

УДК 004.942.519.87(045)

О. Г. Додонов<sup>1</sup>, А. І. Кузьмичов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут проблем реєстрації інформації НАН України  
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна  
e-mail: dssd@ipri.kiev.ua

<sup>2</sup>Академія муніципального управління МОН України  
вул. І. Кудрі, 33, 01601 Київ, Україна  
e-mail: akuzmichov@mail.ru

## Модель «max-min» у задачах захисту об'єктів комунікаційних мереж

*Проблема захисту об'єктів стратегічного значення зведена до задачі про максимальний потік/мінімальний переріз у мережі, яка розв'язана в середовищі MS Excel за допомогою вбудованого модулю математичної оптимізації. Цей підхід є ілюстрацією сучасної методики формування та прийняття відповідальних рішень із використанням апарату математичного і електронно-табличного моделювання.*

**Ключові слова:** комунікаційна мережа, максимальний потік, мінімальний переріз, електронно-табличне моделювання, математична оптимізація в MS Excel.

### Вступ

У світовій безпековій практиці надзвичайно актуальним став клас потокових задач про моніторинг, перевірку та контроль і, за необхідності, накладення заборони (network interdiction, [1]) руху чи передачі даних ділянками комунікаційної мережі з метою обмеження доступу будь-якими шляхами — каналами зв'язку, залізницею, дорогами, повітрям, водою чи навіть бездоріжжям — до стратегічних об'єктів (коротко — до критичної інфраструктури [2]).

Прикладами практичних ситуацій, де виникають мережні задачі про захист, заборону чи обмеження доступу є:

— захист адміністративних і бізнес-центрів, стратегічних джерел постачання харчовими продуктами чи енергоресурсами від терористичних атак [3];

— реєстрація та локалізація у звичайних чи труднодоступних місцевостях та, особливо, на обширних територіях місць збирання, накопичення, виготовлення, зберігання, доставки нелегальними маршрутами й розповсюдження контрабанди, зброї чи наркотиків;

— заборона нелегального перетину будь-яких кордонів;

© О. Г. Додонов, А. І. Кузьмичов

— перекриття каналів руху небезпечних потоків води, транспортних засобів, шкідливих речовин, груп людей, вогню, інформаційних матеріалів тощо.

Обмеженість спеціальних кадрових, часових і технічних ресурсів для якісного і своєчасного моніторингу, здійснення контрольних чи заборонних функцій у мережі відносить ці задачі до класу поточкових моделей про оптимальне використання обмежених ресурсів шляхом пошуку «болючих точок» і «вузьких місць» для адресного направлення саме до них ефективних ресурсних комплектів (команд, засобів).

Серйозність, складність та актуальність цієї проблематики пояснюється тим, що великі розміри реальних територій і комунікацій місцевого, регіонального чи державного значення, які з часом лише збільшуються й ускладнюються, розмаїття ресурсів спеціального призначення та їхніх властивостей формують безліч постановок задач та їхніх модифікацій, тож виникає необхідність побудови спеціального класу відповідних математичних моделей, пошуку раціональних способів оперативної підготовки, редагування й уведення початкових даних, розробки ефективних обчислювальних алгоритмів і використання доступних комп'ютерних засобів їхньої практичної реалізації й не в університетських наукових лабораторіях, обладнаних унікальними суперкомп'ютерами і забезпечених кваліфікованим персоналом, а безпосередньо на командних пунктах для оперативного прийняття та супроводження процесу реалізації відповідальних організаційних і управлінських рішень.

Предметна область дослідження — комунікаційна мережа — вже пропонує для моделювання й розв'язання таких задач розвинений апарат поточкового програмування [4–6], який базується на математичній теорії графів. Адже будь-яка географічна чи інша карта є наявною графічною, тобто, наочною і зрозумілою, моделлю досліджуваного об'єкта, за якою будується відповідна аналітична і розрахункова поточкова математична модель, результат її комп'ютерної реалізації відтворюється на тій же карті у вигляді конкретних місць, куди треба направити ресурси у визначених кількостях оптимальними шляхами.

Існує два підходи до комп'ютерного моделювання практичних задач про потоки у мережах — спеціалізований та універсальний.

### **Спеціалізований підхід**

У початковий період технології прийняття рішень за результатами комп'ютерного моделювання (60-ті роки ХХ ст.), коли комп'ютери (ЕОМ) мали вкрай обмежені експлуатаційні можливості, класичні моделі лінійного програмування матричного типу, до яких зводяться поточкові моделі, вимагали для своєї реалізації значно більше машинних ресурсів (пам'яті й швидкодії процесора), ніж було доступно, тому в класичній роботі [4] вперше було запропоновано досить економічний алгоритм переборного типу для фундаментальної поточної моделі під назвою «Задача про максимальний потік/мінімальний переріз», який, як і тоді, так і зараз, звичайно реалізується у вигляді спеціалізованої програми, що створює і супроводжує штат професійних математиків-програмістів відповідними мовними засобами на конкретне замовлення.

## Універсальний підхід

Для сучасних потужних і доступних ПК тепер застосовується інша технологія організації модельних розрахунків, розрахована на її масове застосування рядовими користувачами — це проста, доступна й універсальна реалізація потокової моделі симплекс-методом лінійного програмування за допомогою стандартної чи промислової версії програми-надбудови Solver Excel (Поиск решения), що експлуатується з 1991 р. [7], де не ставляться серйозні умови щодо математичної й програмістської підготовки користувача.

Цей підхід до здійснення комп'ютерного моделювання визначених вище типів поточкових задач набув найбільшого поширення в бізнес-освіті [8–10] й поки що мало відомий в Україні серед практиків (ОПР — осіб, що приймають рішення), тож саме він пропонується нами на прикладі розв'язання типової потокової задачі про максимальний потік/мінімальний розріз.

## Задача про максимальний потік/мінімальний переріз («max-min»)

Об'єкт дослідження — комунікаційна мережа — задана певними «точковими» пунктами (це — окремі об'єкти, міста, станції, перехрестя доріг) та ділянками шляхів між ними. Мовою теорії графів ділянки називають дугами, а пункти — вузлами. Цими дугами від вузла до вузла передаються потоки (людей, техніки, продуктів, ресурсів, інформації), які вимірюються у відповідних одиницях (т, шт., чол., грн., м<sup>3</sup>, Мб). Реальна мережа зображується картою, а її спрощений проблемно-орієнтований варіант — картосхемою (рис. 1).

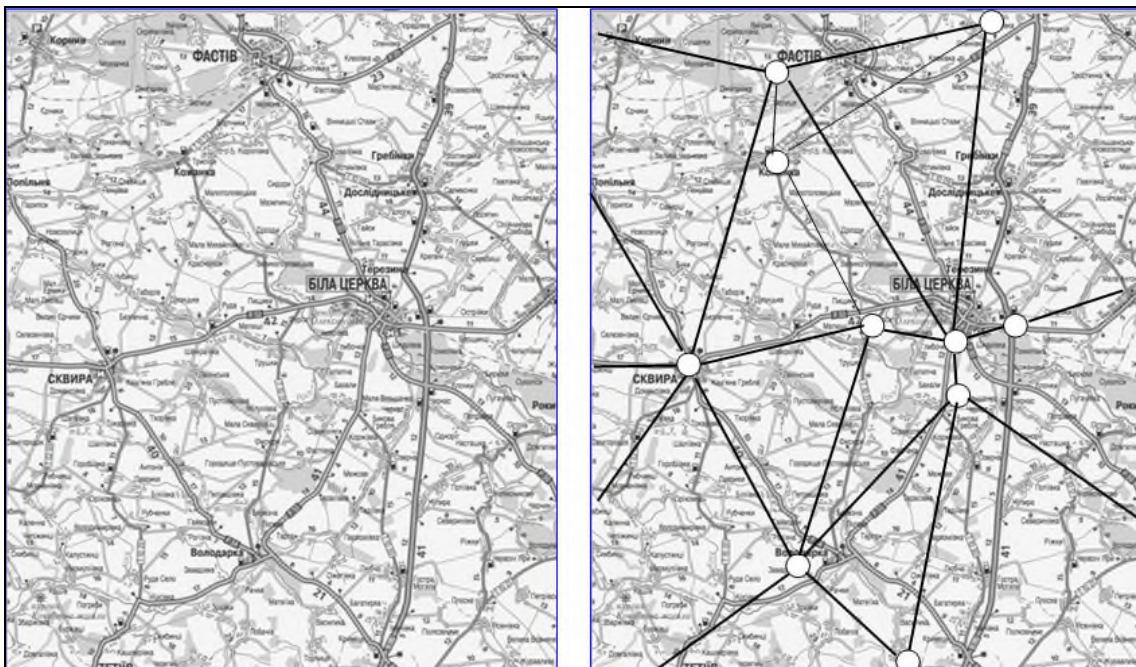


Рис. 1. Географічна карта та картосхема мережі

Залежно від кількості типів об'єктів, що одночасно передаються дугами, розрізняють одно- та багатопродуктові потоки, а мережа може бути одно- та багатополусною, тобто, мати по одному загальному входу (вузол-джерело, єдиний постачальник) та одному виходу (вузол-стік, єдиний споживач) чи входів і виходів буде більше одного.

У класичній постановці задана однополусна мережа з  $m$  вузлів та  $n$  дуг, де є один вузол-джерело  $s$ , один вузол-стік  $t$ , усі інші вузли — проміжні (транзитні),  $d$  — інтенсивність (потужність) джерела  $s$ , яка є невідомою, зрозуміло, що інтенсивність стоку дорівнює  $-d$  (бо «скільки увійшло, стільки й вийшло»). Шукана величина  $d$  — максимальний потік, який може пропустити через себе мережа. Кожна  $i$ -та дуга ( $i = 1, \dots, n$ ) характеризується пропускнуою здатністю  $p_i$ .

У розширеній постановці, що відповідає практичним задачам захисту, мережа є багатополусною, бо має кілька джерел і стоків, що з'єднуються між собою певними шляхами.

Переріз — множина дуг, видалення яких відокремлює  $s$  від  $t$ , величина перерізу — сума пропускну здатностей дуг, що йому належать. Переріз  $\pi$ , що має найменшу пропускну здатність, називається мінімальним. Доведено [4], що величина максимального потоку з джерела  $s$  до стоку  $t$  дорівнює пропускну здатності мінімального перерізу:  $\max d = \sum_{i \in \pi} p_i$ . Отже, якщо пропускну здатність дуги фун-

кціонально відповідає кількості ресурсу для її перекриття, значить, треба знайти мінімальний переріз, який покаже, які дуги треба «перерізати» й скільки ресурсу для цього знадобиться. Ця задача є двоїстою до задачі про пошук максимального потоку. Тож, якщо  $N_S$  — множина «ворожих» вузлів, з яких планується атака на множину вузлів-цілей  $N_T$ , тоді є зрозумілим алгоритм розв'язання задачі про пошук мінімальної кількості засобів для захисту  $N_T$ .

Числові характеристики, що визначають шуканий результат (це — невідомі дугові потоки, тобто, обґрунтована й зважена відповідь на запитання «звідки-куди-скільки» передається), стосуються кожної з дуг, це, у першу чергу, її пропускну здатність та, можливо, певний ваговий коефіцієнт, один чи декілька, що залежить від пропускну здатності й враховується в розрахунках.

Для задачі, що розглядається, найважливішою характеристикою дуги є її пропускну здатність, фактично, це ресурсні вимоги, необхідні для її повного перекриття (інакше, для автоматичної реєстрації чи явної перевірки усіх засобів, хто рухаються ділянкою). Наприклад, для ділянки (4, 8) величина потрібного ресурсу для повної заборони руху нею складає  $r_{48} = 7$ , тож, якщо визначено оптимальний потік для неї  $x_{48} = 1$  (не повне перекриття), значить, вона потребує й повністю контролюється 7-ма одиницями ресурсу, ця величина (7) увійде в загальну суму витрачених ресурсів, що мінімізується, якщо ж виходить, що  $x_{48} < 1$ , тоді ділянка (4, 8) вимушено контролюється лише частково меншим числом ресурсів.

У загальному випадку вузли у складі моделі «пасивні» чи «прості», бо лише фіксують умову балансу потоків у них за принципом — який потік увійшов, такий і вийшов, тобто, у них реалізуються функції, лише обмежуючі величину потоку. Якщо ж необхідно явно задати потікові характеристики для певного «непростого» вузла (наприклад, транзит крупним чи старовинним містом за тривалістю можна прирівняти до руху певною ділянкою, тож для такого «непростого» вузла

треба задати його пропускну здатність чи тривалість переїзду), такий вузол замінюють парою «простих» вузлів і дугою між ними з відповідними характеристиками — тепер ця дуга є моделлю відповідного «непростого» вузла.

У поточкових задачах безпекового типу для зручності вузли-джерела з множини  $N_S$  вважаються «зовнішніми» пунктами організації атак, направлених на «внутрішні»<sup>1</sup> вузли-стоки з множини  $N_T$ , що разом із відповідними дугами між ними утворюють критичну інфраструктуру і яку треба захистити, бо атаки здійснюються рухом атакуючих сил ланцюгами «джерела→проміжні ділянки→стоки» мережі. Перекриття руху будь-яким ланцюгом здійснюється перекриттям конкретної ланки цього ланцюга в певному чи будь-якому довільному її місці, на що витрачаються певні ресурси у заданій кількості при задоволенні обмеження на їхню загальну кількість.

Отже, для задачі про максимальний потік/мінімальний переріз («max-min») задана мережа

$$M = \{G, P\},$$

де  $G = \{N, A\}$  — орієнтований граф у вигляді сукупності вузлів ( $N$ , nodes) та дуг ( $A$ , arcs);  $P = \{p(A)\}$  — масив вагових коефіцієнтів дуг (пропускних здатностей дуг), цей основний масив може бути доповненим іншими масивами, зокрема, кількостями ресурсу (ресурсів), необхідного для повного перекриття дуги.

Ресурсами можуть бути: технічні засоби, обслуговуючий чи оперативний персонал, час, необхідний для здійснення контрольних чи заборонних операцій.

Згідно теорії лінійного програмування (ЛП) задача про максимальний потік називається прямою, її результат — усі дугові потоки  $x_i$ , що рухаються з джерел до стоків, сума цих потоків максимальна. Задача про мінімальний переріз є двоїстою (спряженою до прямої), її результат — сукупність дуг, що утворюють мінімальний переріз, скорочена назва математичної задачі й відповідної моделі — «max-min».

У цій моделі необхідно визначити:

1) пряму задачу:

— потоки кожною дугою;

— рівень насиченості дуг (наприклад, у %);

— потоки через кожен вузол;

— максимальну пропускну здатність комунікаційної мережі;

2) двоїсту задачу:

— мінімальний переріз («вузьке місце») у вигляді множини дуг, видалення яких повністю перекриває рух з початкових вузлів (джерел) до кінцевих вузлів (стоків);

— кількість необхідних ресурсів (це максимальна пропускну здатність мережі).

<sup>1</sup> Це досить умовна термінологія, адже джерело географічно може бути розташоване у середині мережі, а об'єкти-цілі — ззовні його, наприклад, терористи базуються у горах всередині регіону й атакують об'єкти, що розташовані на прикордонних ділянках.

Класичний підхід до розв'язання задачі max-min передбачає зведення реальної багатополусної мережі до однополусного варіанту (1, 1), де додатково вводяться фіктивні зовнішні вузли-полуси: Вхід (узагальнене джерело) і Вихід (узагальнений стік), а усі направлені зв'язки між цими полусами та із заданими вхідними (на рис. 2 їх три) й вихідними вузлами (два) мають нульові характеристики (рис. 2).

Цей підхід змушено збільшує розмір задачі, ускладнює підготовку початкових даних і певним чином робить таку модель дещо штучною. Нами пропонується реалізація багатополусного варіанта, у прикладі (3, 2)-полусної мережі, де моделюється задана мережа (на рис. зафарбована) без будь-яких допоміжних перетворень і додавань.

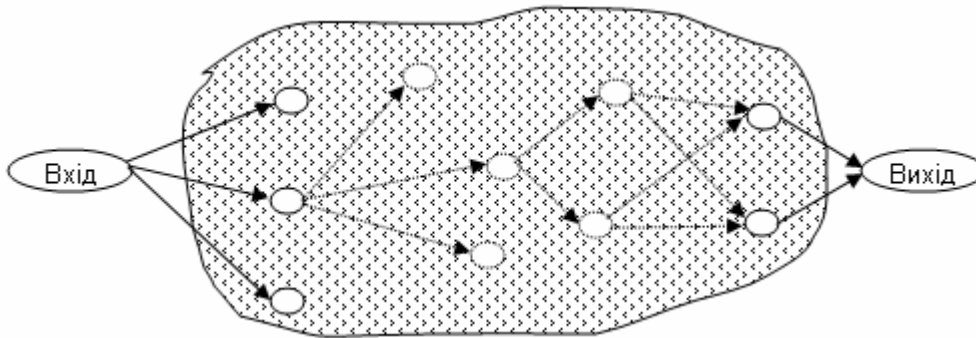


Рис. 2. Однополусний варіант (3, 2)-полусної мережі

**Приклад.** На території України комунікаційна мережа представлена змішаним графом  $G = (A, N)$ , що складається з 40 дуг та 25 вузлів (рис. 3).

Множина  $A$  усіх 40 заданих дуг  $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ , це:

$A_1$  — підмножина орієнтованих дуг-стрілок, що зв'язують вхідні (джерела) і вихідні (стоки) вузли з проміжними вузлами, їх всього 34;

$A_2$  — 20 дуг у складі  $A_1$  зв'язують вхідні вузли з усіма іншими (сума потоків ними визначає пропускну здатність мережі, тобто, цільову функцію, що максимізується);

$A_3$  — підмножина неорієнтованих дуг-ліній між певними проміжними вузлами, їх 6: (Вінниця↔Житомир), (Вінниця↔Хмельницький), (Хмельницький↔Житомир), (Суми↔Харків), (Дніпропетровськ↔Запоріжжя) та (Івано-Франківськ↔Тернопіль); рух ними можливий в обох напрямках, вибір кращого з цих двох — додатковий шуканий результат.

Множина  $N$  з 25 вузлів  $N = \{N_S, N_P, N_T\}$ , це:

$N_S$  — 8 «зовнішніх» (вхідних) вузлів-джерел, з яких організується атака (прямокутники);

$N_P$  — 13 проміжних (транзитних) вузлів, через які проходять шляхи атакуючих сил (чорні кружечки);

$N_T$  — 4 «внутрішніх» (вихідних) вузла-стоків, на які направлена атака (подвійні кружечки).

Оскільки граф  $G$  з позиції орієнтації дуг змішаний, його треба представити у вигляді мережі — орієнтованого зваженого графа, для цього 6 неорієнтованих дуг

(A3) замінюють парами направлених назустріч дуг з однаковими пропускними здатностями. В результаті маємо багатополусну (8 входів і 4 виходи) мережу  $M(25, 46)$  з 25 вузлів і 46 орієнтованих дуг. Якщо б ми користувалися класичним способом потокового програмування, треба б було ще додати 2 фіктивних вузли (Вхід, Вихід) і з'єднати їх 12 дугами з 8 вхідними й 4 вихідними вузлами, тоді б мали мережу  $M(27, 58)$ , що певним чином ускладнює процес розв'язання задачі.

Класичний спосіб ЛП представляє потокову задачу у вигляді прямокутних матриць типу: «вузол-вузол» розміром  $25 \times 25$  (більше 600 невідомих) або «вузол-дуга» розміром  $25 \times 46$  (більше 1000 невідомих), який є нереальним для практики, то ж ми використовуємо для представлення мережі економну спискову структуру даних з 46 невідомими.

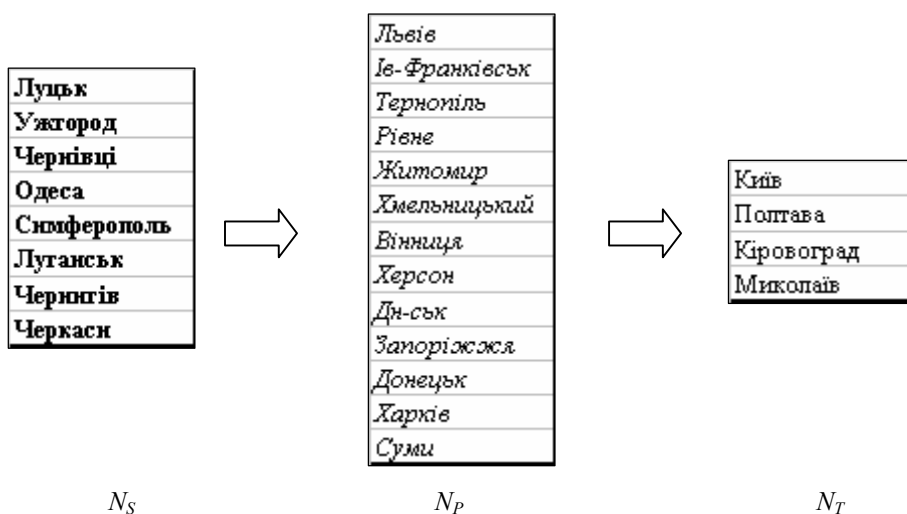


Рис. 3. (8, 4)-полусна мережа

Отже, моделюється мережа  $M(25, 46)$ . Для потоків від початкових вузлів через проміжні до кінцевих вузлів існують шляхи у вигляді направлених ланцюгів, ланки яких утворюють суміжні дуги-стрілки. Відповідна математична модель прямої потокової задачі ЛП (на максимум) складається з 46 невідомих величин (дугові потоки) та 25 обмежень на їх значення (баланс у вузлах). Для двоїстої задачі (на мінімум) навпаки — треба знайти 25 невідомих (потенціали вузлів) із врахуванням 46 обмежень (для дугових потоків).

Зовнішні умови, що враховують специфічні властивості задачі, представляються відповідними додатковими обмеженнями — це дещо ускладнює модель, зате робить її ближчою до реального стану об'єкта, що досліджується.

## Математична модель

### Позначення:

$m$  — кількість направлених дуг (невідомих);

$i$  — поточний номер дуги (поток),  $i = 1, \dots, m$ ;

$n$  — кількість вузлів (обмежень);

$j$  — поточний номер вузла,  $j = 1, \dots, n$ ;

$(n, m)$  — розмір потокової задачі;

$F_{ex}$  — загальний вхідний потік з усіх джерел;

$F_{vix}$  — загальний вихідний потік в усі стоки;

$x_i$  — величина потоку  $i$ -ю дугою,  $X = \{x_i\}$  — шуканий план прямої задачі;

$p_i$  — пропускна здатність  $i$ -ої дуги;

$y_j$  — двоїста оцінка вузла,  $Y = \{y_j\}$  — шуканий план двоїстої задачі;

$F_{ex}(j)$  — сума вхідних потоків у  $j$ -й вузол;

$F_{vix}(j)$  — сума вихідних потоків з  $j$ -го вузла;

$d$  — величина максимального потоку (мінімального перерізу) мережі.

## Задача потокової оптимізації

Пряма задача (про максимальний потік).

I. Знайти вектор  $X = \{x_i\}$ , такий, щоб

II.  $d = \sum_{i \in A} x_i \rightarrow \max$  (ЦФ), де  $A$  — множина дуг мережі.

III. за обмежень:

(3.1)  $x_i \leq p_i$  (для кожної  $i$ -ї дуги, у прикладі усі  $p_i = 1$ );

(3.2)  $F_{ex}(j) - F_{vix}(j) = 0$  (умова збереження потоку для кожного  $j$ -го вузла);

(3.3)  $F_{vix} = F_{ex}$  (для мережі) та граничних умов: усі  $x_i \geq 0$ .

Двоїста задача (про мінімальний переріз).

I. Знайти вектор  $Y = \{y_j\}$ , такий, щоб

II.  $\sum_{i \in A} y_i p_i \rightarrow \min$  (ЦФ)

III. за обмежень:

(3.1)  $y_j \in \{0, 1\}$  (для кожного  $j$ -го вузла)

(3.2)  $F_{vix}(j) = F_{ex}(j)$  (умова збереження потоку для кожного  $j$ -го вузла)

(3.3)  $F_{vix} \leq F_{ex}$  (для мережі) та граничних умов: усі  $y_j \geq 0$ .





Оскільки мережа складається з двох об'єктів: вузлів і дуг, відповідна ЕТ-модель складається з двох таблиць: для вузлів і для дуг.

**Алгоритм**

1. Ввести початкові дані (назви 25 вузлів); рекомендується скомпонувати їх у 3 групи згідно моделі:  $N_S$  (8 вузлів,  $N_T$  (4 вузла) та  $N_P$  (13 вузлів), для зручності перенумерувати і виділити групи вузлів кольором чи шрифтом, так формується таблиця для вузлів.

2. З цих назв зв'язуванням сформувати 46 пар дуг (Початок-Кінець) згідно конфігурації мережі; рекомендується скомпонувати ці пари у 3 групи:  $A_1$  (20 вхідних дуг, потоки якими визначають пропускну здатність мережі);  $A_2$  (14 орієнтованих дуг);  $A_3$  (множина з 6 пар, всього 12 неорієнтованих дуг), перенумерувати і виділити групи дуг кольором чи шрифтом.

3. У таблиці для вузлів у стовпці Вхід обчислюються суми вхідних потоків у кожен вузол ( $F_{вх}(j)$ ), у стовпці Вихід — суми вихідних потоків з кожного вузла ( $F_{вих}(j)$ ), а у стовпці Вх-Вих — їхня алгебраїчна сума.

4. Обчислення лівих (ЛЧО) і правих (ПЧО) частин обмежень для вузлів, ЛЧО — це сума потоків з 8 вхідних вузлів ( $F_{вх}$ ), а ПЧО — сума потоків у 4 вихідні вузли ( $F_{вих}$ ).

5. Обчислення значення цільової функції — суми потоків з 8 вхідних вузлів

6. Запуск програми «Поиск решения»; заповнення полів вікна програми.

7. Для зручності діапазонам клітинок рекомендується надати змістовні імена, де: МаксПЗ — максимальна пропускну здатність (ЦФ); Потік — шуканий план; Баланс — значення Вх-Вих для проміжних вузлів.

8. Після отримання результату побудувати звіт зі стійкості плану (Устойчивость) для визначення мінімального перерізу (нормовані вартості для невідомих та тіньові ціни для вузлів).

9. Модифікація моделі: додавання обмежень, зміна початкових даних, дослідження впливу певного параметру на кінцевий результат.

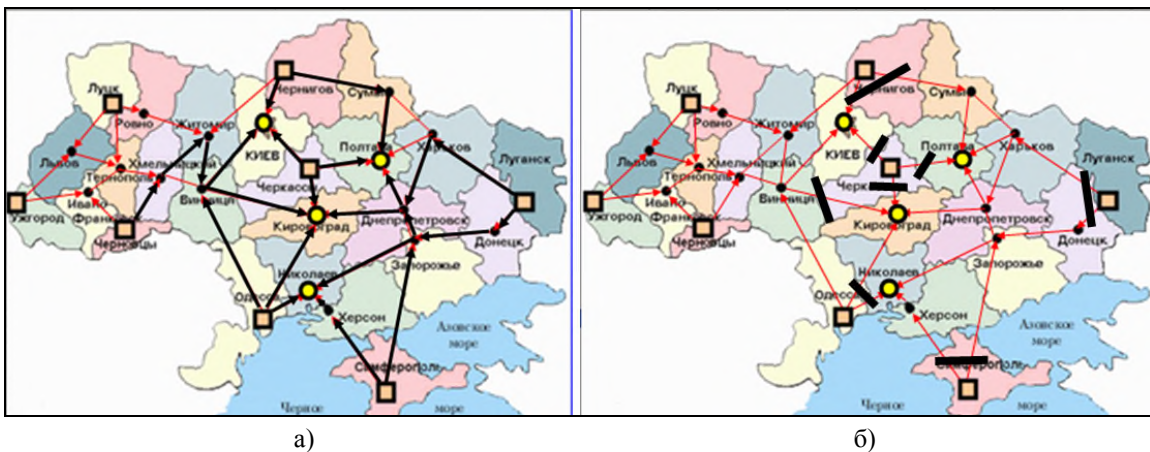


Рис. 5. Розв'язок задачі «max-min»:  
а) максимальний потік (25 дуг); б) мінімальний переріз (13 дуг)

**Висновок:** запропонований підхід до потокового моделювання в доступному й ефективному середовищі MS Excel дає змогу проводити аналіз складних ситуацій і формувати на його основі зважені й обґрунтовані управлінські рішення.

1. *Wood K.* Deterministic Network Interdiction / K. Wood // *Mathematical and Computer Modeling*. — 1993. — Vol. 17.
2. *Brown G.* Defending Critical Infrastructure / G. Brown, M. Carlyle, J. Salmeron, K. Wood // *Interfaces*. — 2006. — Vol. 36.
3. *Salmeron J.* Analysis of Electric Grid Security Under Terrorist Threat / J. Salmeron, K. Wood, R. Baldick // *IEEE Transactions on Power Systems*. — 2004. — Vol. 19.
4. *Ford L.R.* Flows in Networks / L.R. Ford, D.R. Fulkerson. — Princeton University. — NJ, 1962; пер. рос. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.
5. *Brown G.* Solving Generalized Networks / G. Brown, R. McBride // *Management Science*. — 1984. — Vol. 30.
6. *Anderson L.* Application of the Maximum Flow Problem to Sensor Placement on Urban Road Networks for Homeland Security / Anderson L., Atwell R., Barnett D., Bovey R. — *Homeland Security Affairs*. — 2007. — Vol. I.
7. *Fylstra D.* Design and Use of the Microsoft Excel Solver / D. Fylstra, L. Lasdon, J. Watson, A. Waren // *Interfaces*, 1998.
8. *Moore J.H.* Decision modeling with Microsoft Excel / J.H. Moore, L.R. Weatherford. — Prentice Hall, 2001; пер. рос. *Мур Дж., Уэдерфорд Л.* Экономическое моделирование в Microsoft Excel. — 6-е изд. — М.: «Вильямс», 2004.
9. *Кузьмичов А.І.* Лінійні задачі математичного програмування в MS Excel: навч. пос. / А.І. Кузьмичов, М.Г. Медведєв. — К.: АМУ, 2006.
10. *Kuzmichov A.* Operations Research: Optimization models for Decision-making: навч. пос. / A. Kuzmichov. — К.: АМУ, 2007.

Надійшла до редакції 06.10.2009