УДК 681.5

МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ КОНСТАНТЫ КОИНТЕГРАЦИИ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Н.А. НАРОДИЦКАЯ, В.Н. ПОДЛАДЧИКОВ

Предложен новый подход к оцениванию константы коинтеграции, основанный на предварительном анализе случайных компонент модели. Для исследования случайных составляющих используются методы параметрической идентификации, позволяющие в условиях априорной неопределенности получить оценки статистических характеристик шумов. Указаны недостатки существующих методов и предложены новые способы оценивания константы коинтеграции.

ВВЕДЕНИЕ

Коинтеграционный анализ — сравнительно новая область эконометрики, возникшая в ответ на растущую потребность в анализе соотношений между группами экономических показателей-переменных для получения концептуально и эмпирически более значимых измерений этих взаимосвязей в условиях нестационарности временных рядов[1].

Одной из основных задач коинтеграционного анализа является оценивание константы коинтеграции, определяющей характер долгосрочной зависимости между исследуемыми рядами [2]. Для решения этой задачи наиболее широко применяется метод наименьших квадратов (МНК), что требует выполнения предположений и ограничений, нарушение которых смещает оценки. Предлагается новый подход к оцениванию константы коинтеграции, основанный на предварительном анализе случайных составляющих нестационарного временного ряда. Такой подход позволяет увеличить эффективность методов оценивания константы коинтеграции, повысить точность их работы.

Для определения неизвестных статистических характеристик случайных возмущений предлагается использовать методы параметрической идентификации [3, 4]. Предварительная оценка неизвестных параметров шумов позволяет спрогнозировать эффективность различных методов оценивания константы коинтеграции и помогает исследователю выбрать наиболее подходящий способ в каждом конкретном случае.

В работе также рассматриваются новые способы оценивания константы коинтеграции, которые рекомендуется применять в условиях нарушения основных предположений МНК.

1. МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Наличие случайных возмущений исследуемых временных рядов негативно влияет на качество оценивания константы коинтеграции. Как будет показано далее, знание статистических характеристик шумов позволяет избежать смещения оценки и увеличить скорость ее сходимости к истинному значению.

Методы идентификации неизвестных ковариационных матриц шума состояния и измерения — важнейший раздел параметрической идентификации, который интенсивно развивается в последние годы.

Рассмотрим модель линейной динамической стационарной системы, описываемой уравнениями состояния и измерения.

$$x(k) = \Phi x(k-1) + w(k-1)\,,$$

$$z(k) = Hx(k) + v(k)\,,$$

где $x(k)$ — n-мерный вектор состояния системы; Φ — $n\times n$-матрица; H — $m\times n$-матрица; $w(k)$ и $v(k)$ — гауссовы случайные процессы типа белого шума с нулевыми средними значениями. Их корреляционные матрицы имеют вид

$$\operatorname{cov}[w(k);w(i)] = E[w(k)w(i)^T] = Q\delta(k-i)\,,$$

$$\operatorname{cov}[v(k);v(i)] = E[v(k)v(i)^T] = R\delta(k-i)\,,$$

$$\operatorname{cov}[w(k);v(i)] = E[w(k)v(i)^T] = 0\,,$$

где Q — симметричная неотрицательно-определенная $n\times n$-матрица; R — симметричная положительно-определенная m×m-матрица; $\delta(k,i)$ — символ Кронекера.

Начальный n-мерный гауссов случайный вектор x_0 имеет нулевое среднее $E[x_0]=0$ и корреляционную матрицу $E[x_0 x_0] = P_0$. Причем P_0 — неотрицательно-определенная матрица, которая предполагается известной. Кроме того, $w(k)$ и x_0 и $v(k)$ — независимы.

Предполагается, что в отличие от традиционного калмановского фильтра ковариационные матрицы Q, R неизвестны. Для их определения используются методы параметрической идентификации.

Рассмотрим основные идеи широко известных методов Мехра [3], Подладчикова [4], Андерсона и Борна-Тейпли, для которых строго доказана сходимость оцениваемых параметров к их истинным значениям, и проведем оценку эффективности этих методов на основе статистического моделирования для одномерного случая (табл. 1).

Таблица 1. Алгоритмы параметрической идентификации

Алгоритм	Схема алгоритма	Особенности метода
Мехра	1. Задание произвольных начальных значений Q_0 и R_0 2. Вычисление статистических характеристик невязок $C_1 \dots C_k$ стационарного фильтра в установившемся режиме 3. Выполнение вспомогательных вычислительных процедур для оценки Q и R как функций от $C_1 \dots C_k$	1. Формально доказана сходимость последовательности оценок к истинному значению 2. Оценка параметров начинается после перехода фильтра в установившийся режим 3. Большое количество вспомогательных процедур 4. Сложен в реализации
Подладчикова	1. Построение невязок вспомогательного субоптимального фильтра Калмана для свободных динамических систем 2. Получение псевдоизмерений неизвестных параметров 3. Оценка неизвестных параметров с помощью фильтра	1. Работает в реальном масштабе времени 2. Оценивает математическое ожидание шумов 3. Прост в реализации 4. Не учитывает априорную информацию
Андерсона	1. Вычисление статистических характеристик вспомогательной функции измерений 2. Определение неизвестных параметров	1. Оценивает матрицу динамики 2. Прост в реализации 3. Требует измерения всех компонент вектора состояния
Борна-Тейпли	1. Вычисление невязок субоптимального фильтра 2. Вычисление оценки R при известном значении Q	1. Прост в реализации 2. Оценивает только матрицу R

В результате моделирования установлено, что алгоритм Мехра чувствителен к качеству априорной информации. Если начальное значение далеко от истинного, то метод долго выходит из переходного режима и показывает низкую точность оценки. Алгоритм Подладчикова показал высокую скорость сходимости и точность оценки. Алгоритм Андерсона также показал высокую скорость сходимости и точность оценки, но требование измеряемости всех компонент вектора состояния существенно сужает область его применения. Точность оценки алгоритма Борна-Тейпли существенно зависит от абсолютного значения ковариационной матрицы шума состояния, увеличение которого приводит к пропорциональному смещению оценки ковариационной матрицы шума измерения.

Сравнение указанных выше алгоритмов показывает, что если априорная информация доступна, то алгоритм Мехра дает наилучшие результаты, так как он ее учитывает. Если нет информации о начальных значениях ковариационных матриц шума состояния и измерения, то алгоритмы Андерсона и Подладчикова имеют лучшую скорость сходимости, точность оценивания, и их применение предпочтительней.

2. КОИНТЕГРАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Коинтеграционный анализ определяет долгосрочную зависимость между рядами [1]. Дадим определение коинтеграции. Два ряда X и Y являются коинтегрированными порядка a, если X и Y — интегрированные процессы порядка b и существует линейная комбинация $Y = \lambda * X + \varepsilon$ — интегрированная последовательность порядка $a < b$.

Одна из наиболее важных задач коинтеграционного анализа — оценивание константы коинтеграции. В большинстве случаев для ее определения используется МНК. Но если исследуемые ряды имеют стохастический тренд (табл. 2), то МНК дает смещение ($\hat{\lambda}_{\mathrm{LSE}} = C * \lambda_{\mathrm{REAL}}$), которое можно оценить по формуле

$$C = \frac{\sigma^2_{\mathrm{trend}^X}}{\sigma^2_{\mathrm{trend}^X} + \sigma^2_{\mathrm{noise}^X}}. \quad (1)$$

Т а б л и ц а 2. Описание модели

Ряд $X(k)$	**Ряд $Y(k)$**
$\mu_x(k+1) = \mu_x(k) + \varepsilon_x(k)$	$\mu_y(k+1) = \lambda\mu_x(k)$
$x(k) = \mu_x(k) + \delta_x(k)$	$y(k) = \mu_y(k) + \delta_y(k)$
$\varepsilon_x \sim N(0, \sigma^2_{\varepsilon_x})$	$\varepsilon_y \sim N(0, \sigma^2_{\varepsilon_y})$
$\delta_x \sim N(0, \sigma^2_{\delta_x})$	$\delta_y \sim N(0, \sigma^2_{\delta_y})$

Откуда видно, что смещение оценки пропорционально истинному значению λ и увеличивается с ростом дисперсии шума наблюдений, уменьшается с ростом дисперсии временного ряда. Область, в которой МНК дает плохие результаты, соответствует следующему соотношению параметров шумов.

$$\sigma^2_{\mathrm{trend}_X} < \sigma^2_{\mathrm{noise}_X}.$$

Несмотря на смещения оценок, МНК остается самым распространенным методом оценивания константы коинтеграции. Возникает вопрос, как определить область плохой работы МНК в условиях, когда параметры шумов априорно неизвестны. Эта проблема решается указанными выше методами идентификации, которые позволяют определить неизвестные характеристики шумов модели.

3. НОВЫЕ СПОСОБЫ ОЦЕНИВАНИЯ КОНСТАНТЫ КОИНТЕГРАЦИИ

Предлагается новый подход к оцениванию константы коинтеграции, основанный на применении методов параматрической идентификации. На предварительном этапе производится оценивание статистических характеристик действующих шумов модели с помощью методов идентификации, описанных в разделе 1. На основании полученных результатов выбирается метод оценивания константы коинтеграции. Если оцененные значения дисперсий шумов указывают на то, что мы находимся в области плохой работы МНК, предлагается применять новые способы оценивания константы коинтеграции.

Оценивание константы коинтеграции на основе фильтрации рядов

Если ряды сильно зашумлены, т. е. $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_x} < \hat{\sigma}^2_{\delta_x}$, $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_y} < \hat{\sigma}^2_{\delta_y}$, то целесообразно предварительно отфильтровать данные, используя дискретный фильтр Калмана, и рассчитать константу коинтеграции с помощью МНК, используя полученные оценки.

$$\hat{\mu}_y(k) = \lambda * \hat{\mu}_x(k) + \nu(k). \tag{2}$$

Оценивание константы коинтеграции на основе обратного МНК

Если оценки статистических характеристик шумов находятся в соотношении $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_x} < \hat{\sigma}^2_{\delta_x}$, $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_y} > \hat{\sigma}^2_{\delta_y}$, то для построения уравнения коинтеграции предлагается использовать обратную регрессию.

$$x(k) = \frac{1}{\lambda} * y(k) + w(k). \tag{3}$$

Оценивание константы коинтеграции на основе соотношения

$$E\lfloor y(k)y^T(k-1)\rfloor = \lambda * E\lfloor y(k)x^T(k-1)\rfloor.$$

Данный подход может применяться при любых соотношениях статистических параметров шумов. Из построения модели (табл. 2) следует

$$E\lfloor y(k)y^T(k-1)\rfloor = \lambda * E\lfloor y(k)x^T(k-1)\rfloor, \tag{4}$$

откуда получаем соотношение для оценки константы коинтеграции

$$\hat{\lambda}(n) = \left[\sum_{k=3}^{n} y(k)\,y(k-1)\right]\left[\sum_{k=3}^{n} y(k)\,x(k-1)\right]^{-1}. \tag{5}$$

Пример 1. Рассмотрим пример, соответствующий модели, описанной в табл. 2. Истинное значение константы коинтеграции λ для имитационной модели полагалось равным 4, статистические характеристики шумов: $\sigma^2_{\varepsilon_x} = 1$, $\sigma^2_{\delta_x} = 25, \sigma^2_{\varepsilon_y} = 16$, $\sigma^2_{\delta_y} = 9$. Так как $\sigma^2_{\varepsilon_x} < \sigma^2_{\delta_x}$, то, согласно формуле (1), это зона плохой работы МНК. Результаты статистического моделирования показаны на рис. 1.

Из графиков (рис.1) видно, что МНК дает существенное смещение. Применение МНК к отфильтрованным данным приводит к улучшению оценки более чем в 2 раза. Новые методы практически не дают смещения и являются предпочтительными в данных условиях.

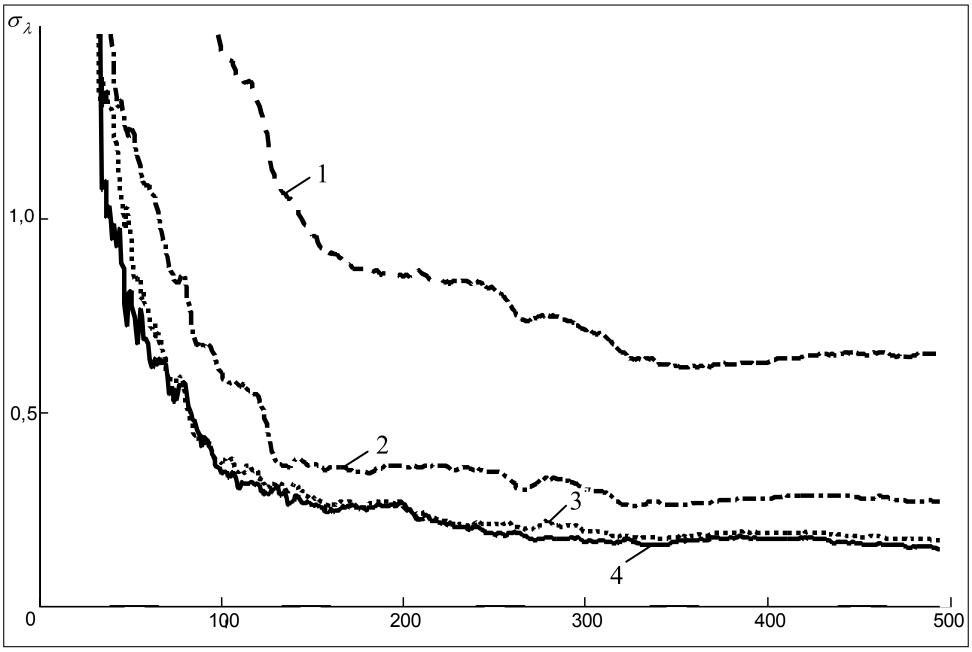

Рис. 1. Среднеквадратичная ошибка оценки константы коинтеграции: 1 — классический МНК; 2 — МНК на отфильтрованных данных; 3 — обратная регрессия; 4 — разработанный метод

Пример 2. Для анализа использовались два ряда краткосрочной и долгосрочной ставки процента в США, соответствующие области хорошей работы МНК.

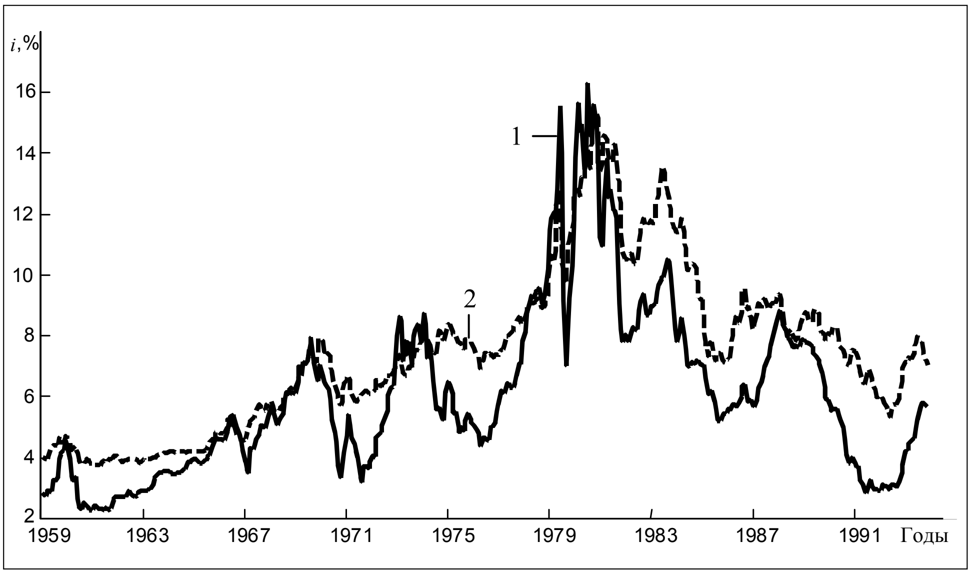

Рис. 2. Динамика изменения ставки процента в США (1959 – 1995 гг.): 1 — краткосрочная ставка процента; 2 — долгосрочная ставка процента

Тестируемые ряды коинтегрированы с константой коинтеграции, равной 1,137.

Исследуемые ряды имеют близкие дисперсии шумов, поэтому все методы практически не дают смещения и показывают высокую скорость сходимости.

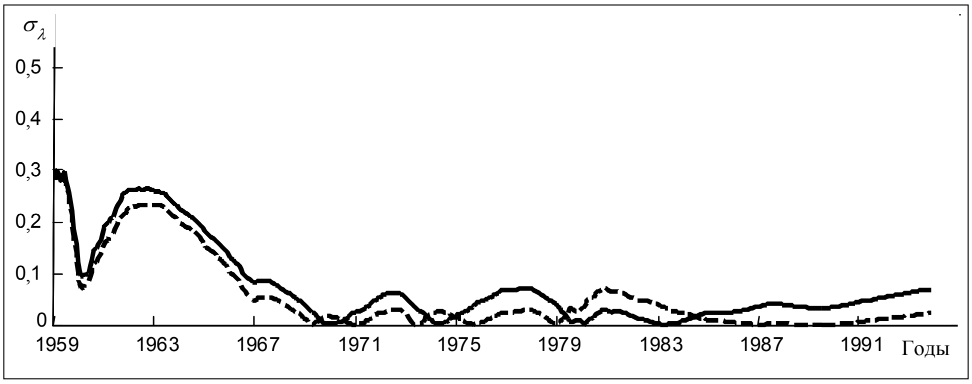

Рис. 3. СКО оценки константы коинтеграции в реальных условиях: 1 — новые методы; 2 — классический МНК

Чтобы исследовать чувствительность методов к зашумленным измерениям, искусственно увеличим дисперсию случайной составляющей в краткосрочной ставке процента и рассчитаем константу коинтеграции.

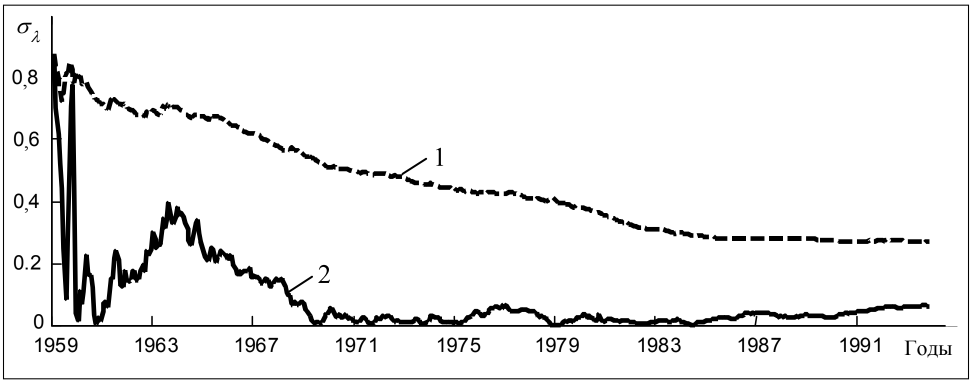

Рис. 4. СКО оценки константы коинтеграции в условиях зашумленных измерений: 1 — классический МНК; 2 — новые методы

Для этого примера новые методы дают существенно более точную оценку и более высокую скорость сходимости, чем МНК.

ВЫВОДЫ

Рассмотрены возможности применения методов параметрической идентификации для оценивания константы коинтеграции в условиях априорной неопределенности.

Проведен сравнительный анализ методов параметрической идентификации статистических характеристик шумов: Мехра, Подладчикова, Андерсона, Борна-Тейпли. Оценены преимущества этих методов и ограничения при решении реальных задач.

Предложены методы идентификации для оценки параметров шумов модели, которые позволяют увеличить точность оценивания константы коинтеграции, особенно в условиях плохой работы МНК.

Разработаны новые и эффективные при решении широкого класса задач методы оценивания константы коинтеграции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уотшем Т.Дж., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах / Пер. с англ. под ред. М.Р. Ефимовой. — М.:Финансы, 1999. — 527 с.
2. *Hamilton J.D.* Times series analisis. — NewJersey: Princtonun university press, 1994. — 799 p.
3. *Мехра Р.* Идентификация и адаптивная фильтрация Калмана / Механика (сб. пер. ст.). — 1971. — **3**. — С. 51–53.
4. *Згуровський М.З., Підладчиков В.М.* Аналітичні методи калманівської фільтрації для систем з апріорною неозначеністю. — Київ: Наук. думка, 1995. — 282 с.

Поступила 28.11.2002