

УДК 621.3; 004.31

І. В. Косяк

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Динамічне перетворення частоти дискретизації на основі поліфазного фільтра

Розглянуто можливість використання поліфазного фільтра на основі структури Ферроу для динамічного перетворення частоти дискретизації і застосування його в цифровій обробці звукових сигналів.

Ключові слова: перетворення частоти дискретизації, поліфазний фільтр, структура Ферроу, поліноміальна інтерполяція, апроксимація сигналу.

Більшість сигналів і параметрів, що вимірюються, є за своєю природою безперервними аналоговими величинами. При введенні в комп'ютер неминуче доводиться перетворювати їх у послідовність відліків, прив'язаних до конкретних моментів часу, тобто здійснювати дискретизацію сигналів за часом. Для одержання значень дискретизованих сигналів використовуються, головним чином, аналого-цифрові перетворювачі з рівномірною дискретизацією. Однак при вирішенні ряду задач з цифрової обробки сигналів доводиться стикатися з нерівномірною дискретизацією сигналів.

На даний час для відновлення сигналів з нерівномірною дискретизацією досліджуються різні методи перетворення частоти дискретизації, які розраховані на незначні коливання відхилень інтервалу дискретизації [1–3]. Але є приклади, коли в сигналі фонограм аналогових записів присутні значні зміни висоти тону, який може змінюватись навіть в декілька разів. Реконструювати такий сигнал можливо тільки за умов цифрової обробки сигналів, вважаючи коливання висоти тону (детонацію) як нерівномірні відліки сигналу в часі. Ці викривлення сигналу, через низьку якість звучання фонограм, обмежують введення до наукового обігу раритетних записів музичних творів, записаних на воскових фоноциліндрах, грамофонних платівках, магнітних стрічках. У зв'язку з цим є дуже важливим вирішення задачі усунення детонації в звуковому сигналі.

Тому в даній роботі пропонується розглянути можливість застосування структури Ферроу для безперервного регулювання перетворення частоти дискретизації з метою відновлення нерівномірних відліків оцифрованого сигналу та подальшого її застосування в цифровій обробці звукового сигналу.

© І. В. Косяк

Аналіз особливостей перетворення частоти дискретизації

Перетворення частоти дискретизації застосовується в цифрових системах, де необхідно здійснювати обробку потоків даних з різними частотами дискретизації. Типовий приклад застосування перетворення частоти дискретизації в цифрових аудіосистемах для узгодження частоти дискретизації різних пристроїв відтворення звуку. В цифрових магнітофонах (DAT) частота дискретизації сигналу 48 кГц, для компакт дисків (CD) — 44,1 кГц, а в домашніх відеосистемах звукова доріжка може мати частоти 48 кГц, 96 кГц, 192 кГц.

При дискретизації сигналу, що згадується в контексті цифрової обробки сигналів, звичайно передбачається, що вибірка вважається детермінованою і періодичною. Перетворення частоти дискретизації $F = 1/T$ представляє собою зміну частоти дискретизації дискретного сигналу.

Коли нова частота дискретизації вища за дійсну так, що $F' > F$ і $T' < T$, то загалом цей процес називається інтерполяцією, суть якої полягає в додаванні нулів кількістю $(F'/F) - 1$ між двома сусідніми відліками. В результаті утворюється нова послідовність із частотою дискретизації F' , до якої застосовується інтерполяційний фільтр.

Коли нова частота дискретизації нижче за дійсну так, що $F' < F$ і $T' > T$, то цей процес називається децимацією. При цьому з послідовності $x(n)$ відкидаються $(F/F') - 1$ відліків між відліками $x(i)$ і $x(i + F/F')$. Але, перед усуненням «зайвих» відліків виконують фільтрацію сигналу з метою усунення високочастотних складових, щоб не допустити виникнення їх накладень [4].

Перетворення частоти дискретизації за допомогою інтерполяції або децимації може здійснюватися в ціле число раз. У випадках, коли коефіцієнт перетворення є раціональним числом M/N , застосовують послідовне виконання інтерполяції в M разів і децимації в N разів. При правильному виборі цілих коефіцієнтів M і N можна реалізувати практично будь-яке значення коефіцієнта перетворення. Наприклад, при перетворенні частоти дискретизації звукового сигналу з 48 кГц до 44,1 кГц необхідно зменшити частоту дискретизації з коефіцієнтом 0,91875 шляхом інтерполяції з $M = 147$ з наступною децимацією з $N = 160$. Недоліком даного методу є необхідність фільтрації сигналу на підвищеній в M раз частоті дискретизації, у даному прикладі обчислення виконуються на частоті дискретизації більше 7 МГц, що вимагає значних обчислювальних ресурсів. Таким чином, перетворення частоти дискретизації в наведеному вище вигляді є неефективним.

Для підвищення ефективності фільтрації використовують метод перетворення частоти дискретизації за допомогою поліфазних фільтрів. Поліфазний фільтр являє собою набір невеликих фільтрів, що працюють паралельно, кожний з яких обробляє тільки підмножину відліків сигналу. При цьому не формується нова послідовність і не виконуються зайві обчислення, тому що для кожного відліку необхідно обчислити вихідний сигнал тільки одного з цих фільтрів [5].

Дискретизація може бути рівномірною, якщо крок дискретизації $\Delta T = t_i - t_{i-1} = \text{const}$, і нерівномірною (рис. 1). Нерівномірна дискретизація буває адаптивною, програмною або випадковою. При адаптивній дискретизації крок ΔT_i вибирають залежно від характеру зміни сигналу в розглянутий проміжок ча-

су, а програмна дискретизація проводиться за заздалегідь установленною програмою роботи.

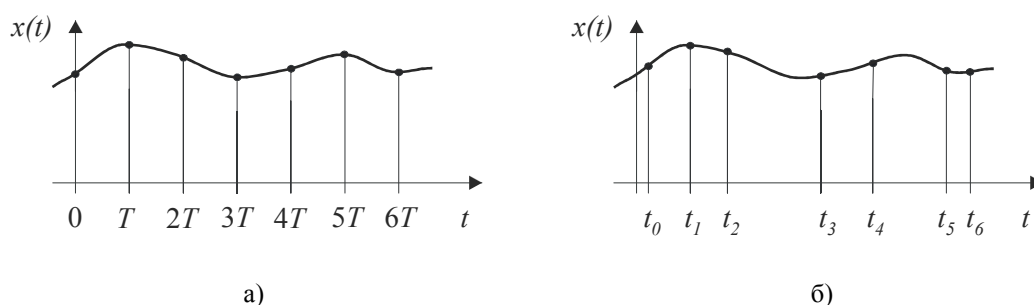


Рис. 1. Методи дискретизації: а) рівномірна; б) нерівномірна

Існує й зворотна задача — перетворення частоти нерівномірної дискретизації вже оцифрованого сигналу. З нерівномірною дискретизацією сигналів доводиться стикатися при вирішенні ряду задач з цифрової обробки сигналів, що обумовлено нелінійними перетвореннями в часі цифрового сигналу з рівномірною дискретизацією, наприклад в радіоастрономії, обміні цифровими даними в мережі [6]. При цьому вважається, що значення відхилення інтервалу дискретизації $\tau_n = NT - t_n$ відомі. На рис. 2 представлено приклад відхилення інтервалів τ_n при нерівномірній дискретизації від імовірної рівномірної.

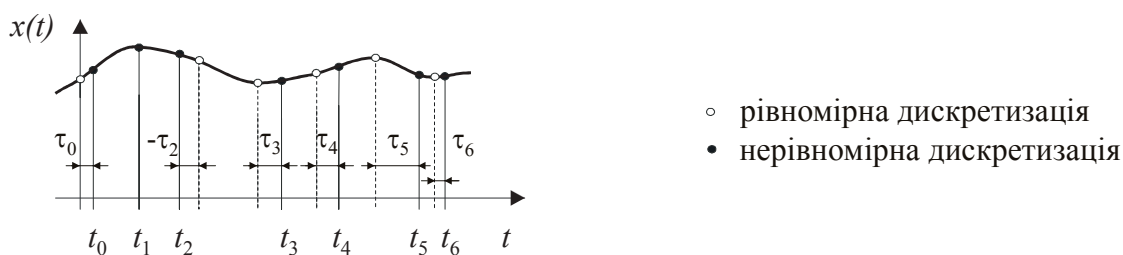


Рис. 2. Нерівномірна дискретизація: τ_0, \dots, τ_n відхилення інтервалу дискретизації від імовірної рівномірної дискретизації

Реалізація поліфазного фільтра на основі структури Ферроу

Найбільш відповідна структура поліфазного фільтра для відновлення нерівномірної дискретизації була запропонована Ферроу [6]. Структура Ферроу базується на поліноміальній інтерполяції і забезпечує ефективне вирішення проблеми зміни частоти дискретизації на будь-яку довільну частоту дискретизації. Класичні методи поліноміальної інтерполяції побудовані на інтерполюванні значень функції многочленом певного ступеня.

Основне рівняння інтерполяції дискретного сигналу записується у вигляді [7]

$$y(kT_i) = y[(n_k + \mu_k) T_S] = \sum_{i=I_1}^{I_2} x[(n_k - i) T_S] \cdot h_i [(i + \mu_k) T_S], \quad (1)$$

де $\{x(n)\}$ — послідовність відліків сигналу з інтервалом T_S ; $h_i(t)$ — імпульсна характеристика інтерполяційного нерекурсивного фільтра (КИХ фільтра); i — індекс фільтра; n_k — вихідна координата, яка визначає $I = I_2 - I_1 + 1$ відліків сигналу для використання k -м інтерполянтом; μ_k — дробовий інтервал дискретизації, який визначає коефіцієнти фільтра k -го інтерполянта.

Імпульсна характеристика інтерполяційного фільтра виражається в кожному інтервалі T_S за допомогою полінома ступеня M [6]:

$$h_i(t) = h_i \left[(i + \mu_k) T_S \right] = \sum_{m=0}^M c_m(i) \mu_k^m. \quad (2)$$

Число поліноміальних коефіцієнтів $c_m(i)$ є постійним, яке не залежить від μ_k , і визначається виключно імпульсною характеристикою інтерполяційного фільтра $h_i(t)$.

Після підстановки (2) в (1) та перестановки членів можна обчислити інтерполянти:

$$y(k) = \sum_{i=I_1}^{I_2} x(n_k - i) \cdot \sum_{m=0}^M c_m(i) \mu_k^m = \sum_{m=0}^M \mu_k^m \cdot \sum_{i=I_1}^{I_2} c_m(i) \cdot x(n_k - i) = \sum_{m=0}^M \mu_k^m \cdot v(m), \quad (3)$$

$$v(m) = \sum_{i=I_1}^{I_2} c_m(i) \cdot x(n_k - i), \quad (4)$$

де $v(m)$ — відліки сигналу з виходу $M + 1$ інтерполяційних нерекурсивних фільтрів з відповідними коефіцієнтами імпульсної характеристики $c_m(I_1)$, $c_m(I_1 + 1)$, ..., $c_m(I_2)$.

Зрозуміло, що передавальна функція цього нерекурсивного фільтра буде мати вигляд:

$$C_m(z) = \sum_{i=I_1}^{I_2} c_m(i) \cdot z^{-i}. \quad (5)$$

Вираз (3) — це власне поліномом від μ_k^m , який є єдиним змінним параметром структури. Відповідна структура, що описана виразами (3) та (4) і є структурою Ферроу [8]. Вона складається з $M + 1$ нерекурсивних фільтрів з постійними коефіцієнтами, включеними паралельно, виходи яких помножуються на дробовий інтервал дискретизації μ_k , і відповідно сумуються, як показано на рис. 3. Характерною особливістю цієї структури є те, що передавальні функції нерекурсивних фільтрів $C_m(z)$, $m = 0, 1, \dots, M$, не залежать від μ_k .

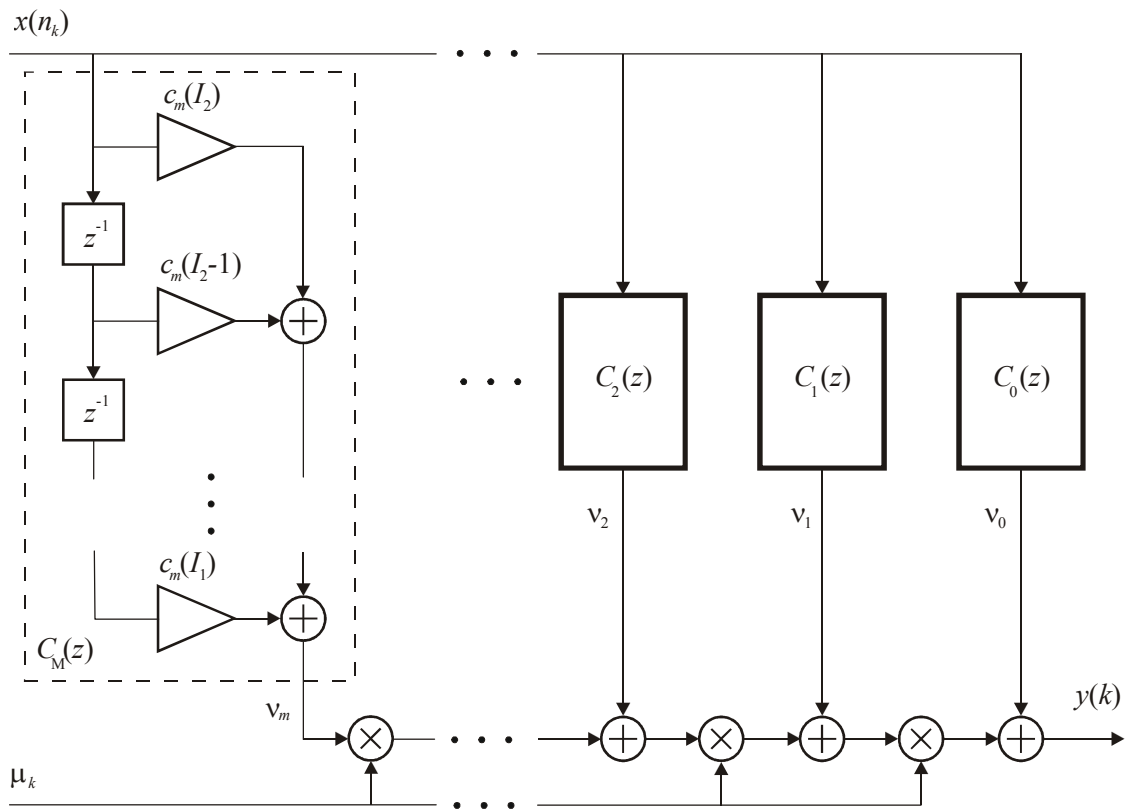


Рис. 3. Структура Ферроу на поліноміально інтерполяційних фільтрах

Задача динамічного перетворення частоти дискретизації вирішується в два етапи: апроксимація сигналу з нерівномірною дискретизацією аналітичним вираженням (інтерполяція по множині значень сигналу), та програмна реалізація.

При виборі апроксимації сигналу з нерівномірною дискретизацією керуємося тим, що розв'язання задачі повинне бути однозначним. Для цього необхідно в якості інтерполяційної функції знайти поліном. З відомих інтерполяційних формул при нерівномірній дискретизації підходять тільки інтерполяційні формули Лагранжа та Ньютона [9]. На практиці в більшості випадків застосовується поліном Лагранжа 3-го ступеня [6].

Тоді, використовуючи інтерполяційний поліном Лагранжа, знаходження поліноміальних коефіцієнтів визначатимуться наступним виразом:

$$h_l(t) = \sum_{m=0}^M c_m(i) \mu_k^m = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^M \frac{(\mu_k - m)}{(i - m)}, \quad i = I_1, I_1 + 1, \dots, I_2, \quad I = M + 1. \quad (6)$$

Розпишемо поліном Лагранжа (6) ступеня $M = 3$ на інтервалі I для моментів дискретизації $i = [0, 1, 2, 3]$:

$$h_0(\mu_k) = \frac{(\mu_k - 1)(\mu_k - 2)(\mu_k - 3)}{-6} = -\frac{1}{6} \mu_k^3 + \mu_k^2 - \frac{11}{6} \mu_k + 1,$$

$$\begin{aligned} h_1(\mu_k) &= \frac{\mu_k(\mu_k - 2)(\mu_k - 3)}{2} = \frac{1}{2}\mu_k^3 - \frac{5}{2}\mu_k^2 + 3\mu_k, \\ h_2(\mu_k) &= \frac{\mu_k(\mu_k - 1)(\mu_k - 3)}{-2} = -\frac{1}{2}\mu_k^3 + 2\mu_k^2 - \frac{3}{2}\mu_k, \\ h_3(\mu_k) &= \frac{\mu_k(\mu_k - 1)(\mu_k - 2)}{6} = \frac{1}{6}\mu_k^3 - \frac{1}{2}\mu_k^2 + \frac{1}{3}\mu_k. \end{aligned} \quad (7)$$

У результаті отримуємо передавальну функцію поліфазного фільтра:

$$H_I(z) = h_0(\mu_k) + h_1(\mu_k) \cdot z^{-1} + h_2(\mu_k) \cdot z^{-2} + h_3(\mu_k) \cdot z^{-3}. \quad (8)$$

Підставивши базисні поліноми (7) в (3), а за тим, привівши подібні відносно ступенів μ_k , знайдемо таким чином поліноміальні коефіцієнти для структури Ферроу:

$$\begin{aligned} y(k) &= x(n) \cdot \left(-\frac{1}{6}\mu_k^3 + \mu_k^2 - \frac{11}{6}\mu_k + 1 \right) + x(n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\mu_k^3 - \frac{5}{2}\mu_k^2 + 3\mu_k \right) + \dots \\ &\dots + x(n-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\mu_k^3 + 2\mu_k^2 - \frac{3}{2}\mu_k \right) + x(n-3) \cdot \left(\frac{1}{6}\mu_k^3 - \frac{1}{2}\mu_k^2 + \frac{1}{3}\mu_k \right) = \\ &= v(0) + \mu_k \cdot v(1) + \mu_k^2 \cdot v(2) + \mu_k^3 \cdot v(3) \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} v(0) &= x(n), \quad v(1) = -\frac{11}{6}x(n) + 3x(n-1) - \frac{3}{2}x(n-2) + \frac{1}{3}x(n-3), \\ v(2) &= x(n) - \frac{5}{2}x(n-1) + 2x(n-2) - \frac{1}{2}x(n-3), \\ v(3) &= -\frac{1}{6}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) - \frac{1}{2}x(n-2) + \frac{1}{6}x(n-3). \end{aligned} \quad (10)$$

Відповідно передавальна функція тоді запишеться у вигляді:

$$H_I(z) = C_0(z) + C_1(z) \cdot \mu_k + C_2(z) \cdot \mu_k^2 + C_3(z) \cdot \mu_k^3, \quad (11)$$

де

$$C_0(z) = 1; \quad C_1(z) = -\frac{11}{6} + 3z^{-1} - \frac{3}{2}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3};$$

$$C_2(z) = 1 - \frac{5}{2}z^{-1} + 2z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-3}; \quad C_3(z) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-3}. \quad (12)$$

Вираз (9) є не що інше, як кубічний поліном. Кожен із коефіцієнтів (10) кубічного полінома (9) залежить від відліків вхідного сигналу. При цьому $v(1), \dots, v(3)$ залежать від чотирьох попередніх значень. З аналізу виразу (10) видно, що процес обчислення коефіцієнтів для кубічного полінома добре алгоритмується і є основою для одержання аналітичного вираження апроксимованого сигналу (9) на інтервалі $[0, \dots, 3]$.

Для зручності програмування підраховувати вираз (9) слід за правилом Горнера [10]:

$$y(k) = v(0) + \mu_k \cdot [v(1) + \mu_k \cdot [v(2) + \mu_k \cdot v(3)]]. \quad (13)$$

Програмна реалізація динамічного перетворення частоти дискретизації на основі поліфазного фільтра із застосуванням структури Ферроу була виконана в інтегрованому середовищі *Matlab* відповідно з розробленим алгоритмом. На рис. 4 представлені часові діаграми роботи створеної програми, де $x(n)$ — вхідний сигнал; $y(k)$ — вихідний сигнал; $U(\mu)$ — модулюючий сигнал, відповідний закону зміни частоти дискретизації; μ_k — дробовий інтервал дискретизації.

Для прикладу, наведеного на рис. 4, були використані як $x(n)$ — дискретний синусоїдальний сигнал частотою 2 кГц і частотою дискретизації 20 кГц, як сигнал керування зміною частоти дискретизації (або інтервалом дискретизації) $U(\mu)$ — дискретний синусоїдальний сигнал частотою 100 Гц і частотою дискретизації 20 кГц. На рис. 4 видно, що вхідний сигнал $x(n)$ перетворюється на виході поліфазного фільтра на основі структури Ферроу (рис. 3) в частотно-модульований сигнал $y(k)$ з несучою частотою 2 кГц і частотою модуляції 100 Гц. Сигнал μ_k (рис. 4) відповідає дробовому інтервалу дискретизації у виразі (13) і має область визначення $0 \leq \mu_k < 1$.

Керуючий сигнал зміни частоти дискретизації $U(\mu)$ перетворюється в дробовий інтервал дискретизації μ_k в тілі програмного оператора циклу з передумовою так, щоб можна було визначити момент часу нової послідовності t_k , виходячи зі співвідношення

$$t_k = n_k T_s + \mu_k T_s = t_n + \mu_k T_s,$$

де n_k — поточна координата вхідної послідовності; T_s — інтервал дискретизації; t_n — момент часу вхідної послідовності. На рис. 5 детально показано як співвідносяться в часовому інтервалі відліки сигналів зміни частоти дискретизації $U(\mu)$ і дробового інтервалу дискретизації μ_k . Значення $U(\mu)$ прямо пропорційні коефіцієнту перетворення частоти дискретизації.

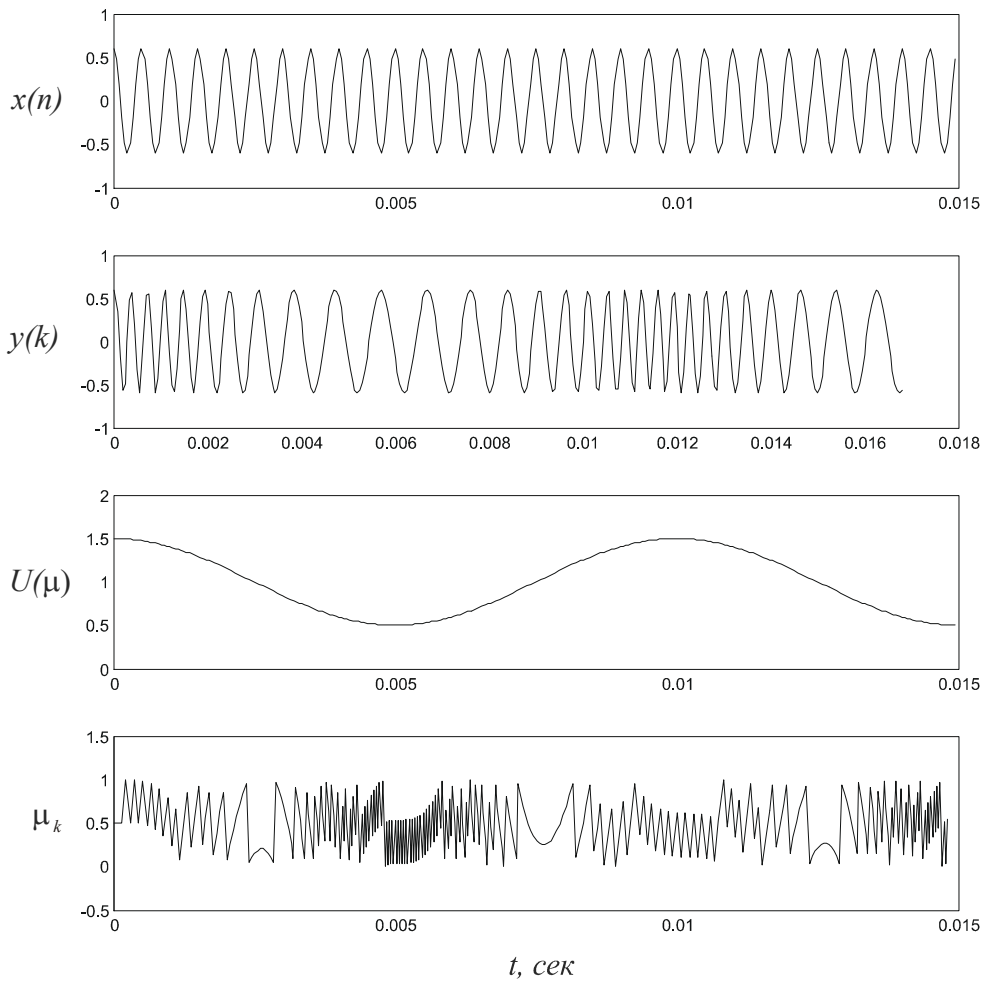


Рис. 4. Часові діаграми роботи програми

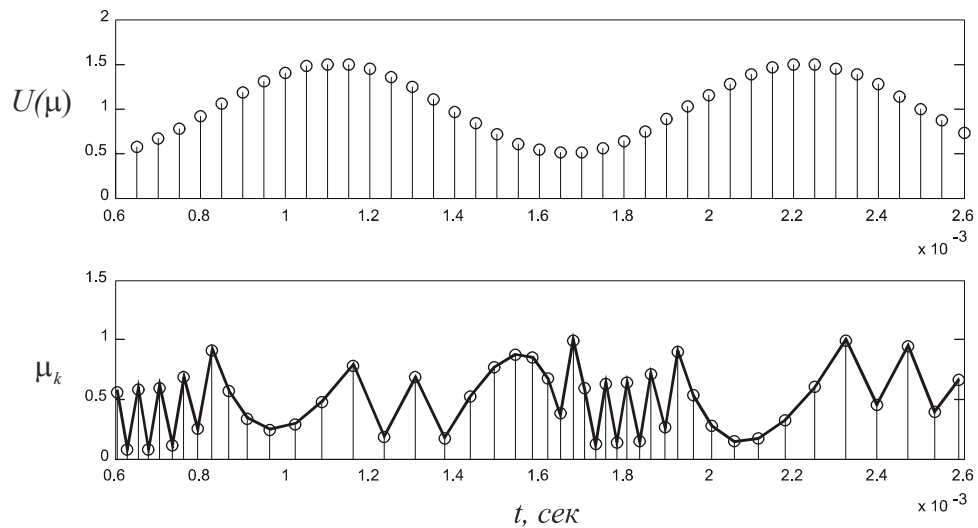


Рис. 5. Співвідношення відліків сигналів

Подальші експериментальні дослідження проводилися з метою застосування створеної програми для практичного використання в цифровій обробці звукового сигналу. На рис. 6 представлено відновлення частотно-модульованого сигналу, з наведеного вище прикладу, в якому присутня небажана частотна модуляція. Умовно пошкоджений сигнал оброблявся програмою, де в якості сигналу керування зміною частоти дискретизації $U(\mu)$ використовувався той же дискретний синусоїдальний сигнал частотою 100 Гц тільки зі зміщенням фази на π . Як видно з рис. 6,в, побічні гармоніки лежать у діапазоні нижче 60 дБ.

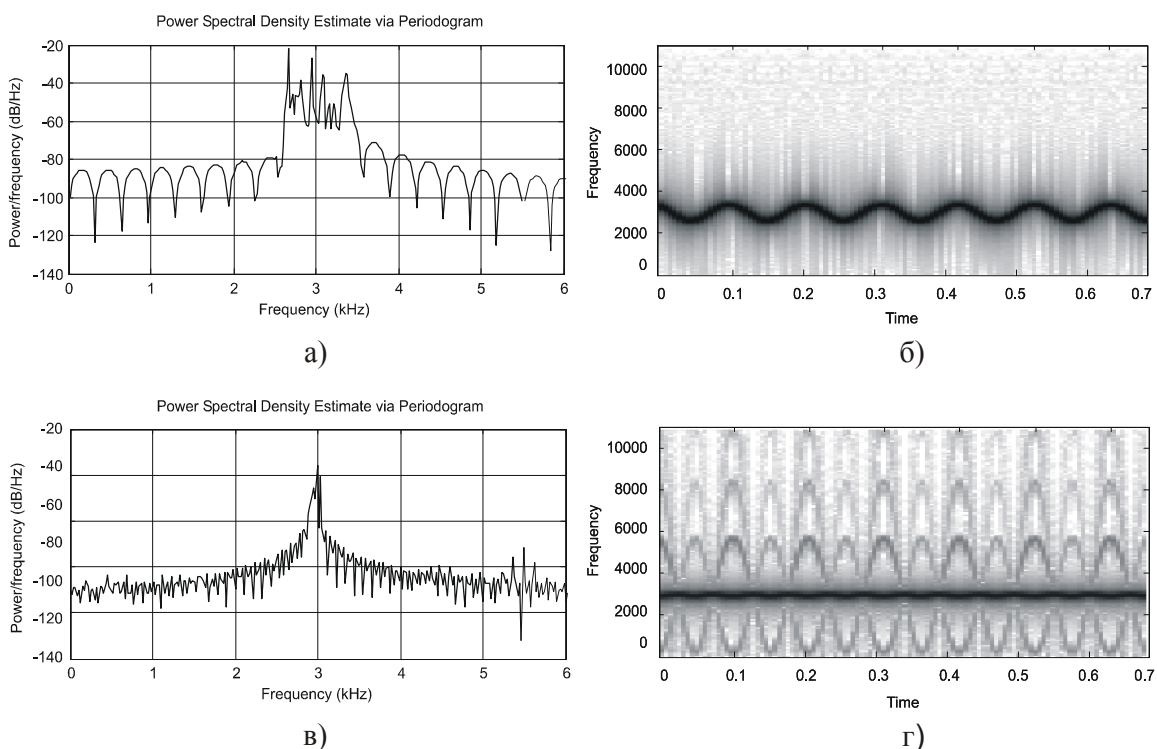


Рис. 6. Спектр і сонограма відповідно вхідного (а, б) і вихідного (в, г) сигналів

Результати досліджень дозволяють зробити висновок про можливість використання створеної програми для вирішення задачі по усуненню паразитних частотних складових у звуковому сигналі, тобто небажаної зміни висоти тону у відтвореному сигналі або детонації.

Експериментально було доведено, що створена програма динамічного перетворення частоти дискретизації на основі поліфазного фільтра із застосуванням структури Ферроу надійно працює при керуванні зміною частоти дискретизації у межах $F/10 < F < 10F$, що є більш ніж достатнім для використання в цифровій обробці звукового сигналу.

Висновки

У роботі показано можливість застосування поліфазного фільтра на основі структури Ферроу для динамічного перетворення частоти дискретизації (інтерва-

лу дискретизації), що дозволяє вирішувати ряд задач у цифровій обробці сигналів а саме: відновлення і реконструкцію звукового сигналу ушкодженого небажаною частотною модуляцією та ефективно перетворення частоти дискретизації в раціональне число раз. У подальшому автор припускає проводити дослідження по проблемам нерівномірної дискретизації та автоматичного знаходження сигналу зміни інтервалу дискретизації в ушкодженій фонограмі.

1. *Russell A.I.* Efficient Arbitrary Sampling Rate Conversion with Recursive Calculation of Coefficients / A.I. Russell, P.E. Beckmann // *IEEE Trans. Signal Process.* — 2002, April. — Vol. 50, N 4. — P. 854–865.
2. *Johansson H.* Reconstruction of Nonuniformly Sampled Bandlimited Signals Using Time-Varying Discrete-Time FIR Filters / H. Johansson, P. Lowenborg // *EURASIP Journal on Applied Signal Processing.* — 2006. — Vol. — P. 1–18.
3. *Tertinek S.* Reconstruction of Nonuniformly Sampled Bandlimited Signals Using a Differentiator-Multiplier Cascade / S. Tertinek, C. Vogel // *IEEE Trans. Circuits Syst.* — 2008, Sep. — Vol. 55, N 8. — P. 2273–2286.
4. *Crochiere R.* Multirate Digital Signal Processing / R. Crochiere, L.R. Rabiner. — Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1983.
5. *Richard G. Lyons.* Understanding Digital Signal Processing / Richard G. Lyons. — Prentice Hall, 2004.
6. *Erup L.* Interpolation in Digital Modems. — Part II: Implementation and Performance / L. Erup, F.M. Gardner, and R.A. Harris // *IEEE Transactions On Communications.* — 1993, June.— Vol. 41, N 6. — P. 998–1008.
7. *Gardner F.M.* Interpolation in Digital Modems. — Part I: Fundamentals / F.M. Gardner // *IEEE Transactions On Communications.* — 1993, March. — Vol. 41, N 3. — P. 502–508.
8. *Ljiljana M.* Multirate Filtering for Digital Signal Processing: MATLAB Applications / M. Ljiljana. — Information Science Reference, 2009.
9. *Корн Г.* Справочник по математике / Корн Г., Корн Т.: Пер. с англ. Под ред. И.Г. Арамано-вича. — М.: Наука, 1977. — 832 с.: ил.
10. *Гашков С.Б.* Системы счисления и их применение / С.Б. Машков —М.: МЦНМО, 2004. — 52 с.

Надійшла до редакції 04.12.2009