УДК 519.17

Ю. Я. Самохвалов[1], А. Н. Буточнов[2],
Е. М. Науменко[2], О. И. Бурба[3]
[1]ВИТИ НТУУ «КПИ»
ул. Московская, 45/1, 01015 Киев, Украина
[2]Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина
[3]В/Ч 1906

Использование нечетких оценок в методе прогнозного графа

Предложены механизмы обработки нечетких оценок в соответствующих процедурах метода прогнозного графа.

Ключевые слова: *сетевое планирование и управление, прогнозирование, экспертиза, нечеткие оценки.*

Метод прогнозного графа (МПГ) предложен В.М. Глушковым [1]. Он является обобщением метода Дельфи и сетевых методов и широко используется при прогнозировании научных и технических работ, необходимых при создании средств обработки информации и оценке перспектив развития вычислительной техники.

Существенной частью метода является коллективная многоэтапная экспертиза по определению относительной важности научных направлений, вероятности осуществления событий и времени их совершения. При этом в основе соответствующих процедур лежат точечные экспертные оценки.

Однако на практике человеку психологически проще дать нечеткую оценку тому или иному событию, нежели указать абсолютное значение. Кроме этого, нечеткие оценки более объективные. В статье рассмотрены механизмы обработки нечетких оценок и их адаптация в соответствующих процедурах метода прогнозного графа. Для более доступного уяснения сущности предлагаемого подхода, рассмотрим его в контексте данного метода при решении следующей задачи.

Пусть требуется оценить вероятное время и пути решения некоторой научно-технической проблемы S. Вначале осуществляется декомпозиция этой проблемы на проблемы s_1, s_2,..., s_m, и каждой из проблем s_i приписывается весовой коэффициент λ_i, определяющий ее важность относительно проблемы S.

Затем список проблем s_1, s_2,..., s_m, называемых далее *основными целями*, до-

дополняется новыми проблемами — *промежуточными целями* $s_{m+1},\ldots,\ s_{m+n}$, решение которых может оказаться необходимым или полезным для достижения конечных целей.

Решение проблемы s_i может потребовать предварительного достижения некоторых целей $s_{i1},\ldots,\ s_{ik}$. С целью установления зависимости между целями для каждой проблемы s_i привлекается группа экспертов, формулирующих условия ее достижения, и дающих оценки времени t_i достижения цели s_i после выполнения поставленного условия. В результате для каждой цели s_i будет получено несколько таких условий, в соответствии с количеством привлеченных экспертов.

В случае, когда эксперт сомневается в точности своей оценки времени t_i, осуществляется декомпозиция цели s_i на более простые, с точки зрения оценки, подцели. В качестве таких подцелей будем понимать работы (мероприятия) по достижению s_i.

Декомпозицию цели s_i предлагается проводить на основе стратегии «целей и средств». А именно, сначала определяется работа r_{i1}, выполнение которой непосредственно приведет к достижению цели s_i. Далее работа r_{i1} выступает в качестве новой цели, и определяется следующая работа r_{i2}, выполнение которой даст возможность достичь r_{i1}. Так продолжается до уровня элементарных работ (мероприятий), для выполнения которых нет необходимости проводить дополнительные работы. В результате будет сформирована последовательность работ $r_{id}\ ,r_{id-1},\ldots,r_{i1}$ по достижению цели s_i.

Далее оценивается время выполнения каждой работы r_{ik}. Если предположить, что работы r_{ik} являются независимыми, то время t_i достижения цели s_i определяется как

$$t_i = \sum_{k=1}^{d} t_{ik}\ ,$$

где d — количество работ плана достижения цели s_i; t_{ik} — оценка времени выполнения работы r_{ik}.

Затем осуществляется расслоение целей (как основных, так и промежуточных) на не пересекающиеся множества M_0, $M_1,\ldots,$ M_p. Множество M_0 состоит из целей, имеющих лишь безусловные оценки времени своего достижения. Для целей в любом из множеств M_i в качестве условий могут выступать лишь цели из множеств M_0, $M_1,\ldots,$ M_{i-1} ($i=\overline{1,p}$).

После такого расслоения целей вероятность $p_i(t)$ того, что к моменту времени t проблема s_i будет решена, вычисляется по формуле [1]:

$$p_i(t)=\frac{\sum_{j=1}^{N} r_{ij}\, p_{ij1}(t-t_{ij})\, p_{ij2}(t-t_{ij})\dots p_{ijk}(t-t_{ij})}{\sum_{j=1}^{N} r_{ij}}, \tag{1}$$

где N — количество экспертов; r_{ij} — весовой коэффициент j-го эксперта, оценившего i-ю цель; $ij1$, $ij2$,..., ijk — номера промежуточных целей, выдвинутых j-м экспертом в качестве условия достижения цели s_i; t_{ij} — его оценка времени достижения цели s_i после выполнения поставленного условия.

Если при оценке цели эксперт не выдвинул никаких условий, то вместо произведения $r_{ij} p_{ij1}(t-t_{ij})\dots p_{ijk}(t-t_{ij})$ в (1) используется выражение $r_{ij}Q(t-t_{ij})$, в котором функция $Q(t)$ вычисляется как

$$Q(t)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ t-t_{ij}<0,\\ 1,\ \textit{если}\ t-t_{ij}\ge 0.\end{cases} \tag{2}$$

Теперь рассмотрим случай, когда оценки t_{ij} нечеткие и заданы в интервальном виде

$$\tilde{t}_{ij}=[t'_{ij}, t''_{ij}],$$

где t'_{ij} (t''_{ij}) — нижняя (верхняя) граница нечеткого числа $\tilde{t}_{ij}$.

В качестве таких границ будем использовать оптимистическую и пессимистическую оценки времени, которые широко используются в теории сетевого планирования и управления.

Оптимистическая оценка времени — это оценка минимального времени достижения цели. За это время работа может быть выполнена только при наиболее благоприятных условиях. Пессимистическая оценка времени — это оценка максимального времени, необходимого для достижения цели. Эта оценка имеет место при исключительно неблагоприятных условиях.

Если при оценке осуществлялась декомпозиция цели s_i, то время $\tilde{t}_{ij}$ определяется следующим образом.

Пусть $r_{i1}, r_{i2},..., r_{id}$ — последовательность работ, необходимых для достижения этой цели, а $\tilde{t}_{ik}=[t'_{ik}, t''_{ik}]$ — оценка времени выполнения работы r_{ik}. Тогда время $\tilde{t}_{ij}$ определяется как

$$\tilde{t}_{ij}=[t'_{ij}, t''_{ij}],$$

где $t'_{ij} = \sum_{k=1}^{d} t'_{ik}$; $t''_{ij} = \sum_{k=1}^{d} t''_{ik}$.

Далее, поскольку оценка $\widetilde{t}_{ij}$ задает интервал, каждое значение из которого является возможным временем достижения цели s_i, то введем вероятность $p_{ij}(t)$ того, что к моменту времени $t'_{ij} \le t \le t''_{ij}$ эта цель будет достигнута. Положив, что вероятность $p_{ij}(t)$ на интервале $[t'_{ij}, t''_{ij}]$ подчинена бета-распределению, выражение (2) примет следующий вид:

$$Q(t) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ \ t < t'_{ij}, \\ p_{ij}(t), \ \textit{если} \ \ t'_{ij} \le t < t''_{ij}, \\ 1, \ \textit{если} \ \ t \ge t''_{ij}, \end{cases} \tag{3}$$

где $p_{ij}(t) = \dfrac{1}{B(t'_{ij} - 1, t''_{ij})} \int_0^t x^{t'-2}(1-x)^{t''-1} dx$, $B(t'_{ij} - 1, t''_{ij}) = \int_0^1 x^{t'-2}(1-x)^{t''-1} dx$ — бета-функция.

Учитывая, что $p_{ij}(t'_{ij}) = 0$, поэтому распределение вероятности $p_{ij}(t)$ осуществляется на интервале $[t'_{ij} - 1; t''_{ij}]$. Кроме этого, в случае нечетких оценок выражение $r_{ij} p_{ij1}\left(t - t_{ij}\right) \ldots p_{ijk}\left(t - t_{ij}\right)$ в (1) меняется на $r_{ij} p_{ij1}\left(t - \tilde{t}_{ij}\right) \ldots p_{ijk}\left(t - \tilde{t}_{ij}\right)$.

Рассмотрим теперь случай когда *j*-й эксперт при оценке цели s_i выдвинул условие $s_{ij1}, \ldots, s_{ijk}$. Пусть $\tilde{t}_{ij} = [t'_{ij}, t''_{ij}]$ — оценка времени достижения цели s_i после выполнения этого условия. Представим этот интервал в виде $[t^1_{ij}, t^2_{ij}, ..., t^n_{ij}]$ и предположим, что значение t^r_{ij} является оценкой времени достижения этой цели, данной r-м «гипотетическим» экспертом. Тогда вероятности $p_{ijk}\left(t - \widetilde{t}_{ij}\right)$ в формуле (1) будут вычисляться по формуле

$$p_{ijk}\left(t - \tilde{t}_{ij}\right) = \sum_{r=1}^{n} \mu_r \cdot p_{ijk}(t - t^r_{ij}) \Big/ \sum_{r=1}^{n} \mu_r , \tag{4}$$

где μ_r — весовой коэффициент r-го «гипотетического» эксперта.

В качестве коэффициентов μ_r предлагается использовать соответствующие вероятности бета-распределения на интервале $[t'_{ij}, t''_{ij}]$. Поскольку примеры более убедительны, чем общие рассуждения, то рассмотрим один из них.

Пусть заданы две основные цели s_1, s_2 и три промежуточные s_3, s_4, s_5. Далее, пусть каждая из целей оценивалась двумя экспертами (см. таблицу).

Результаты оценивания

Цели	S_1		S_2		S_3		S_4		S_5	
Эксперты	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Вес эксперта	3	2	3	2	2	3	5	4	2	3
Условные цели	(s_2,s_3,s_4)	(s_3,s_5)	(s_3,s_5)	(s_4,s_5)	s_4	s_4	s_5	–	–	–
Оценки времени	[2,3]	[3,4]	[2,3]	[3,4]	[3,4]	[1,3]	[3,4]	[2,3]	[1,3]	[2,3]

Тогда согласно (1), (3) и (4) для данных целей будут получены следующие распределения вероятности:

$$p_5(t)=\frac{2}{5}[0,33Q(t-1)+0,33Q(t-2)+0,34Q(t-3)]+\frac{3}{5}[0,46Q(t-2)+0,54Q(t-3)]=$$

$$=\frac{2}{5}[0,33(0;1)+0,33(0;0;1)+0,34(0;0;0;1)]+\frac{3}{5}[0,46(0;0;1)+0,54(0;0;0;1)]=$$

$$=\frac{2}{5}(0;0,33;0,66;1)+\frac{3}{5}(0;0;0,46;1)=$$

$$=(0;0,132;0,264;0,4)+(0;0;0,276;0,6)=(0;0,132;0,54;1);$$

$$p_4(t)=\frac{5}{9}[0,45p_5(t-3)+0,55p_5(t-4)]+\frac{4}{9}[0,46Q(t-2)+0,54Q(t-3)]=$$

$$=(0;0;0,2;0,44;0,47;0,62;0,86;1);$$

$$p_3(t)=\frac{2}{5}[0,45p_4(t-3)+0,55p_4(t-4)]+\frac{3}{5}[0,33p_4(t-1)+0,33p_4(t-2)+$$

$$+0,34p_4(t-3)]=(0;0;0;0,04;0,13;0,26;0,43;0,57;0,71;0,86;0,97;1);$$

$$p_2(t)=\frac{3}{5}([0,46p_3(t-2)+0,54p_3(t-3)]\cdot[0,46p_5(t-2)+0,54p_5(t-3)])+$$

$$+\frac{2}{5}([0,45p_4(t-3)+0,55p_4(t-4)]\cdot[0,45p_5(t-3)+0,55p_5(t-4)])=$$

$$=(0;0;0;0;0;0,02;0,14;0,29;0,42;0,59;0,75;0,87;0,95;0,99;1);$$

$$p_1(t)=\frac{3}{5}([0,46p_2(t-2)+0,54p_2(t-3)]\cdot[0,46p_3(t-2)+$$

$$+0,54p_3(t-3)]\times[0,46p_4(t-2)+0,56p_4(t-3)])+$$

$$+\frac{2}{5}([0,45p_3(t-3)+0,55p_3(t-4)]\cdot[0,45p_5(t-3)+0,55p_5(t-4)])=$$

$$=(0;0;0;0;0;0;0,006;0,03;0,09;0,19;0,33;0,49;0,67;0,84;0,93;0,98;0,99;1).$$

Полученные данные могут быть использованы для прогноза наиболее вероятного времени достижения каждой из рассматриваемых целей. В качестве такого времени принято считать медиану распределения, т.е. время t, для которого вероятность $p_i(t)$ равна 0,5. Если считать, что между соседними найденными точками t_1 и t_2 вероятность $p_i(t)$ меняется по линейному закону, то медиану можно найти по формуле

$$Med_i = t_1 + \frac{0,5 - p_i(t_1)}{p_i(t_2) - p_i(t_1)}.$$

Так для полученных распределений $p_i(t)$ медианы Med_i будут равны: $Med_1 \approx 11,05$; $Med_2 \approx 8,47$; $Med_3 \approx 6,5$; $Med_4 \approx 4,14$; $Med_5 \approx 1,9$.

Следующим шагом является определение степени неопределенности (согласованности) прогноза наиболее вероятного времени достижения целей s_i. В качестве меры неопределенности в МПГ выступает разность квартилей $\Delta K_i = K_i'' - K_i'$, где K_i' и K_i'' — нижний и верхний квартиль. Под этими квартилями понимается время t, при котором $p_i(t) = 0,25$ и $p_i(t) = 0,75$ соответственно.

Затем осуществляется уточнение прогноза (уточнение оценок) согласно Дельфийской процедуры. А именно, если в результате уточнения степень неопределенности прогноза уменьшается, то данные уточнения принимаются, и процесс повторяется до тех пор, пока либо оценки экспертов не стабилизируются, либо не будет достигнут некоторый предел количества уточнений.

Вместе с тем, такой подход не достаточно продуктивный, поскольку из-за того, что не определен критерий неопределенности прогноза, его уточнение является обязательной процедурой. В качестве альтернативного подхода рассмотрим механизм, который свободен от указанного недостатка.

Если прогноз рассматривать как результат экспертизы, то под неопределенностью прогноза можно понимать ее надежность. Исходя из этого, в качестве степени неопределенности прогноза наиболее вероятного времени достижения цели s_i предлагается использовать меру надежности экспертизы — коэффициент вариации

$$\beta_i = \sigma_i / \overline{t}_i,$$

где σ_i — среднее квадратическое отклонение оценок; $\overline{t_i}$ — их среднее значение.

Далее, пусть $p_i(t_1), p_i(t_2), ..., p_i(t_n)$ — распределение вероятности $p_i(t)$ времени достижения цели s_i. Тогда интервалы времени t_i $(i = \overline{1,n})$ этого распределения можно интерпретировать как оценки, которые дали эксперты этой цели, а его медиану Med_i — как их среднее значение.

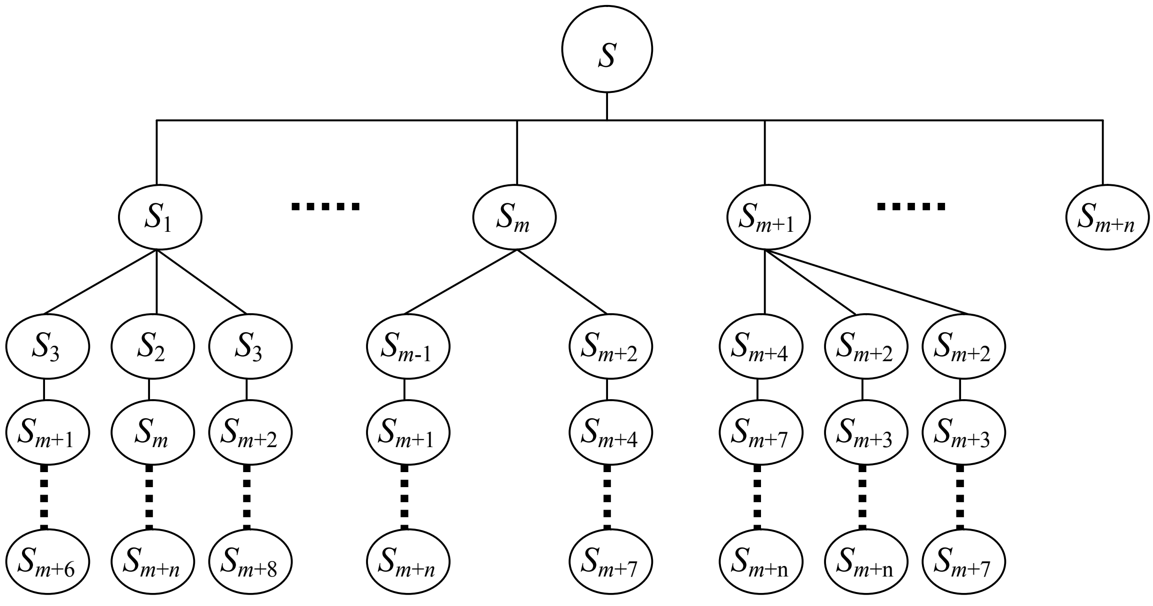
Практика применения метода экспертных оценок показывает, что результаты экспертизы можно считать удовлетворительными, если $\beta_i \le 0,3$, и хорошими, если $\beta_i \le 0,2$ (при условии, что к экспертизе привлекаются только квалифицированные специалисты) [2]. Эти условия, в зависимости от требуемой точности результатов экспертизы, могут быть использованы в качестве критерия неопределенности прогноза.

Для уточнения прогноза экспертиза делается непрерывной. Всякий раз, когда тот или иной эксперт изменяет свое мнение, осуществляется пересчет функций распределения $p_i(t)$ и определяется степень неопределенности прогноза. Чтобы ускорить процесс уточнения прогноза, цели ранжируются (как основные, так и промежуточные) в соответствии с их значимостью. В этой целью вводится коэффициент значимости i-й цели по времени:

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Delta_i Med_j \Big/ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j ,$$

где $\Delta_i Med_j$ — прирост медиан Med_j для основных целей при условии сдвига вправо на один временной интервал распределения $p_i(t)$, т.е. при замене функции распределения вероятности $p_i(t)$ функцией $p_i(t-1)$.

Этот коэффициент позволяет определить те цели s_i, для которых уточнение прогноза наиболее влияет на время достижения основных целей. В результате уточнения прогноза для каждой цели s_i (как основной, так и промежуточной) будет получена некоторая совокупность путей, в качестве которых выступают условия ее достижения, выдвинутые соответствующими экспертами. Тогда совокупность путей достижения основных целей s_i можно представить в виде прогнозного графа достижения главной цели S (см. рисунок).



Пример прогнозного графа достижения цели S

Следующей задачей является выбор наиболее рационального пути для достижения каждой основной цели. Основанием для выбора того или иного пути служат три основных момента. Главным является степень уверенности, что данный путь приведет к достижению рассматриваемой основной цели. В качестве такой степени будем использовать вероятность данного пути.

Вероятность p_j достижения основной цели j-м путем зависит от количества высказавшихся за него экспертов и вычисляется как

$$p_j = \prod_{i=1}^{n} (\sum_{l=1}^{m} v_{il}),$$

где m — количество экспертов, высказавшихся за l-ю цель j-го пути; v_{il} — веса этих экспертов; n — количество целей в j-м пути.

Вторым основанием для выбора является ожидаемое время достижения основной цели данным путем.

Третьим основанием есть оценка затрат для достижения цели s_i данным путем. Оценки затрат даются в интервальном виде как для цели s_i, так и для целей, выдвинутых в качестве условия ее достижения. В этом случае эти оценки являются независимыми случайными величинами, и общие затраты по каждому пути можно оценить суммой затрат на все входящие в нее цели. В качестве такой оценки будем использовать математическое ожидание m_i.

Пусть A_i — путь достижения цели s_p. Далее, пусть $\widetilde{w}_{ikj} = [w'_{ikj}, w''_{ikj}]$ — оценка затрат на достижение k-й цели, данная j-м экспертом. Тогда математическое ожидание затрат на достижение этой цели будет иметь вид:

$$\tilde{m}_{ik} = \left[m'_{ik}, m''_{ik}\right],$$

где $m'_{ik} = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot w'_{ikj}$; $m''_{ik} = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot w''_{ikj}$; n — количество экспертов; v_j — весовой коэффициент j-го эксперта ($\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$).

В этом случае математическое ожидание затрат для достижения цели s_i путем A_i можно представить как

$$\tilde{m}_i = [m'_i, m''_i],$$

где $m'_i = \sum_{k=1}^{l} m'_{ik}$; $m''_i = \sum_{k=1}^{l} m''_{ik}$; l — количество целей в пути A_i.

Далее определяется степень достоверности прогноза затрат для пути A_i. Под степенью достоверности будем понимать вероятность того, что истинное значение w затрат находится в интервале $[m'_i, m''_i]$. Эта вероятность определяется как

$$p(m'_i \le w \le m''_i) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a_i} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где $a_i = \varepsilon_i \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{D}_i}}$ — параметр функции Лапласа; $\varepsilon_i = \frac{m''_i - m'_i}{2}$ — точность оценки

m_i; n — количество экспертов; $\overline{D}_i$ — среднее значение дисперсий оценок для границ интервала $[m_i', m_i'']$.

В свою очередь значение $\overline{D}_i$ вычисляется как

$$\overline{D_i} = \frac{D_i' + D_i''}{2},$$

где

$$D_i' = \sum_{k=1}^{l} D_{ik}'; \; D_{ik}' = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \left(w_{ikj}' - m_{ik}'\right)^2;$$

$$D_i'' = \sum_{k=1}^{l} D_{ik}''; \; D_{ik}'' = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \left(w_{ikj}'' - m_{ik}''\right)^2.$$

Если $p(m_i' \le w \le m_i'') < 0,5$, то необходимо произвести уточнение оценок затрат по каждой цели.

Итак, рассмотренный подход дает возможность при прогнозировании путей решения тех или иных проблем использовать нечеткие экспертные оценки. При этом предложенные механизмы позволяют корректно учитывать их нечеткий характер в соответствующих процедурах метода прогнозного графа и, в целом, расширяют его возможности по обработке экспертной информации.

1. *Глушков В.М.* О прогнозировании на основе экспертных оценок / В.М. Глушков // Кибернетика. — 1969. — № 2. — С. 8–17.

2. *Самохвалов Ю.Я.* Экспертное оценивание. Методический аспект / Ю.Я. Самохвалов, Е.М. Науменко. — К.: ДУИКТ, 2007. — 262 с.

Поступила в редакцию 01.12.2010