УДК 004.942

М. В. Синьков, Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Матричные представления изоморфных гиперкомплексных числовых систем

Рассмотрен метод построения матричных представлений гиперкомплексных числовых систем (ГЧС), важных для практических применений. Метод основан на использовании изоморфных ГЧС диагонального вида. При этом отпадает необходимость в решении высокоразмерных систем квадратичных уравнений. Использование матричных представлений ГЧС может значительно сократить объемы вычислений при математическом моделировании.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, матричное представление, изоморфизм, базис, линейное преобразование.*

Вступление

В теории гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) рассматриваются две формы представления гиперкомплексных числовых систем: натуральная и матричная.

В первой из них гиперкомплексное число имеет вид

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \,, \tag{1}$$

где $e = \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ — базис системы. При этом должна быть задана таблица умножения базисных элементов в форме

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k ; \; i, j = 1, \dots, n \,, \tag{2}$$

где γ_{ij}^k — структурные константы ГЧС ($\gamma_{ij}^k \in R$). При умножении двух гиперкомплексных чисел вида (1) необходимо произвести n^2 символьных операций обращения к таблице умножения (2).

При матричном представлении каждому базисному элементу e_i соответствует матрица $M(e_i)$ размерами $n \times n$, элементы которой принадлежат R, а гиперкомплексные числа (1) и произведения базисных элементов (2) также являются матрицами $n \times n$. И, таким образом, все действия с гиперкомплексными числами сводятся к действиям над матрицами.

Применение матричного представления ГЧС может быть целесообразным при больших размерностях систем и, особенно, в случае неканонических ГЧС.

Матричные представления ГЧС

Гиперкомплексная числовая система есть элемент конечномерной алгебры с фиксированным базисом [1, 3], являющаяся кольцом, аддитивная группа которого — векторное пространство [2]. Поэтому на гиперкомплексные числовые системы распространяются все свойства колец. В частности, существует теорема о вложенности колец [2, 6]: всякое кольцо изоморфно вкладывается в полное кольцо матриц. На этой теореме основано матричное представление гиперкомплексных числовых систем. Широко известны представления системы комплексных чисел C и тела кватернионов H.

Так, для системы комплексных чисел C с базисом (e_1, e_2) матричные представления базисных элементов имеют вид:

$$M(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Действительно,

$$M(e_2^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -M(e_1).$$

Тогда и комплексное число $A = a_1 e_1 + a_2 e_2$ можно представить в матричном виде:

$$M(A) = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Общий случай определения матричных представлений

Рассмотрим общий случай определения матричного представления коммутативной гиперкомплексной числовой системы размерности наличия в базисе единичного элемента. Учитывая то, что каждому базисному элементу e_i соответствует матричное представление E_i размерами $n \times n$, то всего необходимо определить n^3 элементов n таких матриц. В случая наличия в базисе единичного элемента, неизвестных элементов будет несколько меньше — $n^2(n-1)$.

Для определения неизвестных элементов необходимо сформировать и решить систему матричных уравнений, соответствующих таблице умножения рассматриваемой гиперкомплексной числовой системы (2)

$$M(e_i)M(e_j)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}M(e_k),\quad i,j=1,...,n\,, \tag{4}$$

которые соответствуют таблице умножения (2). Для коммутативной гиперкомплексной числовой системы размерности n в общем случае таких матричных уравнений будет $\frac{n(n+1)}{2}$, а в случае наличия в базисе единичного элемента n матричных уравнений (4) превратятся в тождества, и система матричных уравнений будет состоять из $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений.

Система матричных уравнений (4) расщепляется в систему вещественных квадратичных уравнений, число которых в первом случае $\frac{n^2(n+1)}{2}$, а во втором — $\frac{n^2(n-1)}{2}$. В обоих случаях число неизвестных будет больше числа уравнений, что говорит о существовании свободных переменных и, как следствие, неединственности матричного представления одной и той же гиперкомплексной числовой системы.

Существование вещественных решений системы (4) вытекает из вышеупомянутой теоремы о вложенности кольца в полное кольцо матриц.

Как видно из проделанного выше анализа, полученные системы квадратичных уравнений очень громоздки даже для не очень больших размерностей и их решение вызывает заметные трудности [4]. Рассмотрим в качестве примера процесс поиска матричных представлений базисных элементов для системы комплексных чисел C с базисом (e_1,e_2). Так как единичный элемент в C является базисным элементом e_1, то его матричное представление $M(e_1)$ есть единичная матрица второго порядка. Для определения матричного представления второго базисного элемента $M(e_2)$ составляем одно матричное уравнение вида (4):

$$M(e_2)M(e_2)=-M(e_1)\,.$$

Если положить:

$$M(e_2)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

то предыдущее матричное уравнение превращается в систему 4-х квадратичных уравнений с 4-мя неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = -1 \\ x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} = 0 \\ x_{11}x_{21} + x_{21}x_{22} = 0 \\ x_{22}^2 + x_{12}x_{21} = -1 \end{array}\right\}.$$

Система имеет несчетное множество решений:

$$x_{11} \in R, x_{22} = -x_{11}, x_{12} \in R \setminus 0, x_{21} = -\frac{1 + x_{11}^2}{x_{12}}.$$

Выберем значения произвольных переменных такими, чтобы $M(e_2)$ имело простой вид. При $x_{11} = x_{22} = 0, x_{12} = 1, x_{21} = -1$ представление $M(e_2)$ имеет вид (3). Таким образом, квадратичная система с повышением размерности ГЧС становится все более громоздкой. Поэтому работы по повышению эффективности решения таких систем и получению матричных представлений представляют заметный интерес.

Построение матричного представления системы по матричному представлению другой системы и линейному преобразованию изоморфизма между этими системами

В некоторых практических задачах, например при проектировании рекурсивных фильтров с гиперкомплексными коэффициентами [1, 5, 7, 8], применяются пары изоморфных ГЧС, одна из которых имеет сильно заполненную таблицу умножения, а вторая — слабо заполненную и имеющую диагональный вид. Последнее означает, что на главной диагонали таблицы умножения ГЧС размерности $n \geq 1$ стоит m заполненных подтаблиц размерностью n_m, так что $\sum_{i=1}^{m} n_m = n$, а все остальные элементы таблицы — нули.

Например:

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	0	0
e_2	0	e_2	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4
e_4	0	0	e_4	$-e_3$

(5)

Как видно, здесь: $n = 4$; $m = 3$; $n_1 = n_2 = 1$; $n_3 = 2$.

Следует отметить, что линейное преобразование изоморфизма для базисных элементов пары изоморфных ГЧС сохраняется и для матричного представления базисных элементов ввиду транзитивности отношения изоморфизма. То есть, если

L — линейный оператор изоморфизма систем с базисами $e = \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$, $f = \{f_i\}_{i=1,\dots,n}$, и $e = L(f)$, то и для матричных представлений сохраняется то же соотношение: $E = L(F)$.

Поэтому по матричному представлению одной из систем и линейному преобразованию изоморфизма между этими системами можно легко построить матричное представление для другой системы. Для этого нужно подставить в уравнения линейного преобразования изоморфизма матричные представления базисных элементов первой системы и проделать все матричные операции. При этом отпадает необходимость решения системы квадратичных уравнений (4).

Матричные представления ГЧС диагонального типа

Если ГЧС имеет диагональный вид, то для нее легко построить матричное представление. Действительно, ГЧС Γ диагонального вида является прямой суммой некоторого количества ГЧС меньших размерностей Γ_i:

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{m} \Gamma_i .$$

Размерность n системы Γ есть сумма размерностей всех входящих в нее подсистем:

$$n = \dim \Gamma = \sum_{i=1}^{m} \dim \Gamma_i .$$

Тогда базис системы Γ состоит из всех базисных элементов его подсистем Γ_i. Если известно матричное представление базисного элемента из Γ_i, то его матричное представление в Γ образуется обрамлением представления в Γ_i соответствующим количеством нулей до матрицы $n \times n$.

Рассмотрим в качестве примера систему $R \oplus C$ — прямую сумму систем вещественных и комплексных чисел с таблицей умножения

	E_1	E_2	E_3
E_1	E_1	0	0
E_2	0	E_2	E_3
E_3	0	E_3	$-E_2$

(6)

Матричное представление системы вещественных чисел $M(R)$– единичная матрица размерами (1×1). Так как E_1 стоит в правом верхнем углу таблицы (8), то дополнив справа и снизу двумя рядами и строками нулей, получим матричное представление базисного элемента E_1 в $R \oplus C$:

$$M(E_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Используя матричные представления базисных элементов для системы комплексных чисел (3), получим:

$$M(E_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad M(E_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Примеры построения матричных представлений

Рассмотрим примеры построения матричных представлений в гиперкомплексных числовых системах разной размерности по представлениям в изоморфных им системах.

1. Алгебра двойных чисел.

$$W=\begin{array}{|c|cc|}\hline & e_1 & e_2\\\hline e_1 & e_1 & e_2\\ e_2 & e_2 & e_1\\\hline\end{array},\quad W_1=\begin{array}{|c|cc|}\hline & E_1 & E_2\\\hline E_1 & E_1 & 0\\ E_2 & 0 & E_2\\\hline\end{array}.$$

Изоморфизм между этими ГЧС устанавливается следующими взаимно обратными линейными преобразованиями:

$$\begin{aligned} e_1&=E_1+E_2, & E_1&=(e_1+e_2)/2,\\ e_2&=E_1-E_2, & E_2&=(e_1-e_2)/2. \end{aligned} \tag{9}$$

Матричные представления базисных элементов E_1 и E_2 такие:

$$M(E_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad M(E_2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Матричные представления базисных элементов e_1 и e_2 такие могут быть получены из левой части линейных преобразований (9) с помощью операции сложения матриц:

$$M(e_1)=M(E_1)+M(E_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad M(e_2)=M(E_1)-M(E_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Можно непосредственно убедиться в том, что матричные представления (9)–(10) удовлетворяют таблице умножения системы W.

Если гиперкомплексное число имеет форму (1) при $n = 2$, то его матричное представление имеет вид:

$$M(A) = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

2. Системы квадриплексных чисел K и бикомплексных чисел $C \oplus C$.

Эти гиперкомплексные числовые системы изоморфны. Их таблицы умножения имеют вид:

Система K

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

(11)

Система $C \oplus C$

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	E_2	0	0
E_2	E_2	$-E_1$	0	0
E_3	0	0	E_3	E_4
E_4	0	0	E_4	$-E_3$

(12)

Прямое и обратное линейные преобразования, связывающие их базисы, такие:

$$\begin{cases} e_1 = E_1 + E_3 \\ e_2 = -E_2 + E_4 \\ e_3 = -E_2 - E_4 \\ e_4 = -E_1 + E_3 \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} E_1 = (e_1 - e_4)/2 \\ E_2 = (-e_2 - e_3)/2 \\ E_3 = (e_1 + e_4)/2 \\ E_4 = (e_2 - e_3) \end{cases} \tag{14}$$

Матричные представления базисных элементов системы $C \oplus C$ в соответствии с представлениями (3) и (12) имеют вид:

$$M(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда с помощью (13) получаем матричные представления базисных элементов системы K:

$$M(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(e_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно непосредственно убедиться в том, что эти матричные представления удовлетворяют таблице умножения системы K (10).

Если гиперкомплексное число A имеет вид (1) при $n = 4$, то его матричное представление будет:

$$M(A) = \sum_{i=1}^{4} a_i M(e_i) = \begin{pmatrix} a_1 - a_4 & -a_2 - a_3 & 0 & 0 \\ a_2 + a_3 & a_1 - a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 + a_4 & a_2 - a_3 \\ 0 & 0 & -a_2 + a_3 & a_1 + a_4 \end{pmatrix}.$$

3. Пример ГЧС 8-й размерности.

Рассмотрим гиперкомплексную систему 8-й размерности Γ_1, полученную двукратным удвоением ГЧС W такой же системой. Это будет ГЧС размерности $n = 8$ со следующей таблицей умножения:

$$\begin{array}{c|cccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ e_2 & e_2 & e_1 & e_4 & e_3 & e_6 & e_5 & e_8 & e_7 \\ e_3 & e_3 & e_4 & e_1 & e_2 & e_7 & e_8 & e_5 & e_6 \\ e_4 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & e_8 & e_7 & e_6 & e_5 \\ e_5 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_6 & e_6 & e_5 & e_8 & e_7 & e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ e_7 & e_7 & e_8 & e_5 & e_6 & e_3 & e_4 & e_1 & e_2 \\ e_8 & e_8 & e_7 & e_6 & e_5 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \end{array} \tag{15}$$

Ей изоморфна ГЧС Γ_2, полученная двукратным удвоением ГЧС W_1 такой же системой со слабо заполненной таблицей умножения диагонального вида

$$\begin{array}{c|cccc} & E_1 & E_2 & \ldots & E_8 \\ \hline E_1 & E_1 & 0 & \ldots & 0 \\ E_2 & 0 & E_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_8 & 0 & 0 & \ldots & E_8 \end{array} \tag{16}$$

Их изоморфизм определяется следующим линейным преобразованием элементов базисов:

$$\begin{aligned} e_1 &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7 + E_8, \\ e_2 &= E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5 - E_6 + E_7 - E_8, \\ e_3 &= E_1 + E_2 - E_3 - E_4 + E_5 + E_6 - E_7 - E_8, \\ e_4 &= E_1 - E_2 - E_3 + E_4 + E_5 - E_6 - E_7 + E_8, \\ e_5 &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - E_5 - E_6 - E_7 - E_8, \\ e_6 &= E_1 - E_2 + E_3 - E_4 - E_5 + E_6 - E_7 + E_8, \\ e_7 &= E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_6 + E_7 + E_8, \\ e_8 &= E_1 - E_2 - E_3 + E_4 - E_5 + E_6 + E_7 - E_8. \end{aligned} \tag{17}$$

Оно имеет обратное линейное преобразование, так как его детерминант отличен от нуля. Конкретный вид его не будем приводить, так как оно громоздко, а для дальнейших расчетов нам не понадобится.

Матричные представления ГЧС Γ_2 построить очень легко: $M(E_i)$ представляет собой матрицу, все элементы которой, кроме одного, равны нулю. Ненулевой элемент равен 1. Он находится на главной диагонали матрицы на пересечении i-х столбца и строки.

Матричные представления базисных элементов системы Γ_1 строятся из матричных представлений системы Γ_2 в соответствии с линейным преобразованием (17). Они будут представлять собой матрицы размером (8×8), все элементы которой, кроме диагональных, — нули. На диагонали будут стоять единицы, знаки которых соответствуют (17):

$$\begin{aligned}
&diagM(e_1)=+1,+1,+1,+1,+1,+1,+1,+1 \quad diagM(e_5)=+1,+1,+1,+1,-1,-1,-1,-1,\\
&diagM(e_2)=+1,-1,+1,-1,+1,-1,+1,-1 \quad diagM(e_6)=+1,-1,+1,-1,-1,+1,-1,+1,\\
&diagM(e_3)=+1,+1,-1,-1,+1,+1,-1,-1 \quad diagM(e_7)=+1,+1,-1,-1,-1,-1,+1,+1,\\
&diagM(e_4)=+1,-1,-1,+1,+1,-1,-1,+1 \quad diagM(e_8)=+1,-1,-1,+1,-1,+1,+1,-1.
\end{aligned} \tag{18}$$

Матричное представление гиперкомплексного числа A вида (1) при $n=8$ также будут представлять собой матрицы размером (8×8), все элементы которой, кроме диагональных, — нули. На диагонали будут стоять суммы всех восьми компонентов числа A, знаки которых соответствуют столбцам диагональных элементов представлений (18). Например:

на 1-м месте диагонали — $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$,

на 2-м месте диагонали — $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8$,

……………………………………………………………………..

на 7-м месте диагонали — $a_1+a_2-a_3-a_4-a_5-a_6+a_7+a_8$,

на 8-м месте диагонали — $a_1-a_2-a_3+a_4-a_5+a_6+a_7-a_8$.

Как видно из вышеприведенного для данной ГЧС (14) при выполнении операции умножения двух гиперкомплексных чисел количество умножений вещественных чисел резко сокращается — с 64 при использовании представления в виде (1) до 8 — при использовании матричного представления.

Выводы

1. При использовании предлагаемого авторами метода построения матричных представлений ГЧС для большой группы ГЧС, важных для практических применений, отпадает необходимость в решении высокоразмерных систем квадратичных уравнений.

2. Использование матричных представлений ГЧС может значительно сократить объемы вычислений при математическом моделировании.

1. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. – К.: Инфодрук, 2010.- 388с.

2. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. - М.: Наука, 1973.- 400с.

3. *Синьков М.В.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах / М.В. Синьков, Н.М. Губарени. – К. : Наук. думка, 1979. – 140 с.

4. *Калиновский Я.А.* Исследование свойств изоморфизма квадриплексных и бикомплексных числовых систем / Я.А. Калиновский // Реєстрація, зберігання і обробка. даних. — 2003. — Т. 5, № 1. — С. 69–73.

5. *Дослідження* та використання гіперкомплексних числових систем в задачах динаміки, кінематіки та кодування інформації застосування / М.В. Синьков, Каліновський Я.О., Ю.Є. Боярінова, О.В.Федоренко, Т.Г. Постнікова, Т.В. Синькова // Пріоритети наукової співпраці ДФФД і БРФФД, Бібліотека Держфонду фундаментальних досліджень. К.: — 2007. — С.21—34.

6. Noether E. Hypercomplex Grossen und Darstellungstheorie / Noether E. // Mathematische Zeitschrift. — 1929. — B. 30 P. 641-692.

7. Синьков М.В. Повышение эффективности цифровых фильтров с помощью гиперкомплексного представления информации / Синьков М.В., Калиновский Я.А., Синькова Т.В. // Сб. науч. тр. 8-й Международной научной конференции «Теория и техника передачи, приема и обработки информации» ИИИСТ-2002. — Харьков, 2002. — С. 503–504.

8. Toyoshima H. Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters / Toyoshima H. // IEICE Trans. Fundamentals. — Aug. 2002. — E85-A, 8. — P.1870-1876.