ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 2000. Том 2 (74), N 3. С. 94 – 99*

УДК 532.528

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

**Ю. А. СЕМЕНОВ**

*Институт технической механики НАН Украины, Днепропетровск*

*Получено 15.06.2000*

Предложен прямой метод нахождения потенциала течения для обратных краевых задач, в том числе для кавитационных течений. Метод основан на теории функций комплексного переменного и позволяет находить комплексную скорость и производную комплексного потенциала по значению их модуля и аргумента на границе течения. Возможности метода демонстрируются на примере решения классической задачи симметричного кавитационного обтекания клина (пластинка в частном случае).

Запропоновано безпосередній метод визначення потенціалу течії для зворотних крайових задач, в тому числі для кавітаційних течій. Метод заснований на теорії фунцій комплексної змінної і дозволяє визначати комплексну швидкість та похідну комплексного потенціалу за значенням їх модуля і аргумента на границі течії. Можливості метода демонструються на прикладі розв'язання класичної задачі симетричного кавітаційного обтікання клину (пластинки в окремому випадку).

A direct method of finding the flow potential for inverse boundary-value problems, including for cavity flows is proposed. The method is based on the theory of functions of complex variable and make it possible to find the functions of complex velocity and the derivative of the complex potential from the values of their modulus an argument at the boundary of the flow region. The method has been evaluated when solving the problem on the unsteady cavity flow around a wedge (a plate as a special case).

## ВВЕДЕНИЕ

Решение нелинейных задач плоских кавитационных течений традиционно рассматривается в рамках модели идеальной жидкости. Возникающая при этом проблема замыкания каверны приводит к неединственности решения, требует определенных предположений относительно течения в области замыкания каверны и, вследствии этого, не позволяет рассматривать течения с частичной и развитой кавитацией в рамках одной задачи. В представленной работе наряду с разработкой метода решения нелинейных нестационарных кавитационных течений в рамках модели идеальной жидкости предложена "неявная" схема замыкания каверны, которая естественным образом вписывается в концепцию замыкания каверны на турбулентный след, возникающий за каверной в реальном течении. С использованием общепринятого подхода вязко-невязкого взаимодействия [1] для течений слабовязких жидкостей предложенный метод позволяет получить решение задачи нестационарного кавитационного течения в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости. При этом течения с частичной и развитой кавитацией могут быть рассмотрены в рамках одной задачи.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ВНЕШНЕГО НЕВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ

В работе [2] впервые решена в нелинейной постановке задача нестационарного кавитационного обтекания пластинки с использованием метода комплексного потенциала. Хотя решение получено для частного случая, при котором граница области течения не зависит от времени, оно показало возможность применения методов теории функций комплексного переменного к решению данного класса задач. В работе [3] приведен пример использования метода комплексного потенциала к решению задачи безотрывного обтекания окружности с нестационарной границей. В данной работе рассматривается двумерное нестационарное кавитационное обтекание клина идеальной жидкостью с замыканием каверны на криволинейный контур, форма которого до решения задачи не определена. Клин неподвижен. Каверна образуется на кромке клина в точке $O$ и замкнута на криволинейный контур $CB$, на котором задана функция модуля скорости $v^*(s,t)$. Здесь $s$ – пространственная координата вдоль контура, $t$ – время. Форма контура $CB$ заранее неизвестна и определяется из решения задачи. В начальный момент времени течение полагается стационарным (либо задана область течения и параметры нестационарного течения в этой области). Требуется определить в последующие моменты времени границу области течения и параметры течения в этой области при условии, что давление вдоль контура каверны постоянно, а давление вдоль контура замыкания, давление и скорость потока на бесконечности $p_\infty$, $v_\infty$ есть заданные функции времени.

Решение задачи ищется методом комплексного потенциала путем построения выражений комплексной скорости и производной комплексного потенциала, удовлетворяющих граничным условиям. В качестве области изменения параметра $u$ выбран первый квадрант, соответствие точек физической плоскости $z$, плоскости параметра $u$ и плоскости комплексного потенциала $W$ показано на рис. 1. Нули и полюса в выражениях комплексной скорости и производной комплексного потенциала могут быть определены методом особых точек Чаплыгина [4], так как нестационарность течения не приводит к появлению дополнительных особенностей по сравнению с соответствующим стационарным течением. Модуль скорости на границе каверны и контуре замыкания есть функция пространственной координаты $s$ и времени. Отображая методом конформных отображений область параметра $u$ на область годографа, выражение комплексной скорости можно получить в виде

$$\frac{dW}{dz} = v_0(t)\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\frac{\mu}{\pi}} \times \tag{1}$$

$$\times \exp\left[-\frac{i}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial \ln v}{\partial \eta} \ln\left(\frac{i\eta - u}{i\eta + u}\right) d\eta\right],$$

где $v(\eta, t)$ – модуль скорости на свободной границе, то есть контуре каверны $OC(0 < \eta < \eta_c)$ и контуре замыкания $CD(\eta_c < \eta < \infty)$; $v_0(t)$ – модуль скорости в точке $O$. Подставляя значения $u = \xi$ в выражение (1), можно видеть, что на действительной оси области параметра, соответствующей смачиваемой части профиля выполняется условие непротекания, то есть

$$\arg \frac{dW}{dz} = 0.$$

Мнимой оси области параметра соответствует свободная граница. Если положить $u = i\eta$, то

$$\left|\frac{dW}{dz}\right| = v(\eta, t),$$

то есть равно заданной функции модуля скорости на свободной границе. Выражение производной комплексного потенциала можно получить аналогичным образом:

$$\frac{dW}{dz} = N(t) u \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln(u^2 + \eta^2) d\eta\right], \tag{2}$$

где $N(t)$ – масштабный множитель; $\theta = \operatorname{arctg}(v_n/v_s)$, $v_n(\eta, t), v_s(\eta, t)$ – нормальная и тангенциальная составляющие скорости на свободной границе.

Подставляя значения $u = \xi$ либо $u = i\eta$ в выражение (2), можно видеть, что производная комплексного потенциала также удовлетворяет граничным условиям: на действительной оси области параметра

$$\mathbf{Im}\,(dW) = \mathbf{Im}\,\left(\frac{dW}{du}\,|_{u=\xi}\right) = 0,$$

то есть мнимая часть комплексного потенциала постоянна. Мнимая ось области параметра соответствует границе каверны. Если $ds$ – элемент границы каверны, $\overline{v} = v_s - iv_n$ – комплексно сопряженная скорость, то по определению комплексного потенциала $dW = \overline{v}ds = v_s ds - iv_n ds$, следовательно,

$$\frac{Im(dW)}{Re(dW)} = \frac{d\Psi}{d\Phi} = -\frac{v_n}{v_s}.$$

Выражение (2) удовлетворяет данному условию. Таким образом, выражения комплексной скорости и производной комплексного потенциала для нестационарного течения отличаются от соответствующих выражений для стационарного течения наличием регулярной функции, вид которой сохраняется для других задач нестационарных кавитационных течений при выборе первого квадранта в качестве области параметра.

Из выражений (1) и (2) можно получить выражение

$$\frac{dz}{du} = \frac{N}{v_0}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\frac{\mu}{\pi}} \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln(u^2 + \eta^2) d\eta + \right. \tag{3}$$

$$\left. + \frac{i}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial \ln v}{\partial \eta} \ln\left(\frac{i\eta - u}{i\eta + u}\right) d\eta\right].$$

Интегрированием выражения (3) в области параметра можно рассчитать форму свободной границы в произвольный момент времени. В решение задачи (1) - (3) время входит как параметр. Это отражает тот факт, что линии тока определяются параметрами течения в текущий момент времени

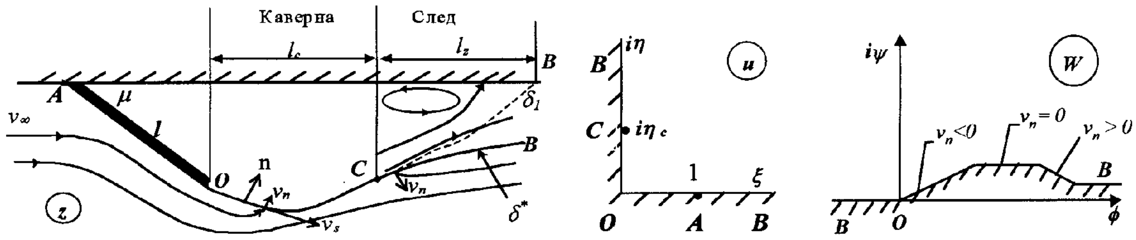


Рис. 1. Схема нестационарного кавитационного обтекания клина

и не зависят от предыстории движения жидкости [5].

Для определения параметров $N$ и $\eta_c$ имеются условие постоянства длины щеки клина и условие замкнутости каверны:

$$\int\limits_0^1 \left|\frac{dz}{du}\right|_{u=\xi} d\xi = l, \qquad (4)$$

$$\mathbf{Im}\left(\int\limits_0^\infty \frac{dz}{du}\bigg|_{u=i\eta}\right) = l\sin(\mu). \qquad (5)$$

Условие замкнутости каверны (5) после преобразований можно представить в виде

$$\int\limits_0^{\eta_-} \frac{\partial \ln v}{\partial \eta}\eta d\eta + \int\limits_{\eta_-}^\infty \frac{\partial \ln v^*}{\partial \eta}\eta d\eta + \mu = 0, \qquad (6)$$

где $\eta_c$ – точка на мнимой оси области параметра, соответствующая точке замыкания каверны $C$. Условие (6) выполняется как для стационарного, так и для нестационарного течения.

Функции $v(\eta,t)$ для $0 < \eta < \eta_c$ и $\theta(\eta,t)$ для $0 < \eta < \infty$ определяются на свободной границе из динамического и кинематического граничных условий. На контуре замыкания $CB, \eta_c < \eta < \infty$, функция $v(\eta,t) = v^*(\eta,t)$ должна быть определена из уравнений нестационарного течения в следе либо задана. Предположение $v^*(\eta,t) = v^*(t)$ приводит выражение комплексной скорости (1) к виду, соответствующему замыканию каверны по второй схеме Тулина.

Интегрируя выражение (2), можно получить выражение комплексного потенциала

$$W(u,t) = N(t)\int u \exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\ln(u^2+\eta^2)d\eta\right] du. \qquad (7)$$

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ

Интеграл Коши-Лагранжа, записанный для точки $O$ и произвольной точки свободной поверхности с учетом гравитации $g$ и поверхностного натяжения $\Theta$ имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p_c}{\rho} + gy - \frac{\Theta}{R} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_c}{\rho} = C(t), \qquad (8)$$

где $R$ – радиус кривизны свободной поверхности; $y$ – координата в направлении, противоположном гравитации $g$; $p_c$ – давление в каверне; $\rho$ – плотность.

Потенциал в точке $O$ принимается равным нулю, поэтому

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\ |_{u=0} = 0.$$

Определяя из выражения (7)

$$\Phi(\eta,t) = Re[W(u,t)]_{u=i\eta}$$

и дифференцируя полученное выражение по времени, можно получить производную потенциала по времени, входящую в динамическое граничное условие:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\dot N}{N}\Phi(\eta,t) - \frac{N(t)}{\pi}\int\limits_0^\eta\int\limits_0^\infty \frac{\partial\dot\theta}{\partial\eta'}\ln(\eta'^2-\eta^2)d\eta' \times$$
$$\times \exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial\eta'}\ln(\eta'^2-\eta^2)d\eta'\right] d\eta, \qquad (9)$$

где точка над переменной обозначает производную по времени.

Динамическое граничное условие (8) с учетом выражения (9) позволяет определить функцию модуля скорости на свободной границе, входящую в выражение комплексной скорости (1):

$$v^2 = v_0^2 - 2\frac{\partial\Phi}{\partial t} - 2\frac{p-p_c}{\rho}. \qquad (10)$$

Давление на контуре каверны $p = p_c$, на контуре замыкания функция $p = p[s(\eta, t)]$ определяется из расчета нестационарного турбулентного течения в следе за каверной. Дифференцируя выражение (10) по координате $\eta$ с учетом

$$\frac{ds}{d\eta} = \left|\frac{dz}{du}\right|_{u=i\eta},$$

можно получить интегро-дифференциальное уравнение для определения функции $v(\eta)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{v}\exp\left[\int\limits_0^\infty \frac{\partial\theta}{\partial\eta'}\ln|\eta'^2-\eta^2|d\eta'\right]\times$$

$$\times\left[\dot{N} - \frac{N}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\eta'}\ln(\eta'^2-\eta^2)d\eta'\right]d\eta - \frac{1}{v}\frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{d\eta}.$$

## КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ

Рассмотрим элемент $dz$ свободной границы. Угол наклона свободной границы к оси $X$ в текущий момент времени есть $\arg(dz)$. Изменение угла наклона границы в некоторой точке вызвано изменением нормальной компоненты скорости вдоль границы, поэтому можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial[\arg(dz)]}{\partial t} = \frac{dv_n}{ds}, \tag{11}$$

где $\partial s = |dz|$.

Для нестационарных кавитационных течений скорость движения границы существенно меньше скорости жидкости на границе, поэтому можно положить $v_s = v$, а $v_n = -v\theta$. Учитывая, что

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \left|\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{u=i\eta} = \frac{1}{v}\left|\frac{\partial w}{\partial u}\right|_{u=i\eta},$$

кинематическое граничное условие (11) можно представить в виде

$$\frac{\partial[\arg(dz)]}{\partial t} = v\left(\left|\frac{dW}{du}\right|_{u=i\eta}\right)^{-1}\left(\frac{dv_n}{d\eta}\theta + v\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right). \tag{12}$$

Определяя из выражения (3) $\arg(dz)$ на свободной границе ($u = i\eta$) и подставляя в выражение (12), получим интегро-дифференциальное уравнение для функции $\theta(\eta, t)$:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = -\theta\frac{\partial\ln v}{\partial\eta} - \frac{1}{v^2}\left|\frac{dW}{du}\right|_{u=i\eta}\times \tag{13}$$

$$\times\left(\dot{\theta} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{v}\frac{\partial\dot{v}}{\partial\eta'} - \frac{\dot{v}}{v}\frac{\partial\ln v}{\partial\eta'}\right)\ln\left|\frac{\eta'-\eta}{\eta'+\eta}\right|d\eta'\right).$$

Выражения (11), (14), представляют собой систему двух интегро-дифференциальных уравнений для определения функций $\dot{v}(\eta, t)$ и при заданных начальных условиях. Дифференцируя по времени условия (4), (6), можно определить производные по времени $\dot{N}$ и $\dot{\eta}_c$. Таким образом, задача сводится к системе обычных дифференциальных уравнений относительно функций $N(t)$ и $\eta_c(t)$ при интегрировании которой на каждом шаге по времени требуется решение системы двух интегро-дифференциальных уравнений относительно $\dot{v}(\eta, t)$. Полученная система интегро-дифференциальных уравнений может быть решена при заданной функции $p(s, t)$ вдоль контура замыкания каверны. Эта функция может быть найдена из решения задачи нестационарного течения в следе за каверной в приближении теории пограничного слоя.

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СЛЕДЕ

Течения с образованием паровых каверн в слабовязких жидкостях по своей природе являются нестационарными [6, 7]. Нестационарность течения обусловлена пульсациями жидкости в области замыкания каверны, где существенным образом проявляются реальные свойства жидкости: вязкость, поверхностное натяжение, газонасыщение. В данной работе ограничимся простейшей моделью следа в виде застойной области, в которой скорость жидкости существенно меньше скорости на границе невязкого течения, так что конвективной производной в уравнении движения в проекции на ось $X$ можно пренебречь:

$$\rho_0\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial y}, \tag{14}$$

где $\rho_0$ – осредненная поперек следа плотность двухфазной среды.

Касательное напряжение $\tau$ в соответствии с первой моделью турбулентности Прандтля определяется выражением

$$\tau = \chi\rho_0(v_\delta - v_x)^2, \tag{15}$$

где $\chi$ – коэффициент турбулентности; $v_\delta - v_x$ – относительная скорость невязкого и вязкого потоков на внешней границе слоя смешения в проекции скорости на ось $X$.

Среднее значение $\partial\tau/\partial y$ поперек следа определяется выражением

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\tau}{\delta^*},$$

где $\delta^*$ – толщина вязкого слоя.

Изменение длины каверны происходит за счет притока жидкости в каверну либо за счет оттока жидкости из каверны. Поэтому осредненная поперек следа скорость $v_x$ связана с изменением длины каверны выражением

$$v_x = \frac{dl_c}{dt} = \dot{l}_c, \qquad (16)$$

где

$$l_c = Re\left(\int\limits_0^{\eta_c} \left.\frac{dz}{du}\right|_{u=i\eta} d\eta\right).$$

С учетом выражений (15), (16) уравнение количества движения (14) можно записать в виде

$$\rho_0 \ddot{l}_c = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau}{\delta^*}. \qquad (17)$$

Интегрируя выражение (17) вдоль оси $X$ с учетом граничного условия, получаем уравнение для расчета продольного градиента давления в струйной области смешения:

$$p(s,t) = \rho_0 \chi \int\limits_{l_c}^{s} \frac{(v_\delta(s',t) - \dot{l}_c)^2}{\sigma^*(s',t)} ds' - \rho_0 (s - l_c)\ddot{l}_c. \quad (18)$$

Длина застойной области определялась с учетом эмпирического коэффициента нарастания ширины зоны смешения из условия $\delta_1(l_z) = 0$, где $\delta_1$ находится интегрированием уравнения

$$\frac{d\delta_1}{dx} = \frac{d\delta^*}{dx} - \frac{b}{c}.$$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА КАВИТАЦИИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ

В данном решении давление на бесконечности имеет особенность первого порядка. Это связано с тем, что изменение площади области, ограниченной контуром каверны и контуром замыкания бесконечно. Интеграл Коши-Лагранжа, связывающий параметры набегающего потока и параметры течения в точке $O$, имеет вид

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{x=-\infty} + \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{v_\infty^2}{2} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{u=0} + \frac{p_c}{\rho} + \frac{v_0^2}{2},$$

где $p_\infty$, $v_\infty$ – давление и скорость в набегающем потоке; потенциал в точке $O$ принят $\Phi(0,t) = 0$, следовательно,

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{u=0} = 0.$$

Вследствие особенности в бесконечности, в данной задаче число кавитации определено с учетом производной потенциала по времени:

$$\sigma(t) = \frac{p_\infty + \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t}\,|_{x=-\infty} - p_c}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2}, \qquad (19)$$

тогда скорость в точке $O$ будет

$$v_0(t) = v_\infty \sqrt{1 + \sigma(t)}.$$

Плоские течения являются идеализацией реального трехмерного течения и могут реализовываться в ограниченной части пространства, где эффектами трехмерности, сжимаемости жидкости и податливостью границ потока можно пренебречь. Для таких течений при заданном давлении на некотором расстоянии от тела $p_1$ число кавитации будет находится в процессе решения задачи из уравнения

$$\sigma = \frac{p_1(t) - p_v}{0,5\rho v_\infty^2} + \frac{2}{\rho v_\infty^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Чем дальше от пластинки слева задано давление $p_1(t)$, тем больший вклад будет вносить производная потенциала и тем меньше будет изменение числа кавитации $\sigma$, а следовательно, скорости $v_0$ в точке $O$. Физически это объясняется инерционностью жидкости в области двумерного течения.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 2. представлены зависимости коэффициента сопротивления пластинки ($\mu = \pi/2$), коэффициента давления в точке $H(C_H = 2(p_H - p_c)/(\rho v_\infty^2))$ на расстоянии $2h$ перед пластинкой и относительной длины каверны от безразмерного времени $t = T^* v_0/h$ при увеличении числа кавитации.

Из рис. 2 видно, что коэффициент сопротивления в нестационарном течении имеет значения, превышающие несколько значения для стационарного течения при текущем числе кавитации. При $t = 2$ коэффициент сопротивления принимает стационарное значение. Длина каверны остается постоянной для $t < l_c/v_0$ и начинает уменьшаться, когда возмущение скорости на свободной границе

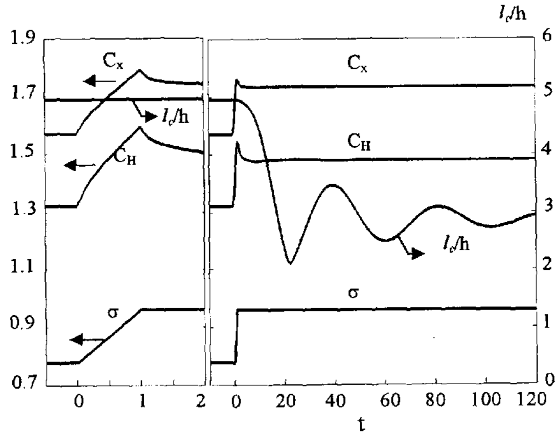


Рис. 2. Зависимости коэффициента сопротивления пластинки, коэффициента давления в точке $H$ и относительной длины каверны от безразмерного времени при увеличении числа кавитации

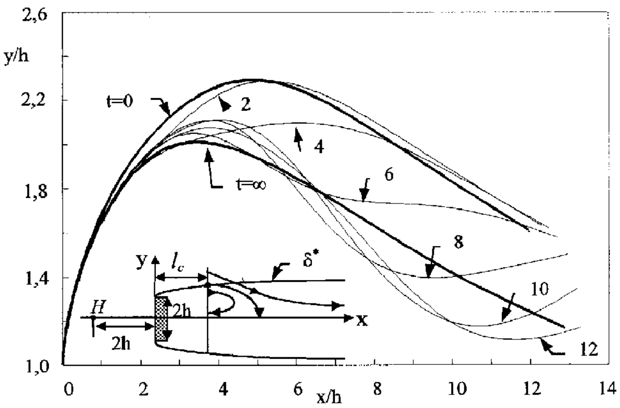


Рис. 3. Контуры свободной границы (каверна и интегральная толщина вытеснения вязкого следа) в различные моменты при изменении числа кавитации

достигают области замыкания каверны и след начинает перемещаться под действием дополнительного продольного градиента давления. В представленных вычислениях коэффициент турбулентной вязкости был принят равным $\chi = 0,05$; коэффициент нарастания ширины зоны смешения $b = 0,27$. При меньших значениях устойчивого решения получить не удавалось. Число Струхаля, определенное по переходному процессу изменения длины каверны, составляет $Sh(2h)/(v_0)f = 0,05$.

На рис. 3 представлены контуры свободной границы (каверна и интегральная толщина вытеснения вязкого следа) в различные моменты времени при изменении числа кавитации, представленном на рис. 2. Из рис. 3 можно видеть, что с началом изменения числа кавитации практически вся граница начинает перемещаться. Однако перемещение границы для $x > 2v_0t$ незначительно. Максимальное смещение свободной границы в направлении, перпендикулярном ее стационарному положению, соответствует координате $x \approx v_0t$.

## ВЫВОДЫ

Предложенный метод позволяет рассчитывать нестационарные гидродинамические характеристики кавитационного течения в нелинейной постановке задачи.

1. *Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю.* Турбулентные отрывные течения.– М.: Наука, 1979.– 368 с.
2. *Karman T.* Accelerated flow of an incompressible fluid with wake formation. – Ann. mat. pura ed appl., 1949. – t. XXIX. – P. 4.
3. *Голубева О.В.* Курс механики сплошных сред.– М.: Высш. шк., 1972.– 368 с.
4. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости.– М.: Наука, 1976.– 536 с.
5. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкостей и газа.– М.: Наука, 1978.– 758 с.
6. *Кнепп Р., Дейли Дж., Хеммит Ф.* Кавитация.– М.: Мир, 1974.– 687 р.
7. *Michel J.M.* Some Features of Water Flows With Ventilated Cavities. Trans. ASME, Series D // J. of Basic Engineering.– 1984.– No. 3.– P. 140–149.