УДК 004.942

Ю. Е. Бояринова
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Неканонические гиперкомплексные числовые системы размерности 2 и их изоморфизмы

Исследованы структура и изоморфизмы неканонических коммутативных гиперкомплекных числовых систем размерности 2 общего вида.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, изоморфизм, коммутативная система, базис, неканоническая система.*

Вступление

Исследования коммутативных гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) в настоящее время в основном ограничивается коммутативными системами [1, 2]. В то же время исследование неканонических систем имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Так, например, при факторизации бесконечномерных гиперкомплексных систем получаются, как правило, неканонические гиперкомплексные числовые системы [3], исследование которых выходит на повестку дня.

Обзор существующих работ

Неканонические системы второй размерности рассматривались и ранее [2, 4–6], однако полное их обозрение не проведено.

Напомним определение канонической гиперкомплексной числовой системы. ГЧС называется канонической, если в выражении произведения двух любых базисных элементов

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k, \quad i, j \in [1, n] \tag{1}$$

либо все структурные константы γ_{ij}^k равны нулю, либо только одна структурная константа принимает значения ± 1, а все остальные равны нулю.

С точки зрения этого определения ГЧС $D(e,2)$ размерности 2 с базисом (e_1, e_2) и таблицей умножения

$$\begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & 0 \end{array} \qquad (2)$$

является канонической, а системы $\Gamma_{p,q}(e,2)$ и $W_\alpha(e,2)$ с таблицами умножения соответственно

$$\begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & \alpha e_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & pe_1 + qe_2 \end{array} \qquad (3)$$

являются неканоническими.

Некоторые неканонические ГЧС вида (3) рассмотрены в работах [1, 4–6], основные результаты которых изложены ниже.

Любая система $\Gamma(e,2)$ размерности $n = 2$, базис которой содержит единичный элемент, и таблица умножения имеет вид (3), с помощью линейных преобразований

$$\begin{aligned} e_1 &= E_1 \\ e_2 &= -\frac{q}{2k}E_1 + \frac{1}{k}E_2 \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} e_1 &= E_1 \\ e_2 &= E_2 - \frac{q}{2}E_1 \end{aligned} \qquad (4)$$

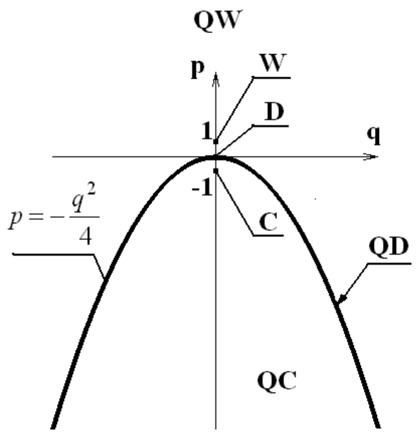
может быть преобразована в только одну из трех изоморфных ей канонических систем: систему комплексных чисел $C(E,2)$, систему двойных чисел $W(E,2)$ или систему дуальных чисел $D(E,2)$. Критерием изоморфности является знак величины $k = p + \frac{q^2}{4}$, если

$$p + \frac{q^2}{4} \begin{cases} < 0 \cong C(E,2), \\ = 0 \cong D(E,2), \\ > 0 \cong W(E,2), \end{cases} \qquad (5)$$

где знак $\cong$ означает изоморфизм гиперкомплексных систем.

Правило (5) разбивает декартову координатную плоскость структурных констант p и q на две незамкнутые области, которые отвечают системам, изоморфным C и W, а граница между ними отвечает системам, изоморфным D, как это показано на рисунке.

На этом же рисунке точка $(0, 0)$ отвечает канонической системе дуальных чисел D, точка с координатами $(0, 1)$ — канонической системе двойных чисел W, а точка $(0, -1)$ — канонической системе комплексных чисел C.



Области классов изоморфизмов систем размерности $n=2$,
базисы которых содержат единичный элемент

Также в работах [2, 4–6] показано: система двойных чисел $W(e,2)$ с таблицей умножения

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

(6)

изоморфна системе $W_1(E,2)$ с таблицей умножения

	E_1	E_2
E_1	E_1	0
E_2	0	E_2

, (7)

являющейся прямой суммы двух вещественных систем $W_1 = R \oplus R$. Изоморфизм систем (6) и (7) описывается парой линейных преобразований:

$$\begin{array}{ll} e_1 = E_1 + E_2, & E_1 = \dfrac{1}{2}(e_1 + e_2), \\ e_2 = E_1 - E_2. & E_2 = \dfrac{1}{2}(e_1 - e_2). \end{array} \qquad (8)$$

Исследование неканонической коммутативной системы общего вида

Рассмотрим неканоническую коммутативную систему $\Gamma(e,2)$ размерности 2 с базисом $e=(e_1,e_2)$ самого общего вида

$$\Gamma(e,2) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & a_1e_1 + a_2e_2 & b_1e_1 + b_2e_2 \\ e_2 & b_1e_1 + b_2e_2 & c_1e_1 + c_2e_2 \\ \hline \end{array}, \qquad (9)$$

где все структурные константы — вещественные числа. Конечно, не любая таблица вида (9) будет представлять собой гиперкомплексную числовую систему. Она, прежде всего, должна иметь единичный элемент ε.

Если

$$\varepsilon = x_1e_1 + x_2e_2, \qquad (10)$$

то наличие единичного элемента будет требовать существования нетривиального вещественного решения гиперкомплексного уравнения

$$W\varepsilon = W, \qquad (11)$$

где $W = w_1e_1 + w_2e_2 \in \Gamma(e,2)$. Уравнение (11) превращается в систему линейных вещественных уравнений

$$\begin{cases} (w_1a_1 + w_2b_1)x_1 + (w_1b_1 + w_2c_1)x_2 = w_1, \\ (w_1a_2 + w_2b_2)x_1 + (w_1b_2 + w_2c_2)x_2 = w_2, \end{cases} \qquad (12)$$

откуда

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_2w_1^2 + (c_2 - b_1)w_1w_2 + c_1w_2^2}{(a_1b_2 - a_2b_1)w_1^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)w_1w_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)w_2^2}, \\ x_2 &= \frac{-a_2w_1^2 + (a_1 - b_2)w_1w_2 + b_1w_2^2}{(a_1b_2 - a_2b_1)w_1^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)w_1w_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)w_2^2}. \end{aligned} \qquad (13)$$

Как видно из (13), компоненты единичного элемента зависят не только от структурных констант гиперкомплексной системы $\Gamma(e,2)$, что, в общем, не противоречит определению единичного элемента, но и от компонентов коэффициента W уравнения определения единичного элемента (11), чего не должно быть. Единственным методом избавления зависимости выражений (13) от компонентов числа W является пропорциональность коэффициентов квадратичных форм, стоящих в числителях и знаменателях (13):

$$\frac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{c_2 - b_1}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{-c_1}{b_1c_2 - b_2c_1}, \qquad (14)$$

$$\frac{-a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{a_1 - b_2}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{b_1}{b_1c_2 - b_2c_1}. \qquad (15)$$

Выражения (14) и (15) представляют собой систему из четырех независимых уравнений, которые определяют такие требования к структурным константам, что ГЧС (9) будет иметь единичный элемент ε .

Система четырех уравнений (14), (15) имеет шесть неизвестных структурных констант. Будем считать константы c_1, c_2 свободными, поскольку ГЧС с такими структурными константами уже известны.

Тогда система (14), (15) имеет два решения.

1 решение:

$$a_1 \in R,\ a_2 = 0,\ \ b_1 = 0,\ \ b_2 = a_1,\ \ c_1, c_2 \in R. \tag{16}$$

Это решение приводит к такой системе:

$$\Gamma_1(e,2) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & a_1e_1 & a_1e_2 \\ e_2 & a_1e_2 & c_1e_1 + c_2e_2 \\ \hline \end{array}\ . \tag{17}$$

Система $\Gamma_1(e,2)$ имеет единичный элемент ε, не являющийся элементом базиса

$$\varepsilon = \frac{1}{a_1} e_1 , \tag{18}$$

в чем можно убедиться непосредственно:

$$W\varepsilon = (w_1e_1 + w_2e_2)\frac{1}{a_1}e_1 = w_1\frac{1}{a_1}a_1e_1 + w_2\frac{1}{a_1}a_1e_2 = w_1e_1 + w_2e_2 = W\,. \tag{19}$$

Линейным невырожденным преобразованием базиса $e = (e_1, e_2)$ можно перейти к новому базису:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{a_1} e_1, \\ f_2 &= e_2, \end{aligned} \tag{20}$$

что дает ГЧС $\Gamma_2(f,2)$, изоморфную $\Gamma_1(e,2)$:

$$\Gamma_2(f,2) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & f_1 & f_2 \\ \hline f_1 & f_1 & f_2 \\ f_2 & f_2 & a_1c_1f_1 + c_2f_2 \\ \hline \end{array}\ . \tag{21}$$

Система $\Gamma_2(f,2)$ — это система, совпадающая с точностью до обозначений с системой $\Gamma_{p,q}(e,2)$. В зависимости от знака величины

$$a_1c_1 + \frac{c_2^2}{4}, \tag{22}$$

она изоморфна одной из «классических» систем: комплексной $C(e,2)$, дуальной $D(e,2)$, двойной $W(e,2)$.

2 решение:

$$\begin{gathered} b_1 \in R, \quad b_2 = c_2 - b_1, \quad a_1 = \frac{b_1^2 - (b_1 - c_1)(b_1 - c_2)}{c_1}, \\ a_2 = -\frac{b_1(b_1 - c_2)}{c_1}, \quad c_1 \in R \setminus \{0\}, \quad c_2 \in R. \end{gathered} \tag{23}$$

Это решение приводит к такой системе:

$$\Gamma_3(e,2) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & \dfrac{b_1^2 - (b_1 - c_1)(b_1 - c_2)}{c_1} e_1 - \dfrac{b_1(b_1 - c_2)}{c_1} e_2 & b_1e_1 + (c_2 - b_1)e_2 \\ e_2 & b_1e_1 + (c_2 - b_1)e_2 & c_1e_1 + c_2e_2 \\ \hline \end{array}. \tag{24}$$

ГЧС $\Gamma_3(e,2)$ имеет единичный элемент

$$\varepsilon = \frac{1}{c_1c_2 - b_1(c_1 + c_2)}(c_1e_1 - b_1e_2), \tag{25}$$

в чем можно убедиться непосредственно, как и в (19), однако ввиду громоздкости выражений этот вывод здесь приводить не будем.

При значениях структурных констант

$$b_1 = 0, \quad b_2 = c_2, \quad a_1 = c_2, \quad a_2 = 0 \tag{26}$$

система (24) $\Gamma_3(e,2)$ превращается в изоморфную ей систему

$$\Gamma_4(e,2) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & c_2e_1 & c_2e_2 \\ e_2 & c_2e_2 & c_1e_1 + c_2e_2 \\ \hline \end{array} \tag{27}$$

с единичным элементом

$$\varepsilon = \frac{1}{c_2} e_1 . \tag{28}$$

Линейным невырожденным преобразованием базиса $e = (e_1, e_2)$ можно перейти к новому базису:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{c_2} e_1, \\ f_2 &= e_2, \end{aligned} \tag{29}$$

что дает ГЧС $\Gamma_5(f,2)$, изоморфную $\Gamma_4(e,2)$:

$$\Gamma_5(f,2) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & f_1 & f_2 \\ \hline f_1 & f_1 & f_2 \\ f_2 & f_2 & c_1 c_2 f_1 + c_2 f_2 \\ \hline \end{array} . \tag{30}$$

Система $\Gamma_5(f,2)$ — это система, совпадающая с точностью до обозначений с системой $\Gamma_{p,q}(e,2)$. В зависимости от знака величины

$$c_1 c_2 + \frac{c_2^2}{4} \tag{31}$$

она изоморфна одной из «классических» систем: комплексной $C(e,2)$, дуальной $D(e,2)$, двойной $W(e,2)$.

Выше отмечалось, что система двойных чисел $W(e,2)$ (6) изоморфна системе $W_1(E,2)$ с таблицей умножения (7).

Рассмотрим некоторые неканонические ГЧС диагонального типа (7). Наиболее общий вид такой системы:

$$\Gamma_6(e,2) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & \alpha e_1 + \beta e_2 & 0 \\ e_2 & 0 & \gamma e_1 + \delta e_2 \\ \hline \end{array} . \tag{32}$$

Исследуем, какие условия на структурные константы накладывает требование наличия в системе единичного элемента ε. Пусть ε имеет вид (10), тогда наличие единичного элемента будет требовать существования нетривиального вещественного решения гиперкомплексного уравнения (11), которое при выполнении всех операций превращается в систему линейных вещественных уравнений

$$\begin{cases} \alpha w_1 x_1 + \gamma w_2 x_2 = w_1, \\ \beta w_1 x_1 + \delta w_2 x_2 = w_2, \end{cases}$$

откуда

$$x_1 = \frac{\delta w_1 w_2 - \gamma w_2^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma) w_1 w_2},$$
$$x_2 = \frac{-\beta w_1^2 + \alpha w_1 w_2}{(\alpha\delta - \beta\gamma) w_1 w_2}.$$

Так как компоненты единичного элемента ε не должны зависеть от w_1 и w_2, то необходимо $\beta = \gamma = 0$, и система (32) принимает вид

$$\Gamma_7(e,2) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & \alpha e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & \delta e_2 \\ \hline \end{array} \qquad (33)$$

с единичным элементом $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} e_1 + \frac{1}{\delta} e_2$.

Определим оператор изоморфизма, переводящий систему $W_1(e,2)$ с таблицей умножения

$$W_1(e,2) = \begin{array}{|c|cc|} \hline & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & e_2 \\ \hline \end{array} \qquad (34)$$

в систему $\Gamma_7(f,2)$:

$$W_1(e,2) \overset{L}{\cong} \Gamma_7(f,2),$$

$$L: \begin{cases} e_1 = x_{11} f_1 + x_{12} f_2, \\ e_1 = x_{21} f_1 + x_{22} f_2. \end{cases}$$

Гиперкомплексная система изоморфизма в соответствии с (34) и (33) имеет вид

$$\begin{cases} e_1 e_1 = e_1 \\ e_1 e_2 = 0 \\ e_2 e_2 = e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x_{11}^2 f_1 + \delta x_{12}^2 f_2 = x_{11} f_1 + x_{12} f_2, \\ \alpha x_{11} x_{21} f_1 + \delta x_{12} x_{22} f_2 = 0, \\ \alpha x_{21}^2 f_1 + \delta x_{22}^2 f_2 = x_{21} f_1 + x_{22} f_2, \end{cases} \qquad (35)$$

что дает такую вещественную систему

$$\begin{cases} \alpha x_{11}^2 = x_{11}, \\ \delta x_{12}^2 = x_{12}, \\ \alpha x_{11} x_{21} = 0, \\ \delta x_{12} x_{22} = 0, \\ \alpha x_{21}^2 = x_{21}, \\ \delta x_{22}^2 = x_{22}, \end{cases}$$

которая имеет два решения:

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}
1	$\frac{1}{\alpha}$	0	0	$\frac{1}{\delta}$
2	0	$\frac{1}{\delta}$	$\frac{1}{\alpha}$	0

.

Оба решения эквивалентны в том смысле, что дают невырожденное линейное преобразование, переводящее систему $W_1(e,2)$ в $\Gamma_7(f,2)$, в чем можно убедиться, используя таблицы умножения (33), (34). Для определенности в дальнейших рассуждениях будем пользоваться первым решением:

$$e_1 = \frac{1}{\alpha} f_1, \quad e_2 = \frac{1}{\delta} f_2. \tag{36}$$

Как было показано выше, любая неканоническая ГЧС общего вида (9) может быть изоморфна ГЧС $\Gamma_{p,q}(e,2)$ вида (3), которая, в свою очередь, при $k = p + \frac{q^2}{4} > 0$ изоморфна системе $\Gamma_7(g,2)$. Построим изоморфный переход от системы $\Gamma_{p,q}(e,2)$ к системе $\Gamma_7(g,2)$. Для облегчения этого процесса осуществим этот переход через систему $W_1(f,2)$, так как изоморфные переходы между ней и двумя другими системами известны: (4) и (36) с соответствующим переименованием базисов. То есть, осуществим такую цепочку изоморфных переходов

$$\Gamma_{p,q}(e,2) \overset{L_1}{\cong} W_1(f,2) \overset{L_2}{\cong} \Gamma_7(g,2), \tag{37}$$

где

$$L_1:\begin{cases} e_1 = f_1, \\ e_2 = -\dfrac{q}{2k} f_1 + \dfrac{1}{k} f_2, \end{cases} \quad L_2:\begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{\alpha} g_1, \\ f_2 = \dfrac{1}{\delta} g_2. \end{cases} \tag{38}$$

С помощью соотношений (37), (38) можно построить оператор изоморфизма L_3 между системами $\Gamma_{p,q}(e,2)$ и $\Gamma_7(g,2)$, являющийся суперпозицией операторов L_1 и L_2:

$$\Gamma_{p,q}(e,2) \overset{L_3}{\cong} \Gamma_7(g,2).$$

Тогда:

$$L_3 = L_1 L_2 :\begin{cases} e_1 = \dfrac{1}{\alpha} g_1, \\ e_2 = -\dfrac{q}{2\alpha k} g_1 + \dfrac{1}{k\delta} g_2. \end{cases}$$

Выводы

В работе исследованы неканонические гиперкомплексные числовые системы размерности 2 общего вида. Показано, что при соответствующих наборах структурных констант они изоморфны «классическим» гиперкомплексным числовым системам.

1. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

2. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

3. *Бояринова Ю.Е.* Решение задачи множественности гиперкомплексных числовых систем // Матеріали 12-ї Міжнар. наук.-техн. конф. SAIT 2010. — Київ, 25–29 травня 2010 р. — 411 с.

4. *Изучение* специальных видов преобразования базиса в ГЧС второго порядка / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, А.А. Чапор, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 1999. — Т. 1, № 2. — С. 39–43.

5. *Синьков М.В.* Некоторые линейные и нелинейные операции обобщенных комплексных чисел / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2002. — Т. 4, № 3. — С. 55–61.

6. *Биплексные* числовые системы и функции в них / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова, Т.В. Синькова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2005. — Т. 7, № 4. — С. 21–28.

Поступила в редакцию 07.02.2011