ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 2000. Том 2 (74), N 1. С. 52 – 58*

УДК 532.5

О ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАНННОЙ И СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. САЛТАНОВ,
П. А. ШЕСТОПАЛ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 04.01.2000

Рассмотрены представления обобщенных потенциалов в теории вращающейся стратифицированной и сжимаемой жидкости. В невозмущенном состоянии жидкость экспоненциально стратифицирована вдоль оси z, направленной по вектору силы тяжести На основе обобщенного потенциала получено решение задачи обтекания сферы однородным винтовым потоком. Показано, что при стремлении коэффициента спиральности винтового потока к нулю это решение переходит в традиционное решение задачи потенциального обтекания. Проанализировано влияние коэффициента спиральности на картины линий тока и коэффициент давления.

Розглянуті представлення узагальнених потенціалів в теорії стратифікованої та стисливої рідини, що обертається. В незбуреному стані рідина експоненційно стратифікована вздовж осі z, яка спрямована за вектором сили ваги. На основі узагальненого потенціалу отримано розв'язок задачі про обтікання сфери однорідним гвинтовим потоком. Показано, що при наближенні коефіцієнта спіральності гвинтового потоку до нуля цей розв'язок переходить в традиційний розв'язок задачі про потенційне обтікання. Проаналізовано вплив коефіцієнта спіральності на картини ліній потоку та коефіцієнт тиску.

Potential-based representations in the theory of rotating stratified and compressible fluid are considered. In undisturbed state the fluid is exponentially stratified along z – axis directed along the gravity force. Using generalised potential, solution for the problem of the uniform helical flow around the sphere is obtained. It is shown that with the helical flow helicity coefficient approaching zero, this solution becomes a traditional solution for potential flow. Impact of the helicity coefficient on flow patterns and pressure coefficients is analysed.

ВВЕДЕНИЕ

В теории математических моделей, используемых в ряде естественных наук, важное место занимает проблема получения представлений общих решений соответствующих дифференциальных уравнений на основе различного рода потенциалов. В теории электромагнетизма, например, фундаментальное значение имеют электрический и магнитный потенциалы, а также электрический и магнитный потенциалы Герца. В теории упругости к числу наиболее известных относятся потенциалы Гельмгольца-Стокса-Грина-Ламе, Папковича-Нейбера, Галеркина и Дебая-Морса-Фешбаха. В гидромеханике широко используют потенциалы скорости и ускорения, функции тока, потенциалы Клебша, потенциалы Соболева в случае идеальной вращающейся жидкости, потенциалы теории газодинамических течений в переменных годографа и спидографа, потенциалы стоксовых течений и т. д. Исследование указанной проблемы важно как с точки зрения внутренней структуры и особенностей исходных уравнений, так и с точки зрения решения прикладных задач. При этом часто оказывается существенным [1 – 3] использовать редукцию основных начально-краевых задач к скалярным задачам для одного уравнения, определяющего обобщенный суперпотенциал. Как отмечается в работе [2], наиболее яркие выгоды, связанные с таким подходом, проявляются при использовании численных методов. А именно, сокращение числа исходных величин до одной скалярной (обобщенного суперпотенциала) приводит к значительной экономии машинного времени и ресурса используемых ЭВМ.

Данная статья посвящена получению представлений обобщенных потенцалов в теории вращающейся стратифицированной и сжимаемой жидкости. Ее результаты тесно связаны с результатами работы [5], в которой получили развитие представления обобщенных потенциалов в теории вязких и идеальных несжимаемых жидкостей, а также в теории упругости и электромагнетизма. Предложенные в работе [5] новые представления общих решений систем уравнений ряда математических моделей механики и физики расширяют возможности решения прикладных задач. Сформулированные теоремы ветвления, имеющие групповую природу, позволяют поставить в соответствие любому решению уравнения для обобщенного потенциала определенный набор полей физических величин. Полученные решения ряда конкретных краевых задач показали эффективность предложенных методов. В то же время они представляют определенный самостоятельный интерес.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Будем рассматривать движение стратифицированной, вращающейся и сжимаемой жидкости в системе координат (z, x, y), вращающейся вместе с жидкостью. Будем считать, что вектор угловой скорости $\vec{\omega_*}$ вращения жидкости как целого находится в плоскости (y, z) и составляет угол α_* с направлением вертикали Oz:

$$\vec{\omega_*} = \omega_* \vec{e_*},\ \vec{e_*} = \cos\alpha_* \vec{e_z} + \sin\alpha_* \vec{e_y}. \quad (1)$$

Будем также считать, что в невозмущенном состоянии жидкость стратифицирована вдоль направления вектора силы тяжести:

$$\rho_0 = \rho_0(z), \quad (2)$$

где ρ_0 – плотность жидкости в невозмущенном состоянии. Малые колебания жидкости в этом случае описываются системой уравнений [1]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\omega_* \vec{e_*} \times \vec{v} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 + g\frac{\rho_1}{\rho_0}\vec{e_z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho_1}{\rho_0} + div\,\vec{v} + \frac{d\,\rho_0}{\rho_0\,dz}w = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{p_1}{\rho_0} + \frac{N^2}{g}w, \quad (5)$$

$$N^2(z) \equiv -g\left[\frac{\rho_0'(z)}{\rho_0} + \frac{g}{c^2}\right],\quad \vec{v} \equiv w\vec{e_z} + u\vec{e_x} + v\vec{e_y}. \quad (6)$$

Здесь $\vec{v}$ – скорость; ρ_1 и p_1 – возмущения плотности и давления; c – скорость звука; N – частота Брента-Вяйсяля; g – ускорение силы тяжести. Используя обозначение

$$q \equiv \rho_0(z)\vec{v}, \quad (7)$$

систему (3) – (5) запишем в виде

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + 2\omega_* \vec{e_*} \times \vec{q} + \nabla p_1 + g\rho_1\vec{e_z} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + div\,\vec{q} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{N^2}{g}q_z. \quad (10)$$

Введем безразмерные величины

$$\frac{\rho_0(z)\vec{v}}{\rho_0(0)c} \to \vec{q},\ \frac{p_1}{\rho_0(0)\,c^2} \to \Pi,\ \frac{\rho_1}{\rho_0(0)} \to \rho,$$

$$\frac{gt}{c} \to t,\ \frac{g\vec{r}}{c^2} \to \vec{r},\ \frac{Nc}{g} \to \nu,\ \frac{\omega_* c}{g} \to \nu_*. \quad (11)$$

В результате систему уравнений (8) – (10) запишем в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + 2\nu_* \vec{e_*} \times \vec{q} + \nabla\Pi + \rho\vec{e_z} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{q} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \nu^2 q_z. \quad (14)$$

Далее будем считать стратификацию жидкости экспоненциальной [1]:

$$\rho_0 = \rho_0 e^{-k_f z}, k_f = \mathrm{const}. \quad (15)$$

Это дает

$$\nu = \mathrm{const}. \quad (16)$$

Таким образом, в случае условия (15) в декартовых координатах система пяти уравнений в частных производных первого порядка (12) – (14) является системой уравнений с постоянными коэффициентами.

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО СУПЕРПОТЕНЦИАЛА В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

В данном пункте рассмотрим случай, когда вектор угловой скорости вращения жидкости направлен вдоль оси y:

$$\alpha_* = \frac{\pi}{2} \to \vec{e_*} = \vec{e_y}. \quad (17)$$

Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + 2\nu_* \vec{e_y} \times \vec{q} + \nabla\Pi + \rho\vec{e_z} = 0, \quad (18)$$

вектор $\vec{q}$ представим в виде

$$\vec{q} = \nabla\Phi + S_1\vec{e_z} + S_2\vec{e_x}, \quad (19)$$

где Φ, S_1, S_2 – обобщенные потенциалы. Подставим выражение (19) в (18). Получившееся при этом соотношение будет удовлетворено, если считать выполненными связи

$$\Pi = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (20)$$

$$\rho = -\frac{\partial S_1}{\partial t} + 2\nu_*(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + S_2), \quad (21)$$

$$S_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{2\nu_*}\frac{\partial S_2}{\partial t}. \quad (22)$$

Учитывая выражение (19) в (13) и (14), соответственно запишем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\triangle\Phi+\frac{\partial S_1}{\partial z}+\frac{\partial S_2}{\partial x}=0, \qquad (23)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\Pi}{\partial t}+\nu^2(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+S_1). \qquad (24)$$

Принимая во внимание соотношения (20) – (22) в соотношениях (23) и (24), приходим к следующей системе уравнений для потенциалов Φ и S_2:

$$2\nu_*(\triangle+\frac{\partial^3}{\partial z\partial t^2}+2\nu_*\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial z^2})\Phi+$$

$$+(\frac{\partial^3}{\partial t^3}-\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}+2\nu_*\frac{\partial}{\partial x}+4\nu_*^2\frac{\partial}{\partial t})S_2=0, \qquad (25)$$

$$2\nu_*(\frac{\partial^3}{\partial z\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\nu_*\frac{\partial^2}{\partial x\partial t})\Phi+$$

$$+(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nu^2+4\nu_*^2)\frac{\partial S_2}{\partial t}=0. \qquad (26)$$

Решая уравнение (26), вводим обобщенный суперпотенциал Ψ_2 следующим образом:

$$\Phi=(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nu^2+4\nu_*^2)\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}, \qquad (27)$$

$$S_2=-2\nu_*(\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}+2\nu_*\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}. \qquad (28)$$

Учитывая выражения (27) и (28) в (22), выразим через обобщенный суперпотенциал Ψ_2 величину S_1:

$$S_1=[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\nu_*\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-(\nu^2+4\nu_*^2)\frac{\partial}{\partial z}]\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} \qquad (29)$$

Подставляя (27) и (28) в (25), получаем следующее уравнение для определения обобщенного суперпотенциала Ψ_2:

$$(\frac{\partial^4}{\partial t^4}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}L_0-L_2)\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=0, \qquad (30)$$

$$L_0=\triangle+(1+\nu^2)\frac{\partial}{\partial z}-4\nu_*^2, \qquad (31)$$

$$L_2=\nu^2(\triangle-\frac{\partial^2}{\partial z^2})+2\nu_*(\nu^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+4\nu_*^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \qquad (32)$$

Если решение уравнения (30) найдено, то физические величины можно определить с помощью соотношений (19) – (22) и (27) – (29).

В то же время, решая уравнение (25), имеем:

$$\Phi=(\frac{\partial^3}{\partial t^3}-\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}+2\nu_*\frac{\partial}{\partial x}+4\nu^2\frac{\partial}{\partial t})\Psi_2, \qquad (33)$$

$$S_2=2\nu_*(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\triangle-\frac{\partial^3}{\partial z\partial t^2}-2\nu_*\frac{\partial^2}{\partial x\partial t})\Psi_2. \qquad (34)$$

Подставив решение (33) в (34) и (22), выразим через обобщенный суперпотенциал Ψ_2 величину S_1:

$$S_1=[\triangle\frac{\partial}{\partial t}+2\nu_*(\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}-2\nu_*\frac{\partial^2}{\partial z\partial t})]\Psi_2. \qquad (35)$$

Учитывая затем выражения (33) и (34) в (26), приходим к уравнению (30). Если решение уравнения (30) найдено, то в случае справедливости формул (33) – (35) физические величины можно определить с помощью соотношений (19) – (21) и (33) – (35). В силу коммутируемости операторов, входящих в уравнение (30), его решение представим в следующем виде:

$$\Psi_2=\Omega(x,y,z,t)+\Omega_0(x,y,z), \qquad (36)$$

где Ω_0 – произвольная функция своих аргументов; функция Ω удовлетворяет уравнению

$$(\frac{\partial^4}{\partial t^4}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}L_0-L_2)\Omega=0. \qquad (37)$$

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО СУПЕРПОТЕНЦИАЛА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим общий случай ориентации вектора угловой скорости вращения жидкости:

$$0<\alpha_*<\frac{\pi}{2}. \qquad (38)$$

Тогда z, x и y – компоненты уравнения (12), соответственно, запишем в виде

$$\frac{\partial q_z}{\partial t}-2\nu_*\sin\alpha_* q_x+\frac{\partial\Pi}{\partial z}+\rho=0, \qquad (39)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial t}+2\nu_*(\sin\alpha_* q_z-\cos\alpha_* q_y)+\frac{\partial\Pi}{\partial x}=0, \qquad (40)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t}+2\nu_*\cos\alpha_* q_x+\frac{\partial\Pi}{\partial y}=0. \qquad (41)$$

Исключая из уравнения (14) плотность с помощью (13), имеем

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}+\nu^2 q_z=0. \qquad (42)$$

Применяя к уравнениям (40) и (42) операции дифференцирования по времени и координате x соответственно и вычитая левые и правые части получившихся соотношений друг из друга, получаем

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2})q_x=(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+2\nu_*\cos\alpha_*\frac{\partial}{\partial t})q_y-$$

$$-(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+\nu^2\frac{\partial}{\partial x}-2\nu_*\sin\alpha_*\frac{\partial}{\partial t})q_z. \qquad (43)$$

Применяя к уравнениям (41) и (42) операции дифференцирования по времени и координате y соответственно и вычитая левые и правые части получившихся соотношений друг из друга, находим

$$(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-2\nu_*\cos\alpha_*\frac{\partial}{\partial t})q_x=$$

$$=(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2})q_y-(\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+\nu^2\frac{\partial}{\partial y})q_z. \qquad (44)$$

Исключая из выражений (43) и (44) величину q_x, приходим к уравнению, в которое входят только две искомые величины q_y и q_z:

$$[\frac{\partial^4}{\partial t^4}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-4\nu_*^2\cos^2\alpha_*)]q_y=$$

$$=[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+\nu^2\frac{\partial}{\partial y}+4\nu_*^2\sin\alpha_*\cos\alpha_*)-$$

$$-2\nu_*\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}(\sin\alpha_*\frac{\partial}{\partial y}+\cos\alpha_*\frac{\partial}{\partial z}+\nu^2\cos\alpha_*)]q_z. \qquad (45)$$

Решая уравнение (45), вводим обобщенный суперпотенциал Ψ_g следующим образом:

$$q_y=[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+\nu^2\frac{\partial}{\partial y}+4\nu_*^2\sin\alpha_*\cos\alpha_*)-$$

$$-2\nu_*\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}(\sin\alpha_*\frac{\partial}{\partial y}+\cos\alpha_*\frac{\partial}{\partial z}+\nu^2\cos\alpha_*)]\Psi_g, \qquad (46)$$

$$q_z=[\frac{\partial^4}{\partial t^4}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-4\nu_*^2\cos^2\alpha_*)]\Psi_g. \qquad (47)$$

Подствляя выражения (46) и (47) в (43) и (44), на основе получившихся соотношений находим следующее выражение для величины q_x:

$$q_x=[(\frac{\partial}{\partial z}+\nu^2)(\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}+2\nu_*\cos\alpha_*\frac{\partial^2}{\partial y\partial t})+$$

$$+2\nu_*\sin\alpha_*(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2})\frac{\partial}{\partial t}]\Psi_g. \qquad (48)$$

Учитывая выражения (46) и (48) в (41), на основе получившегося соотношения имеем

$$\Pi=[2\nu_*\sin\alpha_*\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+4\nu_*^2\cos^2\alpha_*)\times$$

$$\times(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\nu^2-4\nu_*^2\sin\alpha_*\cos\alpha_*\frac{\partial}{\partial y}]\frac{\partial\Psi_g}{\partial t}. \qquad (49)$$

Учтем уравнения (47) и (49) в (14). На основе получившегося соотношения запишем выражение для плотности:

$$\rho=[(2\nu_*\sin\alpha_*\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial z\partial t})\frac{\partial}{\partial t}-\nu^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})-$$

$$-4\nu_*^2\cos\alpha_*(\cos\alpha_*\frac{\partial}{\partial z}+\sin\alpha_*\frac{\partial}{\partial y})]\frac{\partial\Psi_g}{\partial t}. \qquad (50)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что выражения (46) – (50) тождественно удовлетворяют уравнениям (13), (14), (40) и (41). Подставляя выражения (47) – (50) в (39), получаем следующее уравнение для определения обобщенного суперпотенциала Ψ_g:

$$(\frac{\partial^4}{\partial t^4}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}L_0-L_g)\frac{\partial\Psi_g}{\partial t}=0, \qquad (51)$$

$$L_g=\nu^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})+4\nu_*^2\cos^2\alpha_*[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(1+\nu^2)\frac{\partial}{\partial z}]+$$

$$+2\nu_*\sin\alpha_*[(\nu^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+2\nu_*\sin\alpha_*\frac{\partial^2}{\partial y^2}]+$$

$$+4\nu_*^2\sin\alpha_*\cos\alpha_*(2\frac{\partial}{\partial z}+1+\nu^2)\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (52)$$

При этом оператор L_0 определяется согласно соотношений (31). Нетрудно убедиться в том, что при $\alpha_*=(\pi/2)$ оператор L_g переходит в оператор L_2, определяемый выражением (32). Если решение уравнения (51) найдено, то физические величины можно определить с помощью выражений (46) – (50). Пусть

$$\Omega_g\equiv\frac{\partial\Psi_g}{\partial t}\neq 0. \qquad (53)$$

Тогда выражения для физических величин (46) – (50) и уравнение (51) принимают вид

$$q_x=[(\frac{\partial}{\partial z}+\nu^2)(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+2\nu_*\cos\alpha_*\frac{\partial}{\partial y})+$$

$$+2\nu_*\sin\alpha_*(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2})]\Omega_g,$$

$$q_y=[\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+\nu^2\frac{\partial}{\partial y}+4\nu_*^2\sin\alpha_*\cos\alpha_*)-$$

$$-2\nu_*\frac{\partial}{\partial x}(\sin\alpha_*\frac{\partial}{\partial y}+\cos\alpha_*\frac{\partial}{\partial z}+\nu^2\cos\alpha_*)]\Omega_g,$$

$$q_z=[\frac{\partial^3}{\partial t^3}-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-4\nu_*^2\cos^2\alpha_*)]\Omega_g,$$

$$\Pi=[2\nu_*\sin\alpha_*\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+4\nu_*^2\cos^2\alpha_*)(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\nu^2)-$$

$$-4\nu_*^2 \sin\alpha_* \cos\alpha_* \frac{\partial}{\partial y}]\Omega_g,$$

$$\rho = [(2\nu_* \sin\alpha_* \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial t})\frac{\partial}{\partial t} - \nu^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) -$$

$$-4\nu_*^2 \cos\alpha_*(\cos\alpha_* \frac{\partial}{\partial z} + \sin\alpha_* \frac{\partial}{\partial y})]\Omega_g,$$

$$(\frac{\partial^4}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_0 - L_g)\Omega_g = 0.$$

4. СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В стационарном случае из связи (14) следует

$$q_z = 0. \tag{54}$$

Решая в этом случае уравнение неразрывности (13), вводим функцию тока

$$q_x = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ q_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},\ \psi = \psi(x, y, z). \tag{55}$$

Учитывая (54) и (55) в (40) и (41), определяем величину Π:

$$\Pi = \Pi_0 - 2\nu_* \cos\alpha_* \psi,\ \ \Pi_0 = \mathrm{const} \tag{56}$$

Подставляя далее уравнения (55) и (56) в (39), определяем плотность

$$\rho = 2\nu_*(\sin\alpha_* \frac{\partial}{\partial y} + \cos\alpha_* \frac{\partial}{\partial z})\psi. \tag{57}$$

Таким образом, в стационарном случае поля физических величин задаются выражениями (54) – (57), где $\psi(x, y, z)$ – произвольная функция своих аргументов.

5. ДИСПЕРСИЯ ВОЛН В ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВОЙ СИММЕТРИИ

На основе уравнения (37) при наличии симметрии вдоль оси x $(\partial\Omega/\partial x)$ рассмотрим дисперсию волн во вращающейся жидкости. В этом случае уравнение (37) принимает вид

$$\{\frac{\partial^4}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1+\nu^2)\frac{\partial}{\partial z} -$$

$$4\nu_*^2] - (\nu^2 + 4\nu_*^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\}\Omega = 0. \tag{58}$$

Введем подстановку

$$\Omega = e^{-\frac{1+\nu^2}{2}z} P.$$

В результате уравнение (58) приобретает вид

$$\{\frac{\partial^4}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{(1+\nu^2)^2}{4} - 4\nu_*^2] -$$

$$-(\nu^2 + 4\nu_*^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\}P = 0. \tag{59}$$

Рассмотрим элементарное решение уравнения (59) вида

$$P = P_0 e^{i(\omega t - k_y y - k_z z)},\ P_0 = \mathrm{const}. \tag{60}$$

Подставляя выражения (60) в соотношение (59), приходим к дисперсионному уравнению

$$\omega^4 - [k_y^2 + k_z^2 + 4\nu_*^2 + \frac{(1+\nu^2)^2}{4}]\omega^2 + (\nu^2 + 4\nu_*^2)k_y^2 = 0. \tag{61}$$

Его решение имеет две ветви

$$\omega_- = \frac{\sqrt{\nu^2 + 4\nu_*^2}k_y}{\sqrt{q + \sqrt{q^2 - (\nu^2 + 4\nu_*^2)k_y^2}}}, \tag{62}$$

$$\omega_+ = \sqrt{q + \sqrt{q^2 - (\nu^2 + 4\nu_*^2)k_z^2}}, \tag{63}$$

$$q \equiv \frac{1}{2}[k_y^2 + k_z^2 + 4\nu_*^2 + \frac{(1+\nu^2)^2}{4}]. \tag{64}$$

Здесь ветвь (62) соответствует внутренним волнам, ветвь (63) – акустическим. Обратимся к ветви (62). Рассмотрим ее применительно к экваториальной зоне Тихого океана. Для конкретности ось y будем считать касательной к линии меридиана, ось x – касательной к линии экватора. Пусть H – эффективная глубина океана. Принимая для поверхности океана концепцию "твердой крышки" [1 – 5], с помощью элементарного решения уравнения (58) можно показать, что размерное волновое число k_z оценивается из соотношения $k_z = n\pi$, где n – номер гармоники. В результате, полагая $c = 1,5 \times 10^3$ м/с, $g = 9,82$ м/с^2, для безразмерного значения волнового числа k_z будем иметь $k_z = 0,72 \times 10^6 (n/H)$, где H выражено в метрах. Отсюда при характерном для экваториальной области Тихого океана значении $H = 2,5 \times 10^3$ м и $n = 1, 2, 3$ соответственно будем иметь $k_z = 3 \times 10^2; 6 \times 10^2; 9 \times 10^2$. Типичные значения частоты Брента-Вяйсяля, как известно [1, 4], лежат в диапазоне $10^{-3} \div 10^{-2}$с$^{-1}$. Соответственно, типичные значения величины ν находятся в диапазоне $0,15 \div 1,5$. С учетом принятых значений величин c и g для Земли имеем $\nu_* = 1,11 \times 10^{-2}$. Дисперсионные кривые для внутренних волн $\omega_- = \omega_-(k_y)$ при $\nu = 0; 0,15$ и

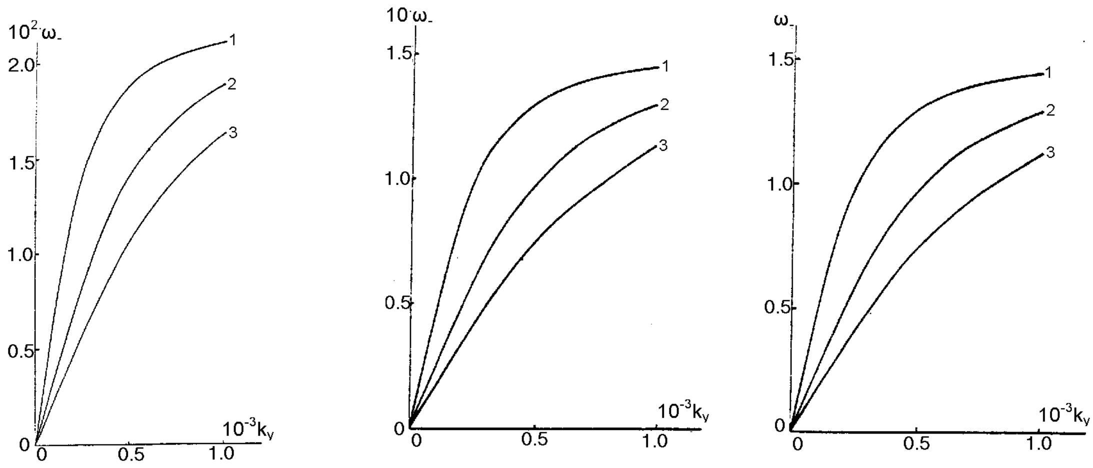

Рис. 1. Зависимость частоты внутренней волны от волнового числа k_y при $\nu = 0(a), \nu = 0.15(б), \nu = 1.5(в)$:
1 - $k_z = 3 \cdot 10^2; 2 - k_z = 6 \cdot 10^2; 3 - -k_z = 9 \cdot 10^2$

$1,5$ представлены, соответственно, на рис. 1, а – b. Следует отметить, что с ростом волнового числа k_y частоты ω_- приближаются к величине $\sqrt{\nu^2 + \nu_*^2}$.

Минимальное значение частоты в акустической ветви (63), соответствующее $k_z \to 0, k_y \to 0$, равно

$$\omega_+^{min} = \sqrt{4\nu_*^2 + \frac{(1+\nu^2)^2}{4}}. \qquad (65)$$

отсюда для Земли при $\nu \to 0$ имеем следующую размерную оценку:

$$\omega_+^{min} \simeq 3 * 10^{-3} \text{ c}^{-1}. \qquad (66)$$

Для сравнения со случаем внутренних волн на рис. 2 представлены дисперсионные кривые $\omega_+ = \omega_+(k_y)$ для акустических волн при $\nu = 0$. Дисперсионные кривые для акустических волн в случае $\nu = 1,5$ практически сливаются с дисперсионными кривыми рисунка 2. С ростом волнового числа k_y дисперсионные кривые акустической ветви приближаются к асимптоте $\omega_+ = k_y$. Из сравнения рисунков 1 и 2 можно видеть, что при $\nu = 0$ частоты внутренних волн примерно на пять порядков меньше частот акустических волн, при $\nu = 0,15$ – на четыре порядка и при $\nu = 1,5$ – на три порядка.

Отметим, что обобщенные потенциалы в динамике вращающихся и стратифицированных жидкостей при иных условиях, чем принятые выше, рассмотрены в работе [2].

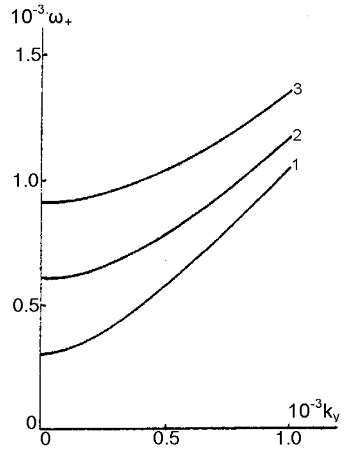

Рис. 2. Зависимость частоты акустической волны от волнового числа k_y:
$1 - k_z = 3 \cdot 10^2, 2 - k_z = 6 \cdot 10^2$,
$3 - k_z = 9 \cdot 10^2$, $\theta = (\pi/2)$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной статье получены потенциальные представления общих решений уравнений динамики вращающейся стратифицированной и сжимаемой жидкости в случае экспоненциальной стратификации жидкости по плотности. Вектор угловой скорости вращения в общем случае произвольным образом ориентирован по отношению к вектору силы тяжести. Введенные обобщенные потенциалы могут представить существенный интерес при решении конкретных начально-краевых задач. В частности, они могут оказаться полезными при построении соответствующих функций Грина [2, 3].

1. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 336 с.

2. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи нестационарных внутренних волн.– М.: Наука, 1990.– 344 с.
3. *Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Журн. вычисл. математики и мат. физ.– 1999.– **39**, N 6.– С. 215–226.
4. *Мадерич В. С., Никишов В. И., Стеценко А. Г.* Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде.– Киев: Наук. думка, 1988.– 240 с.
5. *Салтанов Н. В., Горбань В. А.* Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения.– К.: Наук. думка, 1993.– 244 с.