УДК 681.3.06

Н. Н. Снигур
Национальный технический университет Украины «КПИ»
Факультет электроники
ул. Академика Янгеля, 16/9, 03056 Киев, Украина
e-mail: nastena_sss@mail.ru

Алгебраическая характеристика класса частично-рекурсивных графовых функций

Рассмотрен класс вычислимых функций на множестве графов. Определено порождающее множество алгебры частично-рекурсивных функций на новом носителе — графе, а также доказана его полнота.

***Ключевые слова**: алгебра вычислимых функций и предикатов, конечный ориентированный граф, частично-рекурсивная функция и предикат произвольной арности, поиск порождающих множеств и базисов.*

1. Вступление

Задача нахождения базисов примитивных программных алгебр (ППА) функций тесно связана с формализацией теории программирования. В данной работе рассматривается ППА, носителем которой является множество вычислимых функций над конечными графами (вычислимость вводится согласно нумерационному подходу [2]). Основное внимание уделяется поиску порождающего множества данной ППА. Отметим, что полученные в работе результаты, дополняют результаты для векторных, матричных, реляционных и табличных функций [3–6].

Все использованные и неопределенные в работе понятия и обозначения следует трактовать в смысле [5].

2. Основные понятия

2.1. Носитель и сигнатура ППА

Носитель ППА могут составлять либо функции, зависящие от переменных [3, 12], либо n-арные функции и предикаты [4, 15]. Далее ППА понимаются во втором смысле, поэтому под функциями (предикатами) имеются в виду n-арные функции (предикаты) для $n = 1, 2, \dots$, хотя при их обозначении преимущество отдается не операторной, а термальной форме записи, ввиду ее компактности [2, п. 2.1].

Сигнатуру ППА составляют операции суперпозиции, ветвления и n-арного циклирования, которые являются адекватными уточнениями стандартных структур управления алголоподобных языков программирования. Для удобства последующего изложения и понимания работы кажется полезным дать формальное определение этих операций (подробнее см. [6, 13]).

1. Под *суперпозицией* подразумевается $(m+1)$-арная операция $S^{t_1,\dots,t_m}$ ($t_i \neq t_j$, $i \neq j$), $m = 1,2,\dots$, $m \le n$, которая произвольному кортежу функций

$$\langle f(x_1,\dots,x_n), f_1(y^1,\dots,y_k),\dots,f_m(z_1,\dots,z_p)\rangle$$

ставит в соответствие новую функцию g, зависящую от переменных множества

$$\left(\{x_1,\dots,x_n\}\setminus\{t_1,\dots,t_m\}\right)\cup\{y_1,\dots,y_k\}\cup\dots\cup\{z_1,\dots,z_p\},$$

где $\{x_1,\dots,x_n\}\cap\{t_1,\dots,t_m\}=\{x_{i1},\dots,x_{i_m}\}$, $i_r \neq i_s$, $r \neq s$, и $x_{i_s}=t_s$, $s=1,\dots,m$. Тогда значение этой новой функции считается равным

$$f(x_1,\dots,x_{i_1-1}, f_1(y_1,\dots,y_k), x_{i_1+1},\dots,\ x_{i_m-1}, f_m(z_1,\dots,z_p), x_{i_m+1},\dots,x_n).$$

2. *Ветвление* представляет собой $(m+1)$-арную операцию $\Diamond^{m+1}, m=2,3,\dots$, которая произвольному кортежу функций

$$\langle h(x_1,\dots,x_n), f_1(y_1,\dots,y_k),\dots,\ f_i(t_1,\dots,t_p),\dots,\ f_m(z_1,\dots,z_r)\rangle$$

ставит в соответствие новую функцию g. Причем здесь $h(x_1,\dots,x_n)$ — функция, с конечным множеством значений $\{h_1,\dots,h_m\}$. Тогда функция g зависит от переменных множества

$$\{x_1,\dots,x_n\}\cup\{y_1,\dots,y_k\}\cup\dots\cup\{t_1,\dots,t_p\}\cup\dots\cup\{z_1,\dots,z_r\}$$

и ее значение считается равным $f_i(t_1,\dots,t_p)$, если $h(x_1,\dots,x_n)=h_i$, и не определенным в другом случае.

3. Наконец *циклирование* задается, как семья $(n+1)$-арных операций $*^{(n+1)} : \langle p, f_1,\dots,f_n\rangle \to g$, $n=1,2,\dots$, где p — предикат, а f_i, g — функции, причем арность p, f_i, g равняется n. Значение $g(x_1,\dots,x_n)$ определяется следующим образом. Рассмотрим последовательность кортежей $\{(y_i^1,\dots,y_i^n),\ i=0,\ 1,\ \dots\}$, где $y_0^j := x_j$, $y_{i+1}^j :=\ f_j(y_i^1,\dots,y_i^n)$, $i=0,1,\dots, j=\overline{1,n}$. Найдем первый кортеж $(y_k^1,\dots,y_k^n)$ такой, что $p(y_k^1,\dots,y_k^n)=Л$. Положим $g(x_1,\dots,x_n)=y_k^1$. Если такого кортежа в последовательности не существует, то $g(x_1,\dots,x_n)$ считается неопределенным.

Отметим, что операция $*^{(n+1)}$ в сущности совпадает с операцией повторения первого рода функторов по предикату [8, 15].

Очевидно, что $p * f = *^{(n+1)}(p, f, I_2^n, ..., I_n^n)$, где арности p и f равняются n. Отсюда вытекает, что все утверждения, полученные в [3–7] в рамках предыдущего определения ППА, сохраняются при переходе к новому.

При термальной записи циклирования используем записи вида

$$p(x_1, ..., x_n) \underset{y_1 ... y_m}{*} \langle f_1(z_1^1, ..., z_{k_1}^1), ..., f_m(z_1^m, ..., z_{k_m}^m) \rangle,$$

указывая явно лишь те переменные, значения которых будут изменяться. При этом функция $f_i(z_1^i, ..., z_{k_i}^i)$ «управляет» изменением значения переменной y_i, а переменная y_1 считается «выходной». Возобновление операторной записи при этом очевидно.

2.2. Конечный граф

Прежде чем ввести формально объект граф, необходимо сделать оговорку, что существуют разные способы определения этого понятия, в зависимости от его последующего использования. В дальнейшем будем придерживаться терминологии, употребляемой в источнике [1].

Определение 1. Под (конечным) *ориентированным графом* g будем понимать совокупность двух множеств — непустого счетного множества V (множества *вершин*) и множества E упорядоченных пар разных элементов V (множества *ребер* или *дуг*), которое, вообще говоря, может быть и пустым:

$$g = \langle V, E \rangle, \quad V \neq \varnothing, \quad E \subset V \times V.$$

При этом, если $v_1, v_2 \in V$ и $e = (v_1, v_2) \in E$, то вершины v_1 и v_2 графа g называются *смежными*, а каждая из них в свою очередь называется также *инцидентной* дуге e.

Если $e = (v_1, v_2)$, то говорят, что дуга e направлена *от* вершины v_1 *к* вершине v_2. Дуга e считается *положительно инцидентной* ее конечной вершине v_2. Количество дуг, которые являются положительно инцидентными вершине, называется ее *положительной степенью* и обозначается $\delta^+(v_1)$. *Отрицательная степень* определяется аналогично и обозначается $\delta^-(v_1)$.

Замечание 1. Ниже будем рассматривать конечные ориентированные *псевдографы* (т.е. графы с петлями — дугами, которые соединяют вершину саму с собой). Множество всех таких графов обозначим G.

Замечание 2. Для удобства изложения последующего материала, введем понятие так называемой *псевдо-вершины* или *пустой* вершины. Будем считать, что произвольная вершина графа может иметь какое угодно количество *псевдо-дуг*, которые связывают ее с пустой вершиной.

С помощью A_{G} обозначим ППА, носитель которой составляют все частично-рекурсивные функции (чр) и предикаты на G. Порождающее множество алгебры A_{G} назовем ее полной системой, а полную систему ППА — I_m^n-базисом, если всякая ее подсистема, получаемая удалением какого-либо предиката или какой-либо функции, отличной от селекторной, уже не будет полной.

В силу конечности рассматриваемых графов, не будет существенным ограничением, если в качестве вершин графа рассматривать натуральные числа. При этом на множестве вершин графа вводится вполне естественный порядок. Кроме того, становится очевидным, что множество всех конечных графов является счетным, а, следовательно, для него должна существовать эффективная нумерация $\alpha_{\mathsf{G}} : \mathsf{N} \to \mathsf{G}$ (определенная в смысле [11]).

Основой данного исследования являются две известных теоремы: теорема об изоморфизме и теорема о базисе ППА:

Теорема 1 (об изоморфизме ППА). Биективное отображение $\theta_\alpha : A_{\mathsf{G}}^{\text{чр}} \to A_{\mathsf{N}}^{\text{чр}}$, которое сопоставляет каждой функции на G определенную арифметическую функцию (в нумерации α_{G}), задает изоморфизм ППА $A_{\mathsf{G}}^{\text{чр}}$ на ППА $A_{\mathsf{N}}^{\text{чр}}$, где $A_{\mathsf{N}}^{\text{чр}}$ — ППА всех чр-функций и чр-предикатов над N.

Теорема 2 (о базисе ППА). Существует I_m^n-базис алгебры $A_{\mathsf{G}}^{\text{чр}}$, который состоит с точностью до селекторных функций из двух функций и одного предиката.

При построениях в ППА часто являются удобными логические связки для предикатов [6, 9, 14]; они легко моделируются в ППА с помощью везде истинного и везде ложного предикатов ($p_и$, $p_л$), например:

$$p(x_1,\dots,x_n) \vee q(y_1,\dots,y_m) = \Diamond(p(x_1,\dots,x_n), p_и(x_1), \Diamond(q(y_1,\dots,y_m), p_и(x_1), p_л)),$$
$$p(x_1,\dots,x_n) \,\&\, q(y_1,\dots,y_m) = \Diamond(p(x_1,\dots,x_n), \Diamond(q(y_1,\dots,y_m), p_и(x_1), p_л), p_л(x_1)),$$
$$\neg p(x_1,\dots,x_n) = \Diamond(p(x_1,\dots,x_n), p_л, p_и(x_1)).$$

Обозначим с помощью $[\sigma]_{\mathfrak{B}}$ замыкание множества σ операциями совокупности $\mathfrak{B}$, а Ω — совокупность введенных выше операций ППА.

3. ППА частично-рекурсивных граф-функций и граф-предикатов

Рассмотрим следующие функции на множестве графов (граф-функции):

1) C_0^{G} — константная функция: $C_0^{\mathsf{G}}(g) = g_0^1$;

2) S_{G} — увеличение на единицу номера первой вершины графа, т.е., если $g = \langle V = \{v_1,\dots,v_n\}, E = \{e_1 = (v_1,v_k),\dots,e_l = (v_p,v_1)\dots\}\rangle$, то $S_{\mathsf{G}}(g) = \langle \tilde{V} = \{v_1+1,\dots,v_n\}$, $\tilde{E} = \{e_1 = (v_1+1,v_k),\dots,e_l = (v_p,v_1+1)\ \dots\}\rangle$;

3) $\cup$ — объединение графов: $g_1 = \langle V_1,E_1\rangle$, $g_2 = \langle V_2,E_2\rangle$, $g_1 \cup g_2 = \langle V_1 \cup V_2$, $E_1 \cup E_2\rangle$;

4) $\setminus$ — разность графов: $g_1 = \langle V_1,E_1\rangle$, $g_2 = \langle V_2,E_2\rangle$, $g_1 \setminus g_2 = \langle V_1, E_1 \setminus E_2\rangle$;

5) E_e — выделение первой дуги, т.е., для $g = \langle V = \{v_1, ..., v_n\}$, $E = \{e_1 = (v_l, v_k), ...\}\rangle$, $E_e(g) = \langle \widetilde{V} = \{v_l, v_k\}$, $\widetilde{E} = \{\widetilde{e}_1 = (v_l, v_k)\}\rangle$;

6) R — отожествление корня графа с первой отрицательно инцидентной вершиной: $g = \langle V = \{v_1, ..., v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$, $E = \{e_1 = (v_l, v_k), \ldots, e_s = (v_p, v_k), ...\}\rangle$, тогда $R(g) = \langle \widetilde{V} = \{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, ..., v_n\}$, $\widetilde{E} = \{\widetilde{e}_1 = (v_l, v_l), ..., \widetilde{e}_s = (v_p, v_l), ...\}\rangle$;

7) A — стягивание корня графа с первой отрицательно инцидентной вершиной: $g = \langle V = \{v_1, \ldots, v_{l-1}, v_l, v_{l+1}, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1 = (v_l, v_k), e_2 = (v_l, v_r), \ldots, e_s = (v_p, v_l), ...\}\rangle$, тогда $R(g) = \langle \widetilde{V} = \{v_1, \ldots, v_{l-1}, v_{l+1}, \ldots, v_n\}$, $\widetilde{E} = \{\widetilde{e}_1 = (v_k, v_r), \ldots, \widetilde{e}_{s-1} = (v_p, v_k), ...\}\rangle$;

8) $\cup^*$ — объединение графов g_1 и g_2 с добавлением дуги из корня графа g_1 в корень графа g_2: $g_1 = \langle V_1 = \{v_{11}, ...\}$, $E_1 = \{e_{11} = (v_{11}, v_l), ...\}\rangle$, $g_2 = \langle V_2 = \{v_{21}, ...\}$, $E_2 = \{e_{21} = (v_{21}, v_p), ...\}\rangle$, $g_1 \cup^* g_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{e_s = (v_{11}, v_{21})\}\rangle$;

9) E_v — выделение корня графа: $g = \langle V = \{v_1, ..., v_n\}$, $E = \{e_1 = (v_l, v_k), ...\}\rangle$, $E_v(g) = \langle \widetilde{V} = \{v_l\}, \varnothing\rangle$.

Также понадобятся еще и такие функции:

1) D_e — удаление первой дуги: $g = \langle V = \{v_1, ..., v_n\}, E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}\rangle$, $D_e(g) = \langle V, \tilde{E} = \{e_2, ..., e_m\}\rangle$;

2) D_v — удаление первой вершины, если она изолирована;

3) E_v^{out} — выделение подграфа, который состоит из корня графа и всех отрицательно инцидентных ему дуг: $g = \langle V = \{v_1, ..., v_n\}$, $E = \{e_1 = (v_l, v_k), \ldots, e_s = (v_l, v_r), e_{s+1} = (v_p, v_q), ...\}\rangle$, $E_v^{\text{out}}(g) = \langle \widetilde{V} = \{v_l, v_k, \ldots, v_r\}$, $\widetilde{E} = \{e_1, \ldots, e_s\}\rangle$;

4) $C_{\Delta_{\mathsf{G}}}$ — функция перевода в пустой граф: $C_{\Delta_{\mathsf{G}}}(g) = \Delta_{\mathsf{G}}$.

Положим

$$\sigma_{\mathsf{G}} := \{C_0^{\mathsf{G}}, S_{\mathsf{G}}, \cup, \setminus, E_e, R, A, \cup^*, E_v, =_{\mathsf{G}}, I_m^n\}_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\ldots}.$$

Можно непосредственно проверить, что все эти функции являются частично рекурсивными.

3.1. Отображение графа в вектор

Так как рассматриваются графы с вершинами из N, то любому графу g можно поставить в соответствие определенный вектор u, при этом псевдо вершине будет отвечать число 0. Вектор u формируется поэлементно следующим образом. Первым элементом поставим номер корня графа; далее перечислим все смежные с ним вершины, отвечающие отрицательно инцидентным дугам. Поставим разделяющий ноль. Повторяем этот процесс для всех вершин графа. В конце записываем номера всех изолированных вершин, также разделяя их нулями. Пустой граф (аналог пустого слова) будем обозначать Δ_{G}.

Обозначим данное отображение $\phi : \mathsf{G} \to \mathsf{N}^*$, $\mathsf{N}^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathsf{N}^i$, где $\mathsf{N}^0 = \{\Lambda\}$ — пустой вектор. Очевидно, что ϕ — инъекция, но не сюръекция. Обозначим $\mathsf{V} := \phi(\mathsf{G})$. Очевидно, это множество является рекурсивным в нумерации α_{G}.

Ниже под L-функцией (L-предикатом) понимается многоместная частичная операция (предикат) на множестве L.

Определение 4. V-функцию $F(x_1,...,x_n)$ назовем векторным образом граф-функции $\mathsf{F}(\xi_1,...,\xi_n)$, если $F(\varphi(g_1),...,\varphi(g_n)) \cong \varphi\ \mathsf{F}(g_1,...,g_n)$ для всех $g_1,...,g_n$. Аналогично V-предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ назовем векторным образом граф-предиката $\mathsf{P}(\xi_1,...,\xi_n)$, если $P(\varphi(g_1),...,\varphi(g_n)) \cong \varphi\ \mathsf{P}(g_1,...,g_n)$ для всех $g_1,...,g_n$.

Лемма 1. Векторным образом чр-граф-функции (чр-граф-предиката) является чр-V-функция (чр-V-предикат).

Непосредственно из рекурсивности множества V вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Любая чр-V-функция является чр-N^*-функцией (т.е. просто векторной чр-функцией). Для чр-предикатов аналогично.

Следствие 2. Векторный образ чр-граф-функции (чр-граф-предиката) является векторной чр-функцией (векторным чр-предикатом).

3.2. Отображение вектора в граф

С целью моделирования векторных функций граф-функциями построим кодирующее отображение $\Phi : \mathsf{N}^* \to \mathsf{G}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda) \quad &= \Delta_{\mathsf{G}}, \\ \Phi(v_1,...,v_n) \quad &= \langle V = \{v_1,...,v_n\} \cup \{1,...,n\}; E = \{(1,v_1),...,(n,v_n)\}\rangle. \end{aligned}$$

Определение 5. Граф-функция $\mathsf{F}(\xi_1,...,\xi_n)$ называется граф-моделью векторной функции $F(x_1,...,x_n)$, если $\mathsf{F}(\Phi(v_1),...,\Phi(v_n)) \cong \Phi(F(v_1,...,v_n))$ для всех $v_1,...,v_n$. Граф-модель предиката вводится аналогично.

Почти очевидно следующее утверждение.

Лемма 3. Для любых векторных чр-функций и чр-предикатов существуют их граф-модели, которые принадлежат замыканию $[\sigma_{\mathsf{G}}]_{\Omega}$.

3.3. Кодирующее и декодирующее отображения

Пусть $\psi := \varphi \cdot \Phi$. Очевидно, что $\psi : \mathsf{G} \to \Phi(\mathsf{V})$ — биекция. Через χ обозначим какое-либо расширение отображения ψ^{-1}. Граф-функции ψ и χ играют роли кодирующей и декодирующей функций соответственно.

Непосредственно из приведенных выше определений вытекает лемма.

Лемма 4. Пусть $\mathsf{F}(\xi_1,...,\xi_n)$ — чр-граф-функция, а $\mathsf{H}(\pi_1,...,\pi_n)$ — граф-модель векторного образа функции $\mathsf{F}(\xi_1,...,\xi_n)$. Тогда

$$\mathsf{F}(A_1,\ldots,A_n)=\chi(\mathsf{H}(\psi(A_1),\ldots,\psi(A_n)))$$

для всех A_i, $i=\overline{1,n}$.

Аналогично, пусть $\mathsf{P}(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ — чр-граф-предикат, а $\mathsf{K}(\pi_1,\ldots,\pi_m)$ — граф-модель векторного образа этого предиката. Тогда

$$\mathsf{P}(A_1,\ldots,A_n)=\mathsf{K}(\psi(A_1),\ldots,\psi(A_n))$$

для всех A_i, $i=\overline{1,n}$.

Теперь, если выразить функции ψ и χ с помощью замыкания $[\sigma_{\mathsf{G}}]_\Omega$, то отсюда немедленно следует полнота выбранного порождающего множества.

Лема 5. Имеет место

$$\psi,\chi\in[\sigma_{\mathsf{G}}]_\Omega.$$

Доказательство.

Рассмотрим такие граф-функции:

1) $\mathsf{G}_1(\pi,\xi,\zeta)=(D_e(R(E_e(\zeta)))\neq\tau)\underset{\pi,\xi,\zeta,\tau}{*}\langle\pi\cup\xi,E_e(\zeta),D_e(\zeta),\tau\rangle$;

2) $\mathsf{G}_2(\pi,\xi,\zeta)=(\zeta\cup^* D_e(R(E_e(\xi))))\cup((\xi\neq\Delta)\underset{\pi,\xi,\zeta}{*}\langle\pi\cup(\zeta\cup^* A(E_e(\xi))),$ $D_e(\xi),\ S_{\mathsf{G}}(\zeta)\rangle)$;

3) $\mathsf{G}_3(\xi,\{n\})$ — увеличение номера вершины графа ξ на n;

4) $\mathsf{G}_4(\xi)=\Diamond((E_e(\xi)=\Delta),\Delta,\ \mathsf{F}(\{1\},\ D_e(\xi)))$, где $\mathsf{F}(\pi,\xi)=(E_e(\xi)\neq\delta)\underset{\pi,\xi}{*}$ $\langle S_{\mathsf{G}}(\pi),D_e(\xi)\rangle$;

5) $\mathsf{G}_5(\pi,\xi,\zeta)=(E_e(\xi)\neq\Delta)\underset{\pi,\xi,\zeta}{*}\langle\pi\cup(\mathsf{G}_2(\Delta,\xi,\ S_{\mathsf{G}}(\zeta))),\xi\setminus\mathsf{G}_2(\Delta,\ \xi,\ S_{\mathsf{G}}(\zeta)),$ $S_{\mathsf{G}}(\mathsf{G}_3(\zeta,\ \mathsf{G}_4(\mathsf{G}_2(\Delta,\ \xi,\ S_{\mathsf{G}}(\zeta)))))\rangle$;

6) $\mathsf{G}_6(\pi,\xi,\zeta)=(\xi\neq\Delta)\underset{\pi,\xi,\zeta}{*}\langle\pi\cup(\zeta\ \cup^* E_v(\xi)),\ D_v(\xi),S^2_{\mathsf{G}}(\zeta)\rangle$;

7) $\mathsf{G}_7(\pi,\zeta)=(S^2_{\mathsf{G}}(D_e(R(\xi)))\neq D_e(R(E_e(\zeta))))\underset{\pi,\xi,\zeta}{*}\langle\pi\cup\xi,E_e(\xi),D_e(\zeta)\rangle$;

8) $\mathsf{G}_8(\xi)=D_e(R(E_e(\xi)))$;

9) $\mathsf{G}_9(\pi,\xi,\tau)=(\tau\neq\Delta)\underset{\pi,\xi,\zeta,\tau}{*}\langle\pi\cup(\xi\cup^*\zeta),\xi,\mathsf{G}_8(\tau),D_e(\tau)\rangle$;

10) $\mathsf{G}_{10}(\pi,\xi)=(\xi\neq\Delta)\underset{\pi,\xi}{*}\langle\pi\cup\mathsf{G}_9(\Delta,\mathsf{G}_8(\mathsf{G}_7(\Delta,\xi)),D_e(\mathsf{G}_7(\Delta,\xi))),\xi\setminus\mathsf{G}_7(\Delta,\xi)\rangle$.

Несложно показать, что

$$\psi(g)=\mathsf{G}_5(\Delta,g,g_0)\cup,$$

$$\mathsf{G}_6(\Delta,\ g\setminus((\xi\neq\Delta)\underset{\pi,\xi}{*}\langle\pi\cup E_e(\xi),D_e(\xi)\rangle),S^2_{\mathsf{G}}(\mathsf{G}_4(g^1_0,\mathsf{G}_5(\Delta,\ g,g_0))))$$

и

$$\chi(\tilde{g}) = \mathsf{G}_{10}(\Delta, (\tilde{g})).$$

Из приведенных выше определений и утверждений непосредственно вытекает основное утверждение данной работы.

Теорема 3. σ_{G} является полной системой алгебры $A_{\mathsf{G}}^{\text{чр}}$.

В заключение заметим, что следующим шагом данного исследования может быть проверка, есть ли совокупность граф-функций σ_{G} базисом указанной ППА $A_{\mathsf{G}}^{\text{чр}}$, а также попытка сократить количество функций порождающего множества.

1. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. — СПб: Питер, 2000. — 304 с.
2. *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции / А.И. Мальцев. — М.: Наука, 1965. — 391 с.
3. *Буй Д.Б.* Примитивные программные алгебры целочисленных и словарных функций / Д.Б. Буй, В.Н. Редько / Докл. АН УССР. Сер. А. — 1984. — **1573**. — С. 69−71.
4. *Буй Д.Б.* К теории программных алгебр / Д.Б. Буй, А.В. Мавлянов. — Укр. мат. журн. — 1984. — **36**, № 1576. — С. 761−764.
5. *Буй Д.Б.* Примитивные программные алгебры. Т. I / Д.Б. Буй, В.Н. Редько // Кибернетика. — 1984. — **1575**. — С. 1−7
6. *Буй Д.Б.* Примитивные программные алгебры. Т. II / Д.Б. Буй, В.Н Редько // Кибернетика. — 1985. — 1571. — С. 28−33.
7. *Буй Д.Б.* Примитивные программные алгебры: автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. / Д.Б. Буй. — Киев, 1985. — 22 с.
8. *Заславский И.Д.* Граф-схемы с памятью / И.Д. Заславский // Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1964. — 72. — С. 99−192.
9. *Голунков Ю.В.* О полноте операций в системах алгоритмических алгебр / Ю.В. Голунков. // Алгоритмы и автоматы. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. — С. 11−53.
10. *Мальцев А.И.* Конструктивные алгебры. I / А.И. Мальцев // Успехи мат. наук. — 1961. — **16**, 1573. — С. 3−60.
11. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций / Ю.Л. Ершов. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
12. *Буй Д.Б.* Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дисерт. … докт. физ.-мат. наук / Д.Б. Буй. — К.: КНУ. — 2002. — 365с.
13. *Буй Д.Б.* Программологические аспекты метода неподвижной точки / Д.Б. Буй, В.Н. Редько // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 5. — С. 158–167
14. *Зубенко В.В*. Алгебраїчні засоби специфікації інформаційних моделей / В.В.Зубенко // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. — 2003. — Т. 21.
15. *Буй Д.Б.* Композиційна семантика маніпуляцій них дій: збереження денотатів, характеристики, обчислювальність, необхідні умови повноти / Д.Б. Буй // Вісник Київ. ун-тету. Сер. фіз.-мат. науки. — 2002. — Вип. 1. — С. 169–188.

Надійшла до редакції 27.10.2009