УДК 518. 9

ТЕОРЕТИКО-ІГРОВА МОДЕЛЬ БОРОТЬБИ ПАРТІЙ ЗА ЕЛЕКТОРАТ

Н.І. НЕДАШКІВСЬКА, В.В. ОСТАПЕНКО, О.С. ОСТАПЕНКО

Пропонується модель, що може бути застосована партіями — учасницями реальної передвиборної кампанії — для визначення розподілу капіталу між районами з метою отримання максимального виграшу. Визначаються умови, за яких запропоновану модель можна віднести до випуклої гри. Висновки, зроблені в результаті дослідження, мали підтвердження під час виборів до парламенту 2002 р.

ВСТУП

В статті розглядаються питання математичного моделювання у соціології.

На сьогоднішній день чільне місце при дослідженні соціологічних процесів посідають математичні моделі та методи [1 – 7]. Важливе значення відіграють теорія ймовірностей і математична статистика. На їх основі розроблені стохастичні моделі [3, 7], наводиться статистичний аналіз соціологічної інформації [2, 3], дається оцінка надійності і валідності (обгрунтованості) соціологічної інформації [2], описується процес формування вибіркової сукупності у соціологічних дослідженнях [5].

Крім ймовірнісних методів у соціологічних дослідженнях застосовується також інший математичний апарат. Це теорія розпізнавання образів, імітаційне моделювання, теорія графів, кластерний аналіз, аналіз експертних оцінок тощо [4, 6].

Оскільки в соціологічних процесах можуть виникнути конфліктні ситуації, то для їх моделювання з успіхом використовується теорія ігор [4]. При цьому розв'язуються задачі розподілу робочої сили за галузями виробництва й економічними районами, задачі розвитку виробничої та невиробничої інфраструктур, а також інші подібні задачі. Ігрове моделювання намагаються звести до матричних ігор, оскільки для їх розв'язання можна застосувати методи лінійного програмування [4].

На сьогоднішній день в Україні розвивається багатопартійна система. Тому актуальною є задача моделювання процесу боротьби партій в ході передвиборної кампанії. Таке моделювання допомагає передбачити результати виборів, а також дати рекомендації зацікавленим партіям.

В статті запропонована ігрова модель такої боротьби, яка базується на новому підході до побудови функціоналів виграшу для гравців. Гра є неперервною та безкоаліційною. Приводиться розв'язок такої гри та робляться висновки відносно оптимальних стратегій.

Результати даної статті можуть бути перенесені на моделювання процесу боротьби фірм за ринки збуту.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай є n районів. Кожен з них характеризується кількістю населення, яке має право голосу, тобто електоратом A_i, $i=1,\dots,n$. В цих районах проводять передвиборну кампанію дві партії. Перша і друга виділяють відповідно капітал a та b на її проведення. Для кожної партії задача полягає в тому, щоб визначити, як розподілити цей капітал за районами для отримання максимального виграшу. Виграш для партії — кількість (або процент) виборців, що віддають свої голоси за дану партію.

З точки зору теорії ігор маємо гру $2\times n$, два гравці — це дві партії. Стратегії для кожного з гравців — величини вкладів в кожний район. Оптимальною стратегією для кожної партії буде такий розподіл капіталу за районами, що дає найбільший виграш.

Нехай $f_i(x_i) = 1 - e^{-k_i x_i}$ — функція виграшу, який отримає перша партія по i-му району при умові, що в цей район вкладено x_i капіталу; $g_i(y_i) = 1 - e^{-l_i y_i}$ — функція виграшу, який отримає друга партія по i-му району при умові, що в цей район вкладено y_i капіталу. Коефіцієнти k_i, l_i відображають пріоритет i-го району відповідно для першої та другої партій.

Функції $f_i(x_i) = 1 - e^{-k_i x_i}$ та $g_i(y_i) = 1 - e^{-l_i y_i}$ вибрані таким чином, щоб спочатку з ростом капіталовкладень x_i або y_i в i-й район виграш від величини вкладеного капіталу зростав, але щоб потім мало місце «перенасичення», тобто при подальшому збільшенні капіталовкладень в даний район величина виграшу практично не мінялася (не збільшувалася).

Для кожної з партій сума вкладень у всі райони має дорівнювати величині загального капіталу, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = b.$$

Опустимо індекс i біля функцій f_i та g_i.

Вважаємо, що обидві партії одночасно «вибирають» електорат з кожного району. Нехай u — кількість голосів, які «забрала» партія 1; v — кількість голосів, які «забрала» партія 2. Тоді «одночасний вибір» для партій можемо записати у вигляді

$$u = f(x)(A-v),$$
$$v = g(y)(A-u),$$

$$u = \frac{f(x)\,(1-g(y))}{1-f(x)g(y)}\,A,$$

$$v = \frac{g(y)(1 - f(x))}{1 - f(x)g(y)} A.$$

Загальний виграш першої партії для всіх районів позначимо

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} F_i\ (x_i\ , y_i)\ ,$$

для другої

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^{n} G_i\ (x_i\ , y_i)\ ,$$

де

$$F_i\ (x_i\ , y_i) = \frac{f_i(x_i)\ \ (1 - g_i(y_i))}{1 - f_i(x_i)\ g_i(y_i)}\ A_i\ ,$$

$$G_i\ (x_i\ , y_i) = \frac{g_i\ (y_i)\ \ (1 - f_i(x_i))}{1 - f_i(x_i)\ g_i(y_i)}\ A_i\ .$$

Перша партія намагається зробити свій виграш максимальним при затратах капіталу x, тобто $F\ (x\ , y) \underset{x}{\rightarrow} \max$ за умови $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a.$

Друга партія також намагається максимізувати свій виграш при власних затратах y, тобто $G\ (x\ , y) \underset{y}{\rightarrow} \max$ за умови $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = b$.

Запишемо необхідні умови пошуку відносного максимуму.

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x_i, y_i) - \lambda = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_i} G_i(x_i, y_i) - \mu = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = a, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = b, \\ x_i \geq 0\,, \quad y_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1}$$

Зробимо перетворення в перших двох рівняннях (1).

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_i(x_i)\,(1 - g_i(y_i))}{1 - f_i(x_i)\, g_i(y_i)}\, A_i \right) - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{g_i(y_i)\,(1 - f_i(x_i))}{1 - f_i(x_i)\, g_i(y_i)}\, A_i \right) - \mu = 0.$$

В результаті отримаємо систему для пошуку x_i та y_i .

$$\frac{A_i l_i\, e^{-k_i x_i - l_i y_i}}{\left(e^{-k_i x_i} + e^{-l_i y_i} - e^{-k_i x_i - l_i y_i}\right)^2} = \mu ,$$

$$\frac{A_i k_i\, e^{-k_i x_i - l_i y_i}}{\left(e^{-k_i x_i} + e^{-l_i y_i} - e^{-k_i x_i - l_i y_i}\right)^2} = \lambda , \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a , \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = b , \quad x_i \ge 0 , \quad y_i \ge 0 ,$$

$$A_i\, ,\ k_i\, ,\ l_i \ge 0 \quad i = 1, \ldots, n .$$

АНАЛІЗ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Перед тим як розв'язувати систему (2) перевіримо, чи буде взагалі існувати розв'язок поставленої задачі.

Представлену модель будемо вважати грою з випуклими неперервними функціями виграшів, тоді буде існувати єдиний розв'язок [8, 9].

Проведемо дослідження умов, за яких функції виграшів будуть неперервними і випуклими вгору.

1. Перевіримо випуклість вгору функції $F(x, y)$ по x. Тут ми опускаємо індекс i при $F_i(x, y)$. Тоді

$$\frac{\partial F}{\partial x} = A\,(1 - g(y))\,\frac{f'(x)}{(1 - f(x)\,g(y))^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = A(1 - g(y))\frac{f''(x)\,(1 - f(x)g(y)) + 2\,f'(x)\,f'(x)\,g(y)}{(1 - f(x)\,g(y))^3} \le 0 .$$

Якщо підставити конкретні значення функцій f та g, матимемо

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \underbrace{A\,k^2\, e^{-l\,y - k\,x}}_{\ge 0}\,\frac{e^{-k\,x} - e^{-l\,y} - e^{-k\,x - l\,y}}{(e^{-k\,x} + e^{-l\,y} - e^{-k\,x - l\,y})^3} \quad \le \quad 0,$$

$e^{-k\,x} + e^{-l\,y} - e^{-k\,x - l\,y} > 0$, тому що $e^{-l\,y} < 1$ для $l,\ y > 0$.

Отже, для того щоб друга похідна була невід'ємною, необхідно:

$$e^{-k\,x} - e^{-l\,y} - e^{-k\,x - l\,y} \le 0 ,$$

$$1 - e^{-l\,y} + e^{-k\,x} - e^{-k\,x - l\,y} \le 1 ,$$

$$(1 - e^{-l\,y})\,(1 + e^{-k\,x}) \le 1 ,$$

$$1-e^{-lb} \le \frac{1}{2}, \quad e^{-ly} > \frac{1}{2}, \quad 0 < l < \frac{1}{b}\ln 2 .$$

2. Перевіримо випуклість вгору функції $G(x, y)$ по y. Аналогічно маємо

$$\frac{\partial G}{\partial y} = A(1-f(x))\frac{g'(y)}{(1-f(x)g(y))^2},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = A(1-f(x))\frac{g''(y)\,(1-f(x)g(y)) + 2\,g'(y)g'(y)f(x)}{(1-f(x)\,g(y))^3} \le 0,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \underbrace{A\,l^2\, e^{-ly-kx}}_{\ge 0}\,\frac{e^{-ly} - e^{-kx} - e^{-kx-ly}}{(e^{-kx} + e^{-ly} - e^{-kx-ly})^3} \le 0,$$

$e^{-kx} + e^{-ly} - e^{-kx-ly} > 0$, тому що $e^{-ly} < 1$ для l, $y > 0$.

Отже, для того щоб друга похідна була невід'ємною, необхідно:

$$e^{-ly} - e^{-kx} - e^{-kx-ly} \le 0,$$

$$(1-e^{-kx})\,(1+e^{-ly}) \le 1,$$

$$1-e^{-ka} \le \frac{1}{2}, \quad 0 < k < \frac{1}{a}\ln 2 .$$

В результаті отримали: представлена модель є грою з випуклими неперервними функціями виграшів, якщо виконуються умови

$$0 < l < \frac{1}{b}\ln 2 \quad \text{та} \quad 0 < k < \frac{1}{a}\ln 2 . \tag{3}$$

Отже, при цих умовах буде існувати єдиний розв'язок системи (2) [8 – 10].

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ (ПОШУК ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ)

Перейдемо до пошуку розв'язку системи (2). Це система із $2n+2$ нелінійних рівнянь із $2n+2$ невідомими.

Знаходимо набір чисел

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \\ y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

які характеризують розподіл капіталу за районами (ще 2 невідомих — λ та μ).

Система розв'язується в програмі MATHCAD-2000. На вході програми параметрам A_i, $i = 1,\dots,n$, a і b, k_i, l_i надаються різні значення із області допустимих (ОДЗ). Для A_i, $i = 1,\dots,n$ ОДЗ: $A_i \geq 0$. Для a і b ОДЗ: $a \geq 0$, $b \geq 0$. ОДЗ для k_i, l_i визначається нерівностями (3). При заданих значеннях параметрів програмою обчислюється набір чисел (4).

Розглянемо розподіл капіталовкладень за районами між партіями для таких варіацій параметрів:

1. При $A_i = A_j$, $k_i = l_i$ $\forall\ i, j = 1,\dots,n$ капіталовкладення для кожної партії рівномірно розподілені за районами, тобто $x_i = \dfrac{a}{n}$, $y_i = \dfrac{b}{n}$ $\forall\ i = 1,\dots,n$.

2. При $A_i = A_j$, $k_i = k_j$, $l_i = l_j$, $k_i \neq l_i$ $\forall\ i, j = 1,\dots,n$ капіталовкладення для кожної партії теж рівномірно розподілені за районами, тобто $x_i = \dfrac{a}{n}$, $y_i = \dfrac{b}{n}$ $\forall\ i = 1,\dots,n$.

3. При $A_i = A_j$, $k_i \neq k_j$, $l_i \neq l_j$ $\forall\ i, j = 1,\dots,n$ найбільші вклади капіталу надходять у райони з найбільшими пріоритетами. Для різних варіацій a та b — різні значення для x_i та y_i, але розподіл капіталу не змінюється (тобто найбільший вклад капіталу — в райони з найбільшими пріоритетами).

4. При $A_i \neq A_j$, $k_i = l_i$ $\forall\ i, j = 1,\dots,n$ найбільші вклади надходять у райони з найбільшою чисельністю електорату, зменшення вкладів — по мірі зменшення чисельності електорату. Для різних варіацій *a* та *b* розподіл капіталу не змінюється.

5. При $A_i \neq A_j$, $k_i = k_j$, $l_i = l_j$, $k_i \neq l_i$ $\forall\ i, j = 1,\dots,n$ розподіл такий самий, що і в п. 4.

6. При $A_i \neq A_j$ $\forall\ i, j = 1,\dots,n$, якщо розглядати в динаміці при фіксованому значенні $l = l_i = l_j$ при збільшенні k_i, для партії 1 вклад в найбільш пріоритетні райони зменшується, а у менш пріоритетні — збільшується, причому тим більше, чим більший розмір району.

7. При $A_i \neq A_j$ $\forall\ i, j = 1,\dots,n$, якщо розглядати в динаміці при фіксованому значенні $k = k_i = k_j$ при збільшенні l_i, для партії 2 вклад в найбільш пріоритетні райони зменшується, а у менш пріоритетні — збільшується, причому тим більше, чим більший розмір району.

ВИСНОВКИ

1. Якщо всі райони мають однакову кількість електорату і всі райони для обох партій мають рівні пріоритети, то капіталовкладення за районами для кожної партії рівномірно розподілені.

2. Якщо всі райони мають однакову кількість електорату, а різні партії мають різні пріоритети у кожному районі, і всі райони для кожної з партій мають рівні пріоритети, то капіталовкладення за районами теж рівномірно розподілені.

3. Якщо всі райони мають однакову кількість електорату але пріоритети цих районів для обох партій різні, то найбільші вклади капіталу слід робити в райони з найбільшими пріоритетами.

4. Якщо райони із різною кількістю електорату мають рівні пріоритети, то найбільші вклади надходять у райони з найбільшою чисельністю електорату, зменшуються вклади по мірі зменшення чисельності електорату.

5. Для районів з різною кількістю електорату при фіксованих значеннях пріоритетів для другої партії та збільшуванні пріоритетів районів для першої: для першої партії вклад в найбільш пріоритетні для неї райони зменшується, у менш пріоритетні — збільшується.

Це можна пояснити тим, що в найбільш пріоритетних районах весь можливий для першої партії електорат був вибраний з самого початку і при подальшому зростанні пріоритету цих районів немає сенсу вкладати в них найбільшу (в порівнянні з іншими районами) кількість капіталу, адже електорат в цих районах майже вичерпаний. Натомість більша частини капіталу переміщується в менш пріоритетні райони, де існують невикористані резерви.

6. Аналогічно для районів з різною кількістю електорату при фіксованих значеннях пріоритетів для першої партії та збільшуванні пріоритетів районів для другої: для другої партії вклад в найбільш пріоритетні для неї райони також зменшується, у менш пріоритетні — збільшується.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ядов В.А.* Социологические исследования: методология, программа, методы. — Самара: Самарский ун-т, 1995. — 331 с.
2. *Паниотто В.И.* Качество социологической информации: методы, оценки и процедуры, обеспечение. — Киев: Наук. думка, 1986. — 207 с.
3. *Паниотто В.И., Максименко В.С.* Количественные методы в социологических исследованиях. — Киев: Наук. думка, 1982. — 272 с.
4. *Опыт* моделирования социологических процессов (вопросы методологии и методики построения моделей) / В.И. Паниотто, Л.А. Закревская, А.В. Черноволенко и др. — Киев: Наук. думка, 1989. — 200 с.
5. *Чурилов Н.Н.* Проектирование выборочного социологического исследования: Некоторые методологические и методические проблемы. — Киев: Наук. думка, 1986. — 183 с.
6. *Математическое* моделирование в социологии: Методы и задачи: Сборник статей / Отв.редакторы Ф.М. Бородкин, Б.Г. Миркин. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1977. — 240 с.
7. *Бартоломью Д.* Стохастические модели социальных процессов. — М.: Мир,1985. — 250 с.
8. *Крушевский А.В.* Теория игр. — Киев: Вища шк., 1977. — 216 с.
9. *Воробьев Н. Н.* Теория игр: Лекции для экономистов-кибернетиков. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. — 272 с.
10. *Бесконечные* антагонистические игры / Под ред. Н.Н. Воробьева. — М.: Физматгиз, 1963. — 504 с.

Надійшла 02. 07. 2003