, числове значення, поставлене у відповідність деякій градації шкали з меншою кількістю градацій, обчислюється як середнє арифметичне відповідних значень граничних градацій шкали з більшою кількістю градацій. Так, наприклад, значення, що відповідає 2-й зліва градації шкали з 4-ма градаціями дорівнює 4,5 (рис. 2,б). Виходячи з того, що в шкалі з максимально допустимою, доцільною з точки зору психофізичних можливостей людини-експерта [2, 7], кількістю градацій, рівною 9, кожній градації поставлено у відповідність цілі числа із множини $\{2..9\}$, і межах кожної з таких градацій відповідають числа: для 2-ї — ліва границя 1,5; права — 2,5; для 3-ї — ліва 2,5; права 3,5 і т.д. (рис. 2,а)), то для 2-ї градації шкали з 4-ма градаціями, що строго відповідає об'єднанню 4-ї і 5-ї градацій шкали з максимальною кількістю градацій, знаходимо середнє значення: $\frac{3,5+5,5}{2} = 4,5$, де 3,5 — ліва межа 4-ї градації шкали з максимальною кількістю градацій, а 5,5 — права границя 5-ї градації, що також входить у це об'єднання.

Визначення числових відповідників для 3-х градацій показано на рис. 2,в. Формулу для визначення таких величин для довільної кількості градацій у загальному вигляді можна представити наступним чином:

$$M_i^n = l + \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{p-l}{n},$$

де M_i^n — числовий відповідник для i -ї із n наявних градацій шкали; l — ліва границя шкали ($l = 1,5$); p — права границя шкали ($p = 9,5$).

Отже, наприклад, числовий відповідник для крайньої справа (3-ї) градациї шкали, яка має загалом 3 градациї, обчислюється наступним чином:

$$M_3^3 = 1,5 + \left(3 - \frac{1}{2}\right) \frac{9,5 - 1,5}{3} = 8,1(6), \text{ що показано на рис. 2, в.}$$

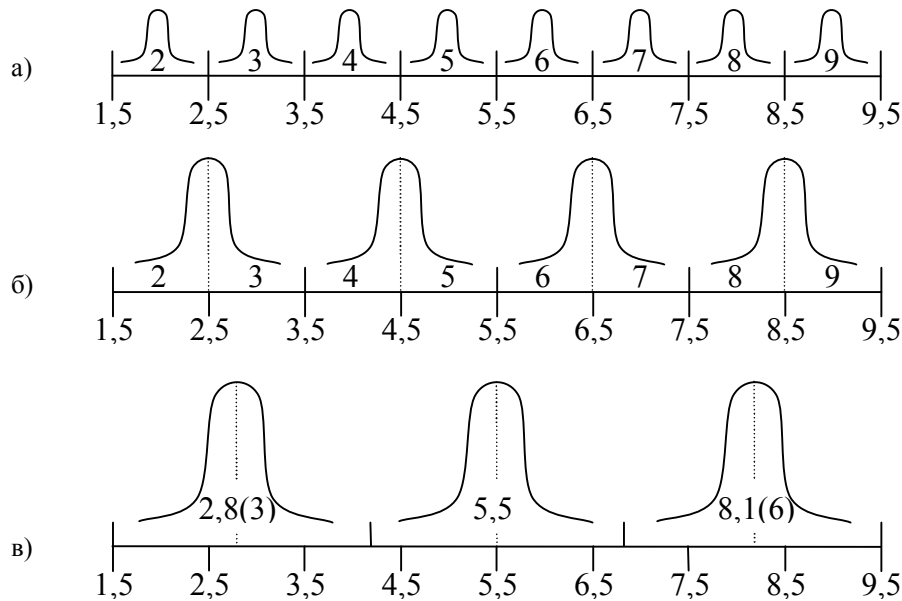


Рис. 2. Числові відповідники для градациї шкали з: а) 8-ма; б) 4-ма; в) 3-ма градациями

Окрім задачі уніфікації ЕО, що подані в різних шкалах, у процесі агрегації важливою задачею є обробка уніфікованих оцінок з метою отримання деякої узагальненої оцінки. Ідея, що покладена в основу обробки уніфікованих оцінок, полягає в призначенні різної ваги оцінкам, які визначені в різних шкалах. Причому оцінка, яка дана в шкалі з більшою кількістю градациї, повинна мати більшу вагу ніж оцінка, що визначена експертом з використанням шкали з меншою кількістю градациї. Це положення ґрунтується на тому, що використання шкали з більшою кількістю градациї при оцінюванні вимагає від експерта більшої компетентності в питанні, що розглядається. Фактично, експерт у цьому випадку використовує, так би мовити, більш точний прилад для вимірювання (оцінювання) об'єктів, ніж у випадку шкали з меншою кількістю градациї.

Вид залежності між вагою (значущістю) експертних оцінок шкали та кількістю наявних градациї у цій шкалі вимагає додаткових досліджень. Насамперед, все ж можна стверджувати, що ця функція залежності вагового коефіцієнта ЕО, що визначені в деякій шкалі, від кількості наявних градациї цієї шкали, є монотонно зростаючою. Зокрема, очевидно, що значимість додавання до шкали однієї додаткової градациї поступово зменшується з кількістю наявних градациї у шкалі. Виходячи з цього, ваговий коефіцієнт — показник рівня деталізації (інформативності) шкали пропонується пов'язати з кількістю інформації, яку потенційно можна отримати від експерта протягом деякого окремого одиничного оцінювання за допомогою даної шкали. Фактично, такий числовий коефіцієнт показує, на скільки

можливо знизити загальну ентропію системи (моделі предметної області), використовуючи при експертному оцінюванні ту чи іншу шкалу.

Одним із варіантів спрощеного розрахунку такого показника інформативності, коли вважається, що вибір будь-якої з поділок шкали оцінювання є рівномірним, може бути визначення кількості інформації за формулою Хартлі [9]:

$$I = \log_2 N,$$

де N — кількість поділок шкали експертного оцінювання.

Згідно цієї формули наступні вагові коефіцієнти ставляться у відповідність шкалам, що використовуються: 0 (при $N = 1$) — експерт не визначився стосовно переваги жодної з пари альтернатив; 1 (при $N = 2$) — експерт обмежився тільки визначенням переваги між альтернативами («більша» або «менша» перевага); $\log_2 3$ — після визначення переваги серед пари альтернатив експерт визначив ступінь переваги, використовуючи 2 додаткові градації ступенів переваги (наприклад, «слабка» і «сильна» перевага); $\log_2 4 \dots \log_2 9$ — після визначення переваги однієї з пари альтернатив над іншою при експертному оцінюванні ступеня переваги використовувалася шкала з відповідною кількістю градацій (від 3-х до 8-ми). Окрім простоти обраної залежності, важливим вбачається ще й поступове зменшення відношення між коефіцієнтами при збільшенні інформативності шкали експертного оцінювання (при збільшенні числа градацій шкали).

Таким чином, оцінкам, що отримані від експерта при парних порівняннях альтернатив, поставлено у відповідність вагові коефіцієнти залежно від шкали, що була використана експертом для оцінювання.

Перевірка множини експертних оцінок на конструктивність

Необхідною і достатньою умовою можливості визначення вектора ваг об'єктів w_k є зв'язність графа, що відповідає результуючій МПП, яка побудована на основі матриць експертів A_i . У цьому випадку можна говорити про конструктивність множини ЕО для визначення за ними узагальнених ваг об'єктів.

Для визначення зв'язності вищезгаданого графа, поелементно визначимо результуючу матрицю суміжності D^* за МПП експертів A_i :

$$d_{uv}^* = \bigvee_{i=1}^m (a_{uv} \neq *),$$

де $a_{uv} = *$, якщо значення парного порівняння не визначено експертом. Для перевірки зв'язності графа, що утворений за матрицею суміжності, скористаємося наступним алгоритмом, який відомий як «пошук у ширину».

Алгоритм пошуку в ширину для визначення зв'язності графу:

- будь-яку одну вершину поміщаємо у чергу;
- поки черга не пуста, повторюємо два наступні кроки:
- забираємо вершину з черги;

— поміщаємо у чергу вершини, суміжні із взятою вершиною, які ще не були в черзі;

— граф зв'язний, якщо всі вершини побували у черзі.

У випадку, якщо алгоритм виявляє незв'язність графа, передбачається процедура звернення до експертів з метою досягнення конструктивності множини їхніх оцінок. Ця процедура передбачає повторне звернення до ряду експертів з пропозицією дати оцінку, яку було пропущено (проігноровано) на початковому етапі експертизи, тобто експертам пропонується зробити парне порівняння деяких об'єктів.

Узгодження уніфікованих індивідуальних оцінок

Для визначення групових ЕО на основі уніфікованих матриць парних порівнянь експертів пропонується застосувати спектральний коефіцієнт узгодженості [10]. При визначенні узгодженості індивідуальних оцінок з урахуванням компетентності експертів і неповноти їхніх оцінок множини V_j оцінок j -го об'єкта будемо задавати зваженим спектром.

Означення 1. Зваженим спектром S_{vj} множини V_j експертних оцінок j -го об'єкта, які округлені до поділок шкали з n поділками, називається n -позиційний вектор, на кожній позиції якого записана сума коефіцієнтів відносної компетентності експертів у групі, що оцінили j -й об'єкт, давши йому округлену оцінку, яка відповідає цій поділці.

Для кількісної оцінки ступеня узгодженості спектра S_{vj} будемо використовувати спектральний коефіцієнт узгодженості, що визначається виразом [10]:

$$k(S_{vj}) = \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i \left| i - \sum_{i=1}^n i \sigma_i \right| - \sum_{i=1}^n \sigma_i \ln \sigma_i}{G \sum_{i=1}^n \left| i - (n+1)/2 \right| + \ln n} \right) z,$$

де $G = m_j / (\ln m_j n \ln n)$ — масштабний коефіцієнт;

$$z = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z^* = \text{true}; \\ 0, & \text{якщо } z^* = \text{false}; \end{cases}$$

$$z^* = \overline{[i(1) = 1]} \vee \overline{[i(n) = 1]} \bigvee_{d=1}^{q_i-1} \overline{[\sigma_i(d) = \sigma_i(d+1)]} \bigvee_{d=1}^{q_i-1} \overline{[i(d) - i(d+1)]} = \text{const},$$

де m_j — кількість експертів, що оцінили j -й об'єкт; q_j — кількість груп експертів, які дали однакові оцінки j -го об'єкта; $i(d)$ — номер поділки шкали, до якої заокруглені оцінки, дані експертами d -ї групи, $d = (1, q_j)$; $\sigma_i(d)$ — сума коефіцієнтів компетентності експертів, оцінки яких заокруглені до поділки з номером $i(d)$; z^* — булева функція, що задає необхідні й достатні умови рівності 0 коефіцієнта узгодженості $k(S_{vj})$. Із наведеної формули випливає, що значення коефіцієнта узгодже-

ності знаходяться у межах $[0,1]$, причому повністю узгодженій множині ЕО відповідає значення 1, а найменш узгодженій — 0.

Для визначення достатності ступеня узгодженості спектра S_{vj} використовуються значення порогу виявлення T_{oj} і порогу застосування T_{uj} [11].

Означення 2. Порогом виявлення T_{oj} називається коефіцієнт узгодженості множини ЕО, даних m_j експертами, що містить мінімальну кількість інформації, яку може бути зареєстровано (виявлено).

Поріг виявлення визначається виразом [11]: $T_{oj} = k(S_{oj})$, де S_{oj} являє собою зважений спектр, у якому $m_j = n$; $\sigma_1 = 0$; $\sigma_g = 2/n$; $\sigma_{y \neq g \neq 0} = 1/n$; $g =]n/2+1[$.

Означення 3. Порогом застосування T_{uj} називається коефіцієнт узгодженості множини ЕО, що забезпечує обчислення узагальненої ЕО з припустимою точністю.

Поріг застосування T_u дорівнює коефіцієнту узгодженості $k(S_{uj})$ зваженого спектра S_{uj} , у якому $m_j = 2$, $\sigma_i = \sigma_{i+1} = 1/2$; $\sigma_{h \neq i} = 0$; $\sigma_{h \neq (i+1)} = 0$ [11].

Зважений спектр S_{vj} множини V_j ЕО вважається достатньо узгодженим для отримання узагальнених оцінок ваг об'єктів, якщо його коефіцієнт узгодженості перевищує деякий поріг застосування.

При розробці методу розглянуто наступні шляхи підвищення узгодженості індивідуальних ЕО при груповому оцінюванні в різних шкалах методом парних порівнянь. 1-й шлях — узгодження спочатку кожної індивідуальної експертної матриці, знаходження ваг альтернатив по кожній матриці, а вже потім агрегація та узгодження цих ваг, знайдених на основі індивідуальних ЕО. 2-й шлях — поелементне узгодження індивідуальних експертних матриць, поелементна агрегація матриць з отриманням у результаті, в загальному вигляді, неповної матриці парних порівнянь. Подальше узгодження виконується вже при одночасному зверненні до групи експертів. Ці два шляхи не зовсім задовольняють, оскільки вони є двоетапними, і після першого етапу узгодження вимагають повернення до цього процесу на другому етапі. При чому на другому етапі узгодження не завжди гарантується збереження рівня узгодження, яке було досягнуто на першому етапі.

У зв'язку з цим пропонується інший (3-й) шлях — проводити узгодження відразу всіх індивідуальних експертних матриць загалом. Цей шлях, з точки зору автора, є найперспективнішим, оскільки не викликає проблем, що пов'язані з порушенням монотонності процесу підвищення узгодженості індивідуальних оцінок експертів, і тим самим, гарантує збіжність методу. Цей підхід передбачає на кожному кроці ітераційного процесу знаходження усередненої ідеально узгодженої МПП (ГУМПП), до якої прагнуть наблизити індивідуальні МПП експертів.

Елементи такої ГУМПП можна обчислити на основі усереднених ваг альтернатив ($a_{ij} = w_i/w_j$), які, у свою чергу, знаходяться одним із методів агрегації групових експертних парних порівнянь. Вибір такого методу агрегації проводиться, виходячи з наступних вимог, які впливають з особливостей загального підходу :

- можливості агрегації групових ЕО;
- можливості врахування компетентності експертів;
- можливості обробки неповних МПП.

Повною мірою цим вимогам задовольняє комбінаторний метод агрегації [12], який характеризується високою ефективністю агрегації [13], є універсальним для повних і неповних МПП та може застосовуватись як в індивідуальних, так і в гру-

пових експертизах. Даний метод відноситься до цілого сімейства однойменних методів агрегації [14, 15], сутність яких полягає в переборі остовних (кістякових) дерев графа, утвореного на основі експертної МПП. Кожне остовне дерево відповідає деякій ІУМПП і має у своєму складі $n - 1$ зв'язуючих ребер при кількості вершин (об'єктів експертизи), рівній n . Агрегація ЕО здійснюється за рахунок усереднення інформації, яка отримана на основі ІУМПП, що підлягають перебору. Згідно теореми Кейлі про кількість дерев [16], таких різних остовних дерев і відповідних ним ІУМПП, є n^{n-2} . Інформація про всю множину ІУМПП, або про частину ІУМПП із цієї множини, використовується при отриманні агрегованих оцінок залежно від різновиду методу із сімейства комбінаторних.

Зворотний зв'язок з експертами

Сам процес зворотного зв'язку полягає у зверненні до експертів з пропозицією зміни їхніх попередніх парних порівнянь. Процес виконує функцію підвищення узгодженості цих, даних експертами, порівнянь до обґрунтовано необхідного рівня. Умовою початку цього процесу є недостатній рівень узгодженості індивідуальних ЕО, який характеризується значенням спектрального коефіцієнта узгодженості, меншим порогу застосування. Умова завершення процесу зворотного зв'язку — це або досягнення коефіцієнтом узгодженості рівня порогу застосування, або, у разі численних відмов експертів, доходження висновку про неможливість отримання достовірних узагальнених оцінок у складі даної експертної групи.

Після знаходження ІУМПП, на наступному кроці пропонується впорядкувати елементи початкових експертних матриць за зменшенням відмінностей з відповідними елементами знайденої ІУМПП. Таке впорядкування пропонується виконати з метою подальшого використання цих елементів у такій послідовності в діалогах з експертами, коли дається пропозиція зміни даних елементів у бік наближення до відповідних елементів ІУМПП. Тобто, у першу чергу, пропонується змінювати елементи індивідуальних МПП експертів, що найбільш віддалені від відповідних елементів знайденої ІУМПП, яка є певним усередненням МПП експертів. Завдяки незначному кроку зміни елементів МПП, який пропонуються експертам для підвищення узгодженості, стає можливою збіжність запропонованого алгоритму зворотного зв'язку.

Висновки

Запропонований у даній статті метод агрегації індивідуальних ЕО, заданих у вигляді мультиплікативних, зворотно-симетричних, неповних МПП, елементи яких являють собою переваги одного об'єкта з пари над іншим у деякій, обраній для кожної пари, шкалі оцінювання, дозволяє отримати узагальнені оцінки ваг об'єктів у результаті проведення групової експертизи. Метод включає в себе ряд підходів до отримання агрегованих групових оцінок, у тому числі організацію зворотного зв'язку з експертами задля підвищення узгодженості оцінок, даних експертами.

Реалізація методу може використовуватися для організації групової експертизи в СППР, що можуть адаптуватися до рівня компетентності експерта в питанні,

яке ним розглядається. Адаптація полягає у наданні конкретному експертові можливості виконувати свої оцінки (порівняння об'єктів) у шкалі, що за своєю докладністю адекватно відповідає рівню його компетентності в питанні експертизи.

1. Циганок В.В. Концепція створення систем підтримки прийняття рішень, що адаптивні до рівня компетентності експертів / В.В. Циганок // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13, № 2. — С. 106–114.
2. Циганок В.В. Вибір шкали оцінювання експертом у процесі виконання ним парних порівнянь в системах підтримки прийняття рішень / В.В. Циганок // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2011. — Т. 13, № 3. — С. 92–105.
3. Мандель И.Д. Кластерный анализ / И.Д. Мандель // Финансы и статистика. — 1988. — 176 с.
4. Журавлев Ю.И. Об одном способе уточнения алгоритма таксономии при помощи распознающих методов типа голосования / Ю.И. Журавлев, Р. Юнусов // Ж-л вычисл. матем. и матем. физ. — 1971. — Т. 11, № 5. — С. 1344–1347.
5. Миркин Б.Г. Группировки в социально-экономических исследованиях / Б.Г. Миркин // Финансы и статистика. — 1985. — 224 с.
6. Воронин Ю.А. Теория классифицирования и ее приложения / Ю.А. Воронин // Новосибирск: Наука. — 1985. — 232 с.
7. Elliott M.A. Selecting Numerical Scales for Pairwise Comparisons / M.A. Elliott // Reliability Engineering and System Safety. — 2010. — 95. — P. 750–763.
8. Saaty T.L. Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process / T.L. Saaty // RWS Publications. Pittsburgh. PA. — 2006.
9. Hartley R.V.L. Transmission of information / R.V.L. Hartley // Bell System Technical Journal. — 1928. — 7. — С. 535–563.
10. Totsenko V.G. The Agreement Degree of Estimations set with Regard of Experts Competency / V.G. Totsenko // Proceedings of the Fourth International Symposium on the Analytic Hierarchy Process, Simon Fraser University. — Vancouver (Canada). — 1996. — P. 229–241.
11. Totsenko V.G. Spectral Method for Determination of Consistency of Expert Estimate Sets / V.G. Totsenko // Engineering Simulation. — 2000. — 17. — P. 715–727.
12. Циганок В.В. Комбінаторний алгоритм парних порівнянь зі зворотним зв'язком з експертом / В.В. Циганок // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2000. — Т. 2, № 2. — С. 92–102.
13. Циганок В.В. Визначення ефективності методів агрегації експертних оцінок при використанні парних порівнянь / В.В. Циганок // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2009. — Т. 11, № 2. — С. 83–89.
14. Циганок В.В. Метод обчислення ваг альтернатив на основі результатів парних порівнянь, проведених групою експертів / В.В. Циганок // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2008. — Т. 10, № 2. — С. 121–127.
15. Циганок В.В. Дослідження феномену реверсу рангів при застосуванні методів парних порівнянь / В.В. Циганок // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2008. — Т. 10, № 3. — С. 96–101.
16. Cayley A. «A Theorem on Trees» / A. Cayley // Quart. J. Math. — 1889. — 23. — P. 376–378.

Надійшла до редакції 05.12.2011