

УДК 532.528

## О ЗАКОНЕ РАСШИРЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КАВЕРНЫ

Г. В. ЛОГВИНОВИЧ

НИИ ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Москва

Получено 15.06.2000

Работа посвящена методу расчета нестационарной суперкаверны. В статье приведен анализ расчета бесконечной каверны на основании энергетического принципа и проведено сравнение результатов расчета с классическими результатами. В работе дан новый вывод закона расширения поперечного сечения каверны для фиксированного относительно траектории кавитатора положения, что дает возможность рассчитать форму нестационарной суперкаверны.

Робота присвячена методу розрахунку нестационарної суперкаверни. В статті наведений аналіз розрахунку нескінченної каверни на основі енергетичного принципу та проведено порівняння результатів розрахунку з класичними результатами. В роботі дається нове виведення закону розширення поперечного перерізу каверни для фіксованого відносно траєкторії кавітатора положення, що дає можливість розрахувати форму нестационарної суперкаверни.

The work is devoted to the method of calculation of an unsteady supercavity. In the article, an analysis of calculation of an infinite cavity based on the energy principle is given, and a comparison of the calculation results with the classic results is performed. A new deduction of the law of expansion of the cross cavity section for a position fixed about the cavitator trajectory is shown in the work. This permits the unsteady cavity shape to be calculated.

### ВВЕДЕНИЕ

В теории "бесконечной" каверны, при числе кавитации  $\sigma = 0$ , известны две формулы, выведенные исходя из различных соображений. Формула М.И. Гуревича и Н. Левинсона (выведены независимо) определяет форму осесимметричного полутела конечного сопротивления

$$\tilde{R} = \frac{\sqrt{\tilde{x}}}{\sqrt[4]{\ln \tilde{x}}} \text{const} \quad \text{формально при } \tilde{x} \rightarrow 0. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{R} = R/R_n$ ,  $\tilde{x} = x/R_n$ , где  $R_n$  радиус кавитатора (например диска). При этом для диска  $\text{const} = 1.34$ .

Другая формула получена автором, исходя из предположения, что кинетическая энергия жидкости на единицу пути кавитатора при  $\sigma = 0$  равна работе силы сопротивления на этой единице пути. В результате получается

$$dT = -\frac{\rho}{2} \varphi 2\pi R \dot{R} ds = WV dt. \quad (2)$$

Определяя отсюда  $\varphi$  и используя граничное условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nu^2 = 0,$$

получается уравнение

$$-\frac{W}{\pi \rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{RR} \right) + \frac{1}{2} \dot{R}^2 = 0.$$

Первый интеграл

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\sqrt{W/\pi \rho}}{R \sqrt{\ln R + A}}. \quad (3)$$

Согласовав интегральный контур с эмпирическим контуром передней части каверны, получим формулу

$$\tilde{x} = 2 + \sqrt{\frac{2}{C_{x0}}} \int_{\tilde{x}}^{\tilde{R}} \tilde{R} \sqrt{\ln \tilde{R} + A} d\tilde{R}, \quad (4)$$

где  $A = 0,845$ .

Г.М. Антонов выполнил на ЭВМ вычисления контуров по формулам (1) и (4) для больших значений  $\tilde{x}$ . Результаты приведены в табл. 1.

Расхождения между контуром М.И. Гуревича (1) и Г.В. Логвиновича (4) составляют несколько процентов, причем первый контур несколько полнее второго, что можно объяснить неточностью точек согласования. Совпадение контуров каверн дает основание считать, что энергетический принцип расчета каверн может использоваться в различных случаях нестационарного движения.

В частности, интегрируя уравнение (3), если сопротивление  $W_0$  определяется при прохождении кавитатором точки траектории  $S_0$  в момент времени  $t_0$ , мы определяем закон расширения  $R = f(t - t_0, S_0, W_0)$  для фиксированной плоскости наблюдения, в которой расширяется данное сечение

Табл. 1.

$\tilde{x}$	Точн.расч.(1) $\dot{R}$	Точн.расч.(4) $\dot{R}$
0	1.0	1.0
5	2.67	2.59
10	3.45	3.36
25	5.02	4.90
50	6.77	6.63
100	9.19	9.03
250	13.88	13.70
500	19.06	18.86
1000	26.25	26.04
1500	31.69	31.48

каверны. В других точках траектории сопротивление  $W$  и скорость кавитатора  $V$  может иметь иные значения, а закон расширения соответственно изменится. В сущности уравнение (3) есть математическая формулировка "принципа независимости расширения каверны" для  $\sigma = 0$  при условиях, оговоренных в [1].

### КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО КАВИТАЦИИ

Энергетический принцип в общем виде выражается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial S}(U + T + W) = 0. \quad (5)$$

Здесь  $U$  – потенциальная энергия, определяемая как работа, затрачиваемая на расширение единицы длины каверны за счет преодоления разности статического давления  $P_0$  и давления в каверне  $P_k$ . Если давление в каверне постоянно,  $U = \pi R^2(P_0 - P_k)$ . Величину  $P_0 - P_k = \Delta P$  в общем случае можно считать функцией времени  $t$  или радиуса  $R$ .  $T$  – кинетическая энергия, определяемая как

$$dT = -\frac{\rho}{2}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} 2\pi R dS.$$

Для тонких каверн

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \approx \dot{R}.$$

Аналогично предыдущему в точке траектории

$$\varphi(S) = -\frac{W - \pi R^2 \Delta P}{\pi \rho R \dot{R}}, \quad \text{где } W = C_x \pi R_n^2 \frac{\rho V^2}{2},$$

причем  $V$  есть скорость кавитатора в точке  $S$ . В то же время  $W = \pi R_k^2 \Delta P$ , где  $R_k$  – максимальный радиус расширяющегося сечения каверны (близкий к единице исправляющий множитель  $K(\sigma)$  опущен).

Общее уравнение расширения, исходя из уравнения (5), будет

$$-\frac{W}{\pi \rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{R \dot{R}} \right) + \frac{\Delta P}{\rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{R}{\dot{R}} \right) = \frac{\Delta P}{\rho} - \frac{\dot{R}^2}{2}. \quad (6)$$

Замена  $\partial \varphi / \partial n$  величиной  $\dot{R}$  правомочна для той части каверны, где величина

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \cos(V, n)$$

достаточно мала. Поэтому начало вычисления контура надлежит вести не от кромок диска, а от некоторой точки границы, где наклон контура мал. Находя производные в уравнении (6), после несложных преобразований получаем

$$-\frac{W}{\pi \rho} - \frac{\Delta P}{\rho} R^2 = -\left( R \dot{R} \right)^2 \ln R + \text{const},$$

или

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\left( R_k^2 - R^2 \right) \frac{\Delta P}{\rho}}{\ln \frac{R}{R_1} + A} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Уравнение (7) по смыслу аналогично (3) и также выражает "принцип независимости расширения каверны". Если скорость кавитатора монотонно переменна вдоль траектории  $S$  для каждой точки  $S$ , то будет своя скорость, свое значение  $W$  и  $R_k$  и свое время  $t_k$  достижения максимального радиуса  $R_k$ ; постоянство давления  $\Delta P$  надлежит понимать в том смысле, что  $t_k \partial \Delta P / \partial t \ll \Delta P$ .

Результаты расчета по формулам (7) интересно сравнить с другими известными методами расчета каверн. Для стационарной каверны получается

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dt} V$$

и при постоянной величине  $\Delta P$  имеем

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\left( R_k^2 - R^2 \right) \frac{\sigma}{2}}{\ln \frac{R}{R_1} + A} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Как видно на рис. 1, профили каверн (8) вычисленные по формуле из [1]

$$R^2 = R_k^2 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{R_1^2}{R_k^2} \right) \left( 1 - \frac{x}{L_k} \right)^2 / k \right]$$

почти точно совпадают и в передней части касательны с профилем для  $\sigma = 0$ , вычисленным по формулам (1) и (4).

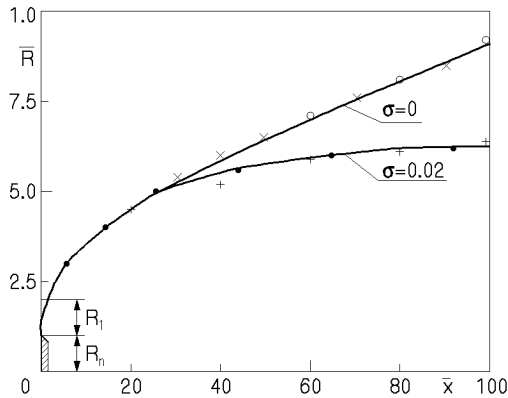


Рис. 1. Контуры каверн в невесомой жидкости, рассчитанные по различным формулам для  $\sigma = 0$  и  $0.02$ . Точка согласования с "эмпирическим" контуром для диска  $\frac{R_1}{R_n} = 2$ .  $\times$  – Логвинович,  $o$  – Гуревич

**ПРАКТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КАВЕРНЫ**

Из уравнения (8) получается

$$\frac{x}{R_n} = -\frac{2\sqrt{2C_x}}{\sigma} \int_{R_1}^R \left( \ln \frac{R}{R_1} + A \right)^{1/2} d \left( 1 - \frac{R^2}{R_k^2} \right)^{1/2} = \frac{2\sqrt{2C_x}}{\sigma} I \left( \sigma, \frac{R}{R_1} \right). \tag{9}$$

Начало отсчета  $x$  принято в точке контура каверны  $R_1 = 2R_n$ , где  $dR/dx = 1/4$ . Участок контура от краёв диска  $R_n$  до точки  $R_1$  аппроксимируется эмпирическим контуром

$$R = R_n \left( 1 + 3 \frac{x}{R_n} \right)^{1/3},$$

для которого

$$\frac{dR}{dx} = \left( \frac{R_n}{R_1} \right)^2.$$

Коэффициент сопротивления  $C_x = 0.21$  принят из тех соображений, что  $R_n^2 0.84 = C_x R_1^2$ . Постоянная  $A = 8(C_x - 6) = (1.68 - 8\sigma)$ . При этих условиях вычисленные  $I \left( \sigma, \frac{R_k}{R_1} \right)$  представлены в табл. 2, где

$$\frac{l_k}{R_n} \sigma = 2\sqrt{2C_x} I \left( \sigma, \frac{R_k}{R_1} \right) \simeq 1.3 I \left( \sigma, \frac{R_k}{R_1} \right).$$

В третьей строке дано  $l_k$  – расстояние от  $R = R_1$  до миделевого сечения каверны. Расстояние вдоль оси  $x$  от диска до  $R_1$  получается  $2.33R_n$  и

Табл. 2.

$\sigma$	$-I \left( \sigma, \frac{R_k}{R_1} \right)$	$\frac{l_k}{R_n} \sigma$	$\frac{L_k \sigma}{R_n} = 1.5 \sqrt{\lg \frac{1}{\sigma}}$
0.1	1.15	1.498	1.5
0.01	1.655	2.15	2.11
0.001	2.0	2.6	2.595
0.0001	2.25	2.925	3.00

Табл. 3.

$\delta^2$	$\sigma_L$ (10)	$\delta_\Gamma^2$ (12)	$\sigma_B$ (11)
0.04	0.105	0.039	0.089
0.01	0.04	0.0104	0.036
0.001	0.0063	0.001038	0.0059
0.0001	0.00086	0.000102	0.00082

эта поправка незначительна для всех малых  $\sigma$  (за исключением  $\sigma = 0.1$ ). Поэтому приближенно  $l_k \simeq L_k$  – полудлина каверны.

В четвертой строке дана аппроксимация численных расчетов Гузевского  $\frac{L_k}{R_n} \sigma = 1.5 \sqrt{\lg \frac{1}{\sigma}} \simeq 1.3 I \left( \sigma, \frac{R_k}{R_1} \right)$ . Близкое совпадение расчета по формуле (9) с результатами Гузевского еще раз показывает идентичность энергетического подхода и классического метода. Эта идентичность была установлена ранее [2].

В настоящее время известны две формулы, определяющие число кавитации  $\sigma$  по заданной величине  $\delta = R_k/L_k$ .

Первая, полученная Логвиновичем в 1976 г.,

$$-\delta^2 \ln e^2 \frac{\delta^2}{4} = \sigma_L = 2\delta^2 \left( \ln \frac{1}{\delta} - 0.31 \right). \tag{10}$$

Вторая, выведенная Васиным в 1999 г.,

$$2\delta^2 \ln \frac{1}{\delta \sqrt{e}} = \sigma_B = 2\delta^2 \left( \ln \frac{1}{\delta} - 0.5 \right). \tag{11}$$

Из аппроксимации Гузевского

$$\delta_\Gamma^2 \simeq 0.36 \frac{\sigma}{\lg \frac{1}{\sigma}}. \tag{12}$$

В табл. 3 дано сравнение результатов расчетов по этим формулам. По заданным  $\delta$  по формуле (10) вычислены  $\sigma$ , по этим  $\sigma$  по формуле (12) вычислены  $\delta$  и, наконец, по заданным  $\delta$  из первой строки вычислены  $\sigma$  по формуле (11).

Из табл. 3 следует, что формула (10) наиболее близко совпадает с расчетами по (9) и по (12).

Формула (11) дает несколько заниженное число кавитации при заданном  $\delta$ . Для практики целесообразно пользоваться аппроксимацией Гузевско-го

$$\frac{L_k \sigma}{R_n} \simeq 1.5 \sqrt{\ln \frac{1}{\sigma}}.$$

Если на диаграмме рис. 58 в книге автора [1] нанести эту аппроксимацию, получается лучшее согласование, чем при  $L_k \sigma / R_n = 1.92 - 3\sigma$ , которая приближенно справедлива лишь в диапазоне  $\sigma$  от 0.07 до 0.15.

Контур каверны вблизи диска совпадает с контуром при  $\sigma = 0$ , проходит через точки  $R_1$  и  $R_k$  и подчиняется уравнению

$$\frac{x}{R_n} = 2.33 + 1.3I \left( \sigma, \frac{R}{R_1} \right). \quad (13)$$

”Эллиптическая каверна” первого приближения, проходящая через точки  $R_1$  и  $R_k$ , не совпадает с контуром (13) и может пересекать контур  $\sigma = 0$ , что физически невозможно.

### КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ, ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА И ДЛИНА КАВЕРНЫ

Из уравнения (5) следует, что кинетическая энергия передней полукаверны на пути  $L_k$  будет

$$T = W L_k - U.$$

Приближению

$$W L_k = \pi R_k^2 L_k \Delta P, \quad (14)$$

$$U = \pi R_k^2 L_k \Delta P \left[ 1 - \left( -\frac{R_1^2}{R_k^2} \right) \frac{\kappa}{\kappa + 1} \right].$$

При  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $(R_1/R_k)^2 \rightarrow 0$  и  $U \rightarrow \frac{2}{3}$ , а  $T \rightarrow \frac{1}{3}$  величины  $W L_k$ .

В то же время,

$$T = \lambda_{11} \frac{V^2}{2} = Q_{11} \rho \frac{V^2}{2},$$

где  $\lambda_{11}$  – присоединенная масса,  $Q_{11}$  – объем присоединенной массы. Поэтому отношение объема присоединенной массы к объему каверны для ее передней части будет  $Q_{11}/Q_{\text{кав}} \approx 0.43\sigma$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

Для расчета каверны очень важно правильно определить полудлину каверны  $L_k$ . Общие законы сохранения не дают возможность точно определить величину  $L_k$ . Поэтому в настоящее время

эта величина определяется либо на основе экспериментальных данных, либо из полуэмпирических оценок, либо решением уравнения (7), либо, наконец, на основе численных расчетов каверн для некоторых конкретных чисел кавитации. Приведем основные формулы без выводов, отсылая за подробностями к работам, указанным в библиографии. На основе эмпирических данных

$$\frac{\sigma L_k}{R_n} = 1.92 - 3\sigma \quad (15)$$

или

$$\frac{1}{\delta} = \frac{2.08}{\sqrt{\sigma}} - 4\sqrt{\sigma},$$

где

$$\delta = \frac{R_k}{L_k}.$$

Теоретическим оправданием формулы (15) является точное выражение  $\varphi = \varphi_1 + V [S\sqrt{1 + \sigma} - x]$ , причем  $\varphi_1$  есть величина потенциала на кромках кавитатора;  $S$  – дуга контура каверны до абсциссы  $x$ , отсчитываемой от кромок кавитатора. В миделевом сечении  $\varphi = 0$ , разложение для малых  $\sigma$  дает  $\varphi_1 + \frac{1}{2} V \sigma L_k = 0$ , поэтому в первом приближении  $\frac{\sigma L_k}{R} \approx \text{const}$ .

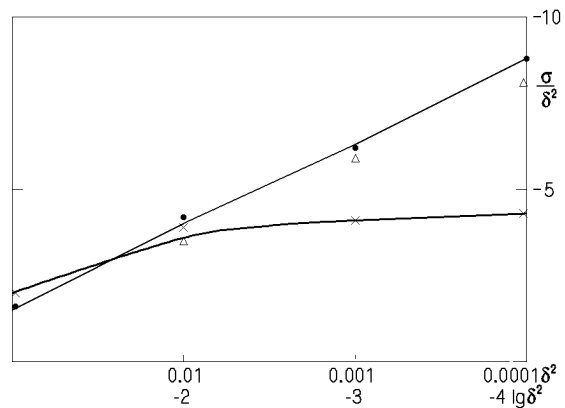


Рис. 2. График результатов расчетов по формулам  $\delta = \frac{R_k}{L_k}$ ,  $\lambda = \frac{1}{\delta}$ ,  $\times - \frac{L_k}{R_n} = \left( \frac{2.077}{\sigma} - 3, 25 \right) \sqrt{\frac{\sigma}{1+\sigma}} = \frac{1}{\delta}$ ,  $\bullet - \sigma = -\delta^2 \ln e^2 \frac{\delta^2}{4}$  (Логвинович),  $\Delta - \sigma = \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{e}}$  (Васин)

Сравнивая предыдущую оценку потенциала  $\varphi$  с оценкой потенциала из теории тонкого тела, получается формула [2]

$$-\delta^2 \ln e^2 \frac{\delta^2}{4} = \sigma. \quad (16)$$

Результаты расчетов по приведенным формулам следующие:

$\delta^2$	0.04	0.01	0.001	0.0001
$\sigma$	0.105	0.04	0.0063	0.00096
$a = \frac{\sigma L_k}{R_n}$	1.5	1.84	2.31	2.72

Из приведенного примера оценок уравнения (7) получилось  $\sigma L_k/R_n = 1.7 \div 1.8$  для  $\sigma = 0.02$ . Вообще  $\sigma/\delta^2 = f(\delta^2)$  представлена на рис. 2.

В работе [2] подробно рассмотрены все аспекты расчета стационарной каверны, исходя как из энергетических, так и из других соображений. Повторять все здесь не будем, однако укажем, что там получена формула

$$\dot{S} = \dot{S}_0 \left( 1 + \frac{1}{\varphi_n} \int_0^t \frac{\Delta P}{\rho} dt \right),$$

позволяющая приближенно рассчитать нестационарную каверну (здесь  $\dot{S} = R\dot{R}$ ). При этом в интеграле Коши-Лагранжа пренебрегается величиной  $\dot{R}$  в сравнении с  $\partial\varphi/\partial t$  и  $\Delta P/\rho$ , что справедливо в центральной части каверны.

1. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. – Киев: Наук. думка, 1969. – 208 с.
2. Логвинович Г.В. Вопросы теории тонких осесимметричных каверн // Труды ЦАГИ. – Вып. 1797. – 1976. – С. 34-41.