УДК 681.513

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ДУАЛЬНОСТИ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Н. ПОДЛАДЧИКОВ, Н.А. НАРОДИЦКАЯ

Рассматривается проблема построения аналитического решения задач фильтрации и оптимального управления с квадратичным критерием качества для систем с дискретным временем.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема дуальности впервые была рассмотрена в основополагающей работе Калмана, Фалба, Арбиба «Очерки по математической теории систем» [1]. Далее это направление исследовалось Ванемом, Остремом [2,3]. В данной статье на основе дуальности задачи фильтрации для одного класса динамических систем (свободных от шума состояния) и соответствующей задачи управления будет описано аналитическое решение задач фильтрации и оптимального управления с квадратичным критерием качества в системах с дискретным временем. Предлагаемый авторами подход на основе принципов системного анализа развивает направление, предложенное в работе [4].

Характерной особенностью фильтра Калмана, построенного для свободных динамических систем, является возможность полного аналитического исследования алгоритмов фильтрации, т.е. получения аналитического решения уравнения Риккати для ковариационной матрицы ошибки оценки вектора состояния и явного представления переходной матрицы фильтра. На основании полученных соотношений в данной статье приводится полное аналитическое решение задачи фильтрации для линейных стационарных систем в общем случае. Также на основе принципа дуальности находится полное аналитическое решение общей задачи управления с квадратичным критерием качества, т.е. аналитическое решение уравнения Риккати и явный вид переходной матрицы замкнутого контура регулирования.

Полученные результаты могут быть применены для исследования асимптотических свойств регулятора и устойчивости замкнутого контура регулирования.

1. ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассмотрим модель линейной динамической стационарной системы, описываемой уравнениями состояния и измерения в виде

$$x(k+1)=\Phi x(k)+w(k)\,, \qquad (1)$$

$$z(k) = Hx(k) + v(k)\,. \tag{2}$$

Здесь $x(k)$ — n-мерный вектор состояния системы; Φ — $n \times n$-матрица; H — $m \times n$-матрица; $w(k)$ и $v(k)$ — гауссовы случайные процессы типа белого шума с нулевыми средними значениями. Их корреляционные матрицы имеют вид

$$\operatorname{cov}[w(k);\, w(i)] = Q\delta(k-i)\,, \operatorname{cov}[v(k);\, v(i)] = R\delta(k-i)\,,\ \operatorname{cov}[w(k);\, v(i)] = 0\,,$$

где Q — симметричная неотрицательно определенная $r \times r$-матрица; R — симметричная положительно определенная $m \times m$-матрица; $\delta(k-i)$ — дельта-функция Дирака.

Начальный n-мерный гауссов случайный вектор $x(k_0)$ имеет нулевое среднее $E[x(k_0)] = 0$ и корреляционную матрицу $E[x(k_0)\, x^T(k_0)] = P_0$, причем P_0 — неотрицательно определенная матрица, которая предполагается известной. Кроме того, $w(k)$ и $x(k_0)$ и $v(k)$ независимы.

Задача оценки состояния системы решается на основе уравнений фильтра Калмана [1]

$$\hat{x}(k+1,k) = \Phi\, \hat{x}(k,k-1) + K(k)\nu(k)\,, \tag{3}$$

$$K(k) = \Phi P(k,k-1) H^T (HP(k,k-1)H^T + R)^{-1}\,, \tag{4}$$

где $\nu(k) = z(k) - H\hat{x}(k,k-1)$; $P(k+1,k)$ — ковариационная матрица ошибки оценки вектора состояния, удовлетворяющая разностному уравнению Риккати

$$P(k+1,k) = \Phi P(k,k-1)\Phi^T + Q -$$

$$-\Phi\, P(k,k-1) H^T \left[R + H\,P(k,k-1)H^T\right]^{-1} H\,P(k,k-1)\Phi^T \tag{5}$$

при $P(k_0,k_0) = P_0$.

Переходная матрица фильтра удовлетворяет уравнению

$$\Psi(k+1,k) = \Phi[I - P(k,k-1)H^T (HP(k,k-1)H^T + R)^{-1} H]\,. \tag{6}$$

2. ЗАДАЧА ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$x(k+1) = \Phi x(k) + Bu(k)\,, \tag{7}$$

где $x(k)$ — n-мерный вектор состояния системы; $u(k)$ — r-мерный вектор управления; Φ — $n \times n$-матрица; B — $n \times r$-матрица. Управление должно быть выбрано так, чтобы минимизировать функционал

$$J = x^T(K)Q_0x(K) + \sum_{i=k_0}^{K-1}\left[x^T(i)Q_1x(i) + u^T(i)Q_2u(i)\right], \tag{8}$$

где Q_0 — симметричная неотрицательно определенная $n \times n$-матрица; Q_1 — симметричная неотрицательно определенная $m \times m$-матрица; Q_2 — симметричная положительно определенная $r \times r$-матрица.

Закон оптимального управления, минимизирующего функционал (8), имеет вид [1]

$$u(k) = -L(k)x(k)\,,\ k = k_0,\ldots,K\,, \tag{9}$$

$$L(k) = \left[Q_2 + B^T S(k,k+1)B\right]^{-1} B^T S(k,k+1)\Phi\,, \tag{10}$$

где $S(k,k+1)$ удовлетворяет разностному уравнению Риккати

$$S(k-1,k) = \Phi^T S(k,k+1)\Phi + Q_1 - \Phi^T S(k,k+1)B\left[Q_2 + \right.$$

$$\left. + B^T S(k,k+1)B\right]^{-1} B^T S(k,k+1)\Phi \tag{11}$$

при $S(K,K) = Q_0$.

Оптимальная траектория имеет вид

$$x(k+1) = [I - \left[Q_2 + B^T S(k+1,k)B\right]^{-1} B^T S(k+1,k)]\Phi x(k)\,. \tag{12}$$

Как видно из соотношений (5) и (11), задача оценки состояния (1) – (6) двойственна задаче оптимального детерминированного управления(7) – (12) [3]. Эквивалентность задач проиллюстрирована таблицей.

Дуальность задач фильтрации и оптимального управления

Задача оценки состояния	$k = k_0 \ldots K$	K	k_0	Φ	H	P_0	Q	R	P	K
Стандартная задача оптимального управления	$k = K \ldots k_0$	K_0	K	Φ^T	B^T	Q_0	Q_1	Q_2	S	L^T

3. ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ СВОБОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим модель линейной свободной динамической стационарной системы, описываемой уравнениями состояния и измерения.

$$x(k+1) = Ax(k)\,, \tag{13}$$

$$z(k) = Hx(k) + \tilde{v}(k)\,. \tag{14}$$

Уравнения фильтра Калмана для свободных систем аналогичны уравнениям (3) – (5), только $Q = 0$, т.е. уравнение Риккати принимает вид

$$\tilde{P}(k+1,k) = A\tilde{P}(k,k-1)A^T - A\tilde{P}(k,k-1)H^T\Big[\tilde{R} +$$

$$+ H\tilde{P}(k,k-1)H^T\Big]^{-1} H\tilde{P}(k,k-1)A^T \qquad (15)$$

при $\tilde{P}(k_0,k_0) = \tilde{P}_0$.

Как показано в работе [4], фильтр Калмана для свободных динамических систем может быть представлен в аналитической форме. В частности, оценки вектора состояния вычисляются следующим образом:

$$\hat{x}(k+1,k) =$$

$$= A\tilde{P}(k,k)\left[[A^{k_0-k}]^T\tilde{P}^{-1}(k_0,k_0)\hat{x}(k_0) + \sum_{i=k_0+1}^{k}[A^{i-k}]^T H^T \tilde{R}^{-1} z(i)\right]. \qquad (16)$$

Аналитическое решение уравнения Риккати [4]

$$\tilde{P}(k,k) = \left[[A^{k_0-k}]^T\tilde{P}^{-1}(k_0,k_0)A^{k_0-k} + \sum_{i=k_0+1}^{k}[A^{i-k}]^T H^T \tilde{R}^{-1} H A^{i-k}\right]^{-1}. \qquad (17)$$

Переходная матрица фильтра для свободных динамических систем

$$\tilde{\Psi}(k+1,i) = \tilde{P}(k+1,k)(A^{i-k-1})^T\tilde{P}^{-1}(i,i-1). \qquad (18)$$

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПЕРЕХОДНЫХ МАТРИЦ ФИЛЬТРА ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ И СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим модели динамических систем, описываемых уравнениями (1), (2) и (13),(14). Заметим, что матрицы динамики и шумы измерения в указанных моделях различны.

Утверждение. Существует система, свободная от шума состояния, с определенно выбранными матрицами A и $\tilde{R}$, переходная матрица фильтра Калмана которой совпадает с переходной матрицей фильтра, построенного для системы, возмущаемой шумом состояния (1), (2).

Доказательство.

Рассмотрим систему (1), (2). Пусть $P(k+1,k)$ — решение уравнения Риккати (5), а P_∞ — решение алгебраического уравнения Риккати; $K(k)$ — коэффициент усиления фильтра, а K_∞ — его установившееся значение. Представим $P(k+1,k)$ и $K(k)$ в виде

$$P(k+1,k) = \hat{P}(k+1,k) + P_\infty, \qquad (19)$$

$$K(k) = \hat{K}(k) + K_\infty. \qquad (20)$$

Дискретное уравнение Риккати модели (1), (2) может быть представлено в виде

$$P(k+1,k)=[\Phi-KH]P(k,k-1)\Phi^T+Q \tag{21}$$

при $P(k_0,k_0)=P_0$.

Установившееся решение имеет вид

$$P_\infty=[\Phi-K_\infty H]P_\infty\Phi^T+Q\,. \tag{22}$$

Подставляя (19), (20) в выражение (21) и вычитая (22), проведя ряд преобразований, получаем

$$\hat{P}(k+1,k)=\hat{K}(k)HP_\infty\Phi^T-(\Phi-K_\infty H-\hat{K}(k)H)\hat{P}(k,k-1)\Phi^T\,.$$

Введем матрицу

$$\hat{A}=\Phi-K_\infty H\,, \tag{23}$$

которую можно интерпретировать как переходную матрицу дискретного фильтра Виннера. Тогда последнее выражение можно упростить и переписать в виде

$$\hat{P}(k+1,k)=\hat{K}(k)HP_\infty\Phi^T-(\hat{A}-\hat{K}(k)H)\hat{P}(k,k-1)\Phi^T\,. \tag{24}$$

Коэффициент усиления фильтра при $k\to\infty$

$$K_\infty=\Phi P_\infty H^T(HP_\infty H^T+R)^{-1}\,. \tag{25}$$

Введем матрицу

$$\hat{R}=R+HP_\infty H^T\,. \tag{26}$$

Тогда (25) преобразуется к виду

$$K_\infty=\Phi P_\infty H^T[\hat{R}]^{-1}\,.$$

Найдем выражение для $\hat{K}(k)$.

$$\hat{K}(k)=K(k)-K_\infty=\Phi(\hat{P}(k,k-1)+P_\infty)H^T(H\hat{P}(k,k-1)H^T+\hat{R})^{-1}-$$

$$-\Phi P_\infty H^T[\hat{R}]^{-1}=\Phi P_\infty H^T[(H\hat{P}(k,k-1)H^T+\hat{R})^{-1}-$$

$$-[\hat{R}]^{-1}]+\Phi\hat{P}(k,k-1)H^T(H\hat{P}(k,k-1)H^T+\hat{R})^{-1}=$$

$$=-K_\infty H(\hat{P}(k,k-1)^{-1}+H^T\hat{R}^{-1}H)^{-1}H^T\hat{R}^{-1}+$$

$$+\Phi\hat{P}(k,k-1)H^T(H\hat{P}(k,k-1)H^T+\hat{R})^{-1}=$$

$$= (\Phi - K_{\infty} H) \hat{P}(k, k-1) H^T (H \hat{P}(k, k-1) H^T + \hat{R})^{-1} =$$

$$= \hat{A} \hat{P}(k, k-1) H^T (H \hat{P}(k, k-1) H^T + \hat{R})^{-1} .$$

Тогда первое слагаемое (24) представимо в виде

$$\hat{K}(k) H P_{\infty} \Phi^T = \hat{K}(k) \hat{R} K_{\infty}^T = [A - \hat{K}(k) H] \hat{P}(k, k-1) H^T K_{\infty}^T .$$

Учитывая полученные соотношения, запишем

$$\hat{P}(k+1, k) = [A - \hat{K}(k) H] \hat{P}(k, k-1) H^T K_{\infty}^T - (\hat{A} - \hat{K}(k) H) \hat{P}(k, k-1) \Phi^T =$$

$$= (\hat{A} - \hat{K}(k) H) \hat{P}(k, k-1) \hat{A}^T = \hat{A} \hat{P}(k, k-1) \hat{A}^T - \hat{K}(k) H \hat{P}(k, k-1) \hat{A}^T ,$$

решение которого может быть представлено в виде

$$\hat{P}(k+1, k) =$$

$$= \left[[(\hat{A})^{k_0 - k}]^T \hat{P}^{-1}(k_0, k_0) (\hat{A})^{k_0 - k} + \sum_{i = k_0 + 1}^{k} [(\hat{A})^{i-k}]^T H^T \hat{R}^{-1} H (\hat{A})^{i-k} \right]^{-1} .$$

Сравнивая последнее выражение с (17), заметим, что $\hat{P}(k+1, k)$ можно рассматривать как ковариационную матрицу ошибок фильтрации для свободной системы с переходной матрицей, определяемой (23), ковариационной матрицей ошибок измерений (26) и матрицей начальной ковариации $P(k_0, k_0) - P_0$. Покажем, что переходная матрица свободной системы с указанными параметрами совпадает с переходной матрицей фильтра модели, возмущаемой шумом состояния (1), (2).

$$\hat{\Psi}(k, k-1) = \hat{A} - \hat{K}(k) H = \Phi - K_{\infty} H - \hat{K}(k) H = \Phi - KH = \Psi(k, k-1) .$$

Таким образом была построена свободная система, переходная матрица которой совпадает с переходной матрицей полной системы для $\forall\, k$. Параметры свободной системы, как видно из доказательства, имеют вид

$$A = \Phi - K_{\infty} H , \; \tilde{R} = R + H P_{\infty} H^T , \; \tilde{P}_0 = P(k_0, k_0) - P_0 .$$

Следствие 1.

Связь коэффициентов усиления полной и свободной динамических систем

$$K(k) = \tilde{K}(k) + K_{\infty} . \tag{27}$$

Следствие 2.

$$P(k, k) = \tilde{P}(k, k) + P_{\infty} . \tag{28}$$

Решение уравнения Риккати (5) представимо в виде

$$P(k,k) = P_\infty +$$

$$+\left[[A^{k_0-k}]^T \tilde{P}^{-1}(k_0,k_0)A^{k_0-k} + \sum_{i=k_0+1}^{k}[A^{i-k}]^T H^T \tilde{R}^{-1} H A^{i-k} \right]^{-1}. \tag{29}$$

Следствие 3.

В общем случае переходная матрица фильтра Калмана

$$\Psi(k+1,i) = \tilde{P}(k+1,k)(A^{i-k-1})^T \tilde{P}^{-1}(i,i-1) \tag{30}$$

или

$$\Psi(k+1,i) = (P(k+1,k) - P_\infty)(A^{i-k-1})^T (P(i,i-1) - P_\infty)^{-1}, \tag{31}$$

где $P(k+1,k)$ определяется выражением (29).

Таким образом, выражение (31) определяет явный вид переходной матрицы фильтра, оптимального для стационарной системы (1), (2).

5. ДУАЛЬНОСТЬ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим частный случай задачи оптимального управления

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \tag{32}$$

когда $Q_1 = 0$. Следовательно, квадратичный критерий качества принимает вид

$$J = x^T(K)Q_0x(K) + \sum_{i=k_0}^{K-1} u^T(i)\tilde{Q}_2 u(i). \tag{33}$$

Закон оптимального управления, минимизирующего функционал (33), и коэффициент обратной связи аналогичны задаче (7) – (12) , а уравнение Риккати принимает вид

$$\tilde{S}(k,k-1) = A^T \tilde{S}(k+1,k)A -$$

$$- A^T \tilde{S}(k+1,k)B[\tilde{Q}_2 + B^T \tilde{S}(k+1,k)B]^{-1} B^T \tilde{S}(k+1,k)A \tag{34}$$

при $\tilde{S}(K) = Q_0$.

Оптимальная траектория

$$x(k+1) = \left[I - \left(\tilde{Q}_2 + B^T \tilde{S}(k+1,k)B \right)^{-1} B^T \tilde{S}(k+1,k) \right] Ax(k). \tag{35}$$

Как видно из соотношений (15) и (34), задача оценки состояния для свободных систем (13) – (18) двойственна задаче оптимального детерминированного управления при $Q_1 = 0$ (32) – (35).

Учитывая указанную выше эквивалентность задач фильтрации и управления, получим аналитическое решение задачи оптимального управления при $Q_1 = 0$.

1. Решение уравнения Риккати

$$\tilde{S}(k,k+1) = \left[[A^{k-K}]\tilde{S}^{-1}(K,K)[A^{k-K}]^T + \sum_{i=k}^{K-1} A^{k-i} B \tilde{Q}_2^{-1} B^T [A^{k-i}]^T \right]^{-1}. \quad (36)$$

2. Коэффициент усиления обратной связи

$$\tilde{L}(k) = \left[A^T \tilde{S}(k,k+1) B (B^T \tilde{S}(k,k+1) B + Q_2)^{-1} \right]^T \quad \text{или}$$

$$\tilde{L}(k) = (B^T \tilde{S}(k,k+1) B + Q_2)^{-1} B^T \tilde{S}(k,k+1) A. \quad (37)$$

3. Оптимальное управление

$$\tilde{u}(k) = -\tilde{L}(k) x(k). \quad (38)$$

4. Переходная матрица замкнутого контура регулирования

$$\tilde{\Omega}(i,k+1) = \tilde{S}(i-1,i)^{-1} (A^{i-k-1})^T \tilde{S}(k,k+1). \quad (39)$$

6. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ МАТРИЦЫ ЗАМКНУТОГО КОНТУРА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим модель линейной динамической стационарной системы (1), (2) и задачу оптимального управления (7), (8). Эти задачи двойственны (см. часть 2), следовательно:

1. Решение уравнения Риккати задачи оптимального управления

$$S(k,k+1) = P(k+1,k) = P_\infty + \tilde{P}(k+1,k) = S_\infty + \tilde{S}(k,k+1), \quad (40)$$

где S_∞ — решение алгебраического уравнения Риккати в задаче о стационарном регуляторе. Решение уравнения Риккати (11) представимо в виде

$$S(k,k+1) = S_\infty +$$

$$+ \left[[A^{k-K}]\tilde{S}^{-1}(K)[A^{k-K}]^T + \sum_{i=k}^{K-1} A^{k-i} B \tilde{Q}_2^{-1} B^T [A^{k-i}]^T \right]^{-1}, \quad (41)$$

где A — матрица динамики, удовлетворяющая уравнению $A = \Phi - BL_\infty$, а $\tilde{Q}_2$ — уравнению $\tilde{Q}_2 = Q_2 + B^T S_\infty B$.

2. Коэффициент усиления задачи оптимального управления

$$L(k) = \tilde{L}(k) + L_\infty. \quad (42)$$

3. Оптимальное управление

$$u(k) = (\tilde{L}(k) + L_\infty)x(k) = \tilde{u}(k) + u_\infty \,. \tag{43}$$

4. Переходная матрица

$$\Omega(i, k+1) = \tilde{S}(i-1, i)^{-1} (A^{i-k-1})^T \, \tilde{S}(k, k+1) \,, \tag{44}$$

где $\tilde{S}(t)$ определяется выражением (36).

Пример.

Рассмотрим задачу стабилизации угловой скорости объекта, состоящего из двигателя постоянного тока, управляемого входным напряжением $\mu(k)$, с угловой скоростью вала $\xi(k)$ [5]. Входная переменная является кусочно-постоянной на интервалах продолжительностью Δ.

Система описывается разностным уравнением состояния

$$\xi(k+1) = e^{-\alpha\Delta}\xi(k) + \frac{\chi}{\alpha}[1 - e^{-\alpha\Delta}]\mu(k) \,,$$

где α, χ — известные константы; Δ — интервал дискретизации.

Критерий качества определяется выражением

$$J = \pi_1 \xi^2(K) + \sum_{i=0}^{K-1} [\xi^2(i) + \rho\mu^2(k)] \,.$$

Рассчитаем установившееся решение уравнения Риккати для ковариационной матрицы ошибки оценки.

$$\left[\frac{\chi}{\alpha}[1 - e^{-\alpha\Delta}]\right]^2 S_\infty^2 + [\rho - e^{-2\alpha\Delta}\rho - \left[\frac{\chi}{\alpha}[1 - e^{-\alpha\Delta}]\right]^2]S_\infty - \rho = 0 \,.$$

$$S_\infty = \frac{\dfrac{-\chi^2(1 - e^{-\alpha\Delta})^2}{\alpha^2} - \rho e^{-2\alpha\Delta} + \rho}{2\dfrac{\chi^2(1 - e^{-\alpha\Delta})^2}{\alpha^2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\left[\dfrac{-\chi^2(1 - e^{-\alpha\Delta})^2}{\alpha^2} - \rho e^{-2\alpha\Delta} + \rho\right]^2 + \dfrac{4\chi^2\rho(1 - e^{-\alpha\Delta})^2}{\alpha^2}}}{2\dfrac{\chi^2(1 - e^{-\alpha\Delta})^2}{\alpha^2}} \,.$$

Рассчитаем матрицу A и $\tilde{Q}$ вспомогательной задачи управления (32).

$$A = e^{-\alpha\Delta}\left[1 - \frac{\left[\dfrac{\chi}{\alpha}[1 - e^{-\alpha\Delta}]\right]^2 S_\infty}{\rho + \left[\dfrac{\chi}{\alpha}[1 - e^{-\alpha\Delta}]\right]^2 S_\infty}\right], \quad \tilde{Q}_2 = \rho + \left[\frac{\chi}{\alpha}[1 - e^{-\alpha\Delta}]\right]^2 S_\infty \,.$$

Теперь можно получить аналитическое представление уравнения Риккати, учитывая, что $\tilde{S}(K) = \pi_1 - S_\infty$.

$$S(k,k+1) = S_\infty + \left[\frac{A^{2(k-K)}}{\pi_1 - S_\infty} + \frac{\left[\frac{\chi}{\alpha}[1-e^{-\alpha\Delta}]\right]^2}{\rho + \left[\frac{\chi}{\alpha}[1-e^{-\alpha\Delta}]\right]^2} \sum_{i=k}^{K-1} A^{2(k-i)} \right]^{-1}.$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u(k) = \left[A\tilde{S}(k,k+1)e^{-\alpha\Delta} \left[\left[\frac{\chi}{\alpha}[1-e^{-\alpha\Delta}]\right]^2 \tilde{S}(k,k+1) + \tilde{R}^{-1} \right]^{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\chi}{\alpha}[1-e^{-\alpha\Delta}]e^{-\alpha\Delta} S_\infty \tilde{R}^{-1} \right] x(k).$$

Переходная матрица замкнутого контура регулирования

$$\Omega(K,k) = \left[A^{(k-K)} + \frac{\left[\frac{\chi}{\alpha}[1-e^{-\alpha\Delta}]\right]^2 [\pi_1 - S_\infty][A^{K-k}]}{\rho + \left[\frac{\chi}{\alpha}[1-e^{-\alpha\Delta}]\right]^2} \sum_{i=k}^{K-1} A^{2(k-i)} \right]^{-1}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе принципа дуальности задач фильтрации и оптимального управления в работе получено аналитическое решение общей задачи управления с квадратичным критерием качества, которое может быть применено для анализа чувствительности систем управления, а также исследования устойчивости замкнутого контура регулирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калман Р., Фалб П., Ариб М.* Очерки по математической теории систем. — М: Мир, 1971. — 400 с.
2. *Wonham W.M.* Random Differential Equations in Control Theory, Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Academic Press. — New York, 1969. — 132 p.
3. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления. — М: Мир, 1973. — 322с.
4. *Згуровский М.З., Подладчиков В.Н.* Аналитические методы калмановской фильтрации для систем с априорной неопределенностью. — Киев: Наук. думка, 1995. — 282с.
5. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. — М: Мир, 1977. — 650 с.

Поступила 16.09.2003