

УДК 532.526

## КАРТЫ ЛОКАЛЬНЫХ РАСТЯЖЕНИЙ: ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ АДВЕКЦИИ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОЛЕ СКОРОСТИ

А. А. ГУРЖИЙ\*, Х. ПЕРХОСЕЙНИ\*\*

\* *Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

\*\* *ISITEM, University of Nantes*

Получено 20.03.99 ◊ Пересмотрено 18.01.2000

Рассматриваются локальные свойства растяжения пассивных жидких областей с произвольными границами в известном поле скорости. Аналитическое решение для локального растяжения позволяет выделить экспоненциальный коэффициент, который описывает растяжение исследуемой области и является аналогом наибольшего показателя Ляпунова, используемого в хаотической динамике. Этот коэффициент существует во всех решениях; он не зависит от формы контура и определяется только градиентами компонент поля скорости. Другой локальный механизм растяжения определяется интегральными характеристиками потока и видом рассматриваемого контура. Построение карт значений локальных растяжений для фиксированных моментов позволяет наглядно проанализировать эволюцию областей, в которых имеет место интенсивное размешивание.

Процесс перемешивания рассматривается на примере задачи об адвекции пассивной примеси в поле скорости, наведенном системой точечных вихрей, движущихся периодически. Этот режим взаимодействия генерирует хаотическое движение пассивных жидких частиц. Локальные карты растяжения показывают, что области хаотического движения жидких частиц и интенсивного перемешивания не совпадают. Хаотические области имеют зоны слабого перемешивания, в которых контуры переносятся из одной зоны интенсивного растяжения в другую без какой-либо деформации.

Розглядаються локальні властивості розтягу пасивних рідких областей з довільними межами у відомому полі швидкості. Аналітичний розв'язок для локального розтягу дозволяє виділити експоненційний коефіцієнт, що описує розтяг області, яка досліджується і є аналогом найбільшого показнику Ляпунова, що використовується в хаотичній динаміці. Цей коефіцієнт існує в усіх рішеннях; він не залежить від форми контура і визначається тільки градієнтами компонент поля швидкості. Інший локальний механізм розтягу визначається інтегральними характеристиками струму і видом контура, що розглядається. Побудова карт значень локальних розтягів для фіксованих моментів дозволяє наочно проаналізувати еволюцію областей, в яких має місце інтенсивне розмішування.

Процес перемішування розглядається на прикладі задачі про адвекцію пасивної домішки у полі швидкості, наведеному системою точечних вихорів, які рухаються періодично. Цей режим взаємодії вихорів генерує хаотичний рух пасивних рідких часток. Локальні карти розтягу показують, що області хаотичного руху рідких часток і інтенсивного перемішування не співпадають. Хаотичні області мають зони слабого перемішування, в яких контури переносяться із однієї зони інтенсивного розтягу в іншу без будь-якої деформації.

The local stirring properties of a passive fluid domain with arbitrary borders in known velocity field are discussed. Analytical solution for local stretching permits to single out an exponential coefficient that describes stretching of the domain studied and is analogous to the largest Lyapunov exponent used in chaotic dynamics. This coefficient exists in all solutions; it does not depend on the shape of the contour, and is determined by the gradients of the velocity field components only. Another local mechanism of stirring is determined by integral characteristics of the flow and the shape of contour under consideration. Construction of maps for local stretching values in fixed moments allows to analyze informatively an evolution of regions, in which an intensive stirring takes place.

The stirring process is explored in a sample of an advection problem of a passive impurity in the velocity field induced by a system of point vortices moved periodically. This interaction regime generates a chaotic motion of passive fluid particles. Local stretching maps show that the regions of chaotic motion of fluid particles and of intensive stirring do not coincide. Chaotic region has a zone of weak stirring, in which contours are transported from one intensive stretching zone to another without any deformation.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Перемешивание представляет собой сложное природное явление, включающее различные механизмы, два из которых наиболее важны: растяжение в связи с наличием поля скорости и диффузия в связи с молекулярным движением [1, 2]. В общем случае полное математическое описание явления оказывается сложным, и строгое решение соответствующей задачи сегодня отсутствует. Иногда диффузионными эффектами можно

пренебречь из-за физических характеристик жидкости или временного масштаба явления, и задача сводится к анализу процесса деформации жидкой области в поле скорости; поле скорости предполагается заданным априорно.

Задача о деформации отмеченных жидких областей, обычно именуемая в литературе как задача об адвекции [1, 3], сводится к анализу траекторий Лагранжевых частиц жидкости, которые формируют границы исследуемой области, в Эйлеровом поле скорости. Каждая жидкая частица может трактоваться как пассивная жидкая частица,

и основные уравнения в задаче представляют собой систему (задача Коши) [1, 3]

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{x}(t)$  – положение жидких частиц (маркеров);  $\mathbf{V}(t)$  – поле скорости. В дальнейшем исследование сводится к изучению эволюции жидких частиц в течении. Каждая такая частица движется по своей траектории, и уравнения движения могут предсказать положения частицы в любой момент времени. Упорядоченное соединение частиц приводит к формированию границ области для заданного момента времени.

Мы обращаемся к задаче об адвекции пассивных жидких частиц, т.е. к ситуации, в которой физические характеристики частиц и жидкой среды одинаковы. Это упрощение позволяет исследовать деформацию границ области во времени и использовать геометрические параметры исследуемой области в качестве критерия размешивания. Общепринято [1, 3, 4 и ссылки], если длина контуров увеличивается экспоненциально со временем, мы имеем хаотическую систему; если длина контуров увеличивается линейно, тогда рассматриваемый процесс является регулярным. Даже для простых ламинарных течений некоторые гидродинамические системы могут быть неинтегрируемыми и проявлять хаотическое поведение, например [1, 5–7]. Арэф [3] предложил термины *хаотическая адвекция* или *Лагранжева турбулентность* для этого явления, и оно явилось предметом интенсивного изучения в различных гидродинамических системах [1, 4, 8–11].

Когда пассивная жидкая частица движется хаотически, траектория имеет сильную зависимость от начальных условий. Расстояние между двумя ближайшими частицами растет экспоненциально в пространстве и, как результат, имеет место интенсивное перемешивание. Обычно, для того, чтобы найти области интенсивного размешивания, определяют зоны хаотического движения, используя различные методы и критерии: фазовые траектории и/или их проекции в фазовом пространстве, спектральный и корреляционный анализы различных характеристик движения, сечение Пуанкаре, наибольший показатель Ляпунова и т.д. [1, 12–14]. Однако это – глобальные характеристики движения жидких частиц, которые определяют глобальные зоны интенсивного размешивания.

Хаос является нелинейным процессом. Влияние нелинейности имеет важную роль при интегрировании эволюционного уравнения (1) для больших

временных интервалов. Более того, эти свойства имеют накопительный характер. Другими словами, при интегрировании изначально слабое влияние нелинейности шаг за шагом, аккумулируется и приводит к значительным изменениям в параметрах динамических систем. В результате может наступить ситуация, когда точное интегрирование эволюционного уравнения не может быть выполнено численно для достаточно больших временных интервалов.

Растяжение – это глобальный процесс. Изначально компактная область может растянуться по большой области и оценка растяжения исследуемой границы достигает некоторого среднего значения. Это означает, что одна часть контура может растягиваться сильнее, чем другие. Возникает вопрос: на какие параметры необходимо ориентироваться и использовать при разработке оборудования для перемешивания для того, чтобы иметь эффективные режимы размешивания для заданных геометрических и энергетических параметров течений?

Наше внимание направлено на исследование локальных свойств растяжения различных отрезков и контуров, изначально помещенных в окрестности произвольной точки поля скорости. В этой статье мы вводим карты растяжений, показывающие как изначально компактный контур, помещенный около точки  $(x, y)$ , увеличивает свою длину за короткий интервал времени для заданного момента времени. Последовательность карт растяжений (для нестационарных двумерных случаев или для типичных моментов периодических течений) позволит проиллюстрировать положения областей (и их дрейф с течением времени), проявляющих интенсивное и слабое растяжение без прямого численного моделирования задачи об адвекции.

Настоящая статья организована следующим образом. В разделе 2 мы получаем основные уравнения, описывающие траекторию пассивной жидкой частицы в окрестности произвольной точки поля скорости. Затем анализируется процесс растяжения/сжатия различных начальных контуров, сформированных последовательностью пассивных маркеров. Эти результаты тестируются в разделе 3 для процесса растяжения, индуцированного полем скорости точечных вихрей. Рассматриваются регулярное перемешивание, которое имеет аналитическое решение, в поле скорости одиночного вихря, и интенсивный режим для трех точечных вихрей, движущихся периодически. Некоторые заключительные замечания, обсуждение и основные выводы приводятся в разделе 4. Приложение иллюстрирует некоторые особенности ана-

лиза.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой части исследуется движение отдельных пассивных лагранжевых жидких частиц и контуров в двумерном нестационарном поле скорости. Такие динамические системы при определенных условиях проявляют хаотическое поведение и приводят к интенсивному глобальному перемешиванию [1, 4, 7, 15]. Здесь мы обратимся к локальным характеристикам явления. Сначала мы исследуем теоретически траектории двух близлежащих жидких частиц. Затем проанализируем локальные растяжения различных контуров.

### 2.1 Локальное движение отдельных жидких частиц

Рассмотрим произвольную точку  $O(x_0, y_0)$  в двумерном нестационарном поле скорости  $\mathbf{U}[U(x, y, t), V(x, y, t)]$ , в котором обе компоненты могут быть разложены в ряд Тейлора для фиксированной точки  $O(x_0, y_0)$  и для момента времени  $t_0$ :

$$U(x, y, t) = U_0 + \frac{\partial U}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial U}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial U}{\partial t}(t - t_0) + \dots, \quad (2)$$

$$V(x, y, t) = V_0 + \frac{\partial V}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial V}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial V}{\partial t}(t - t_0) + \dots \quad (3)$$

Окружим точку  $O(x_0, y_0)$  малой областью с характерным размером  $\varepsilon$  (рис. 1). Мы определяем  $\varepsilon$  такой, чтобы можно было ввести поле скорости  $\mathbf{U}(U, V)$  в линеализованной форме (2), (3). Тогда эволюционное уравнение для пассивной жидкой частицы, изначально помещенной около точки  $O(x_0, y_0)$ , может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d\eta_1}{d\tau} = a\eta_1 + b\eta_2 + e\tau + g, \\ \frac{d\eta_2}{d\tau} = c\eta_1 + d\eta_2 + f\tau + h \end{cases} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\eta_1(0) = \eta_1^0, \quad \eta_2(0) = \eta_2^0, \quad (5)$$

где

$$\eta_1 = x - x_0, \quad \eta_2 = y - y_0, \quad \tau = t - t_0,$$

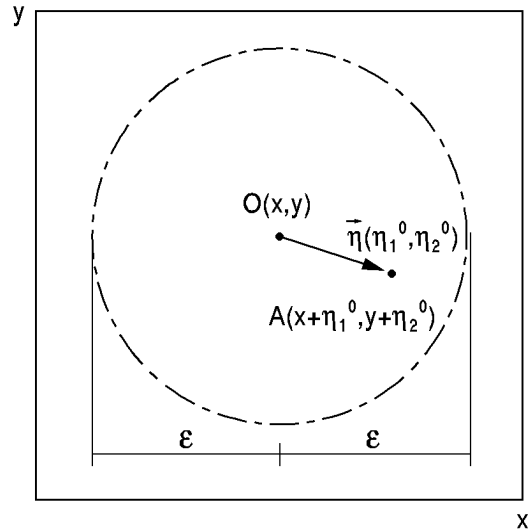


Рис. 1. Схематическая диаграмма, показывающая начальное положение маркера  $A$  в малой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $O$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial U}{\partial x}, & b &= \frac{\partial U}{\partial y}, & c &= \frac{\partial V}{\partial x}, & d &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ e &= \frac{\partial U}{\partial t}, & f &= \frac{\partial V}{\partial t}, & g &= U_0, & h &= V_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь наш начальный интерес направлен на изменение длины вектора  $|\boldsymbol{\eta}(\tau)| = [\eta_1^2(\tau) + \eta_2^2(\tau)]^{1/2}$  во времени.

Все градиенты проекций скорости в правой части уравнений (4) являются постоянными и определяются в  $O(x_0, y_0)$ . Компоненты поля скорости  $\mathbf{U}_0(U_0(x_0, y_0), V_0(x_0, y_0))$  не оказывают влияния на изменение расстояний между рассматриваемыми точками. Однако эти значения определяют временной масштаб  $\tau \approx \varepsilon/|\mathbf{U}|$ , в течение которого рассматриваемые точки остаются в окрестности  $\varepsilon$ .

Решение уравнений (4) зависит от решения характеристического уравнения системы, комплексных значений  $p_1$  и  $p_2$ , и в общем случае может быть записано в следующем виде [16]:

$$\begin{aligned} \eta_1(\tau) &= \exp(p_1 \tau) \{A\eta_1^0 + B\eta_2^0 + E\}, \\ \eta_2(\tau) &= \exp(p_1 \tau) \{C\eta_1^0 + D\eta_2^0 + F\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $p_1$  – значение, которое имеет наибольшую действительную часть;  $A, B, C, D, E$  и  $F$  – функции, определяемые градиентами поля скорости, оцениваемой в точке  $O(x, y)$  (смотри детали в Приложении). Они зависят от решения характеристического уравнения или, другими словами, от знака функции

$$D_c^2 = (a + d)^2 - 4(ad - cb). \quad (8)$$

Уравнения (7) описывают эволюцию точки  $A$  по отношению к точке  $O$ . В общем случае длина вектора  $l = |\boldsymbol{\eta}|$  может быть разложена в ряд Тейлора по малому параметру  $\Delta\tau < \tau$  в рассматриваемой точке  $(x_0, y_0)$ :

$$l(x_0, y_0, t_0, \Delta\tau) = C_0(x_0, y_0, t_0) + C_1(x_0, y_0, t_0)\Delta\tau + C_2(x_0, y_0, t_0)\Delta\tau^2 + O(\Delta\tau^3) \quad (9)$$

Расстояние  $l(x_0, y_0, t_0, \Delta\tau)$  может как увеличиваться, так и уменьшаться, поскольку функции  $A, B, C, D, E$  и  $F$  в уравнении (7) могут быть как положительными, так и отрицательными из-за градиентов скорости и начальных условий (4). Отметим, что если поле скорости является стационарным, все коэффициенты в выражении (9) не изменяются во времени:  $C_0 = C_0(x_0, y_0)$ ,  $C_1 = C_1(x_0, y_0)$  и  $C_2 = C_2(x_0, y_0)$ .

В процессе растяжения исходная область обычно трансформируется в тонкую линию за достаточно большой интервал времени. Различные части этой линии подвергаются как сжатию, так и растяжению. Если исследуемое течение является стационарным, произвольный отрезок или часть контура растягиваются практически в направлении вектора скорости [1]. Используя предыдущие результаты (9), изменение длины отрезка может быть проанализировано теоретически.

Короткий отрезок в точке  $OA$  с характерным размером  $|\boldsymbol{\eta}^0| < \varepsilon$  показан на рис. 2, а. Начальные условия для точек  $O(x_0, y_0)$  и  $A(x_0 + \eta_1^0, y_0 + \eta_2^0)$  формирующие отрезок, имеют вид

$$\begin{aligned} x_A(0) &= |\boldsymbol{\eta}^0| \frac{U_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} + x_0, \\ y_A(0) &= |\boldsymbol{\eta}^0| \frac{V_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} + y_0, \\ x_O(0) &= x_0, \quad y_O(0) = y_0 \end{aligned} \quad (10)$$

и, используя уравнения (7), (10), относительное изменение длины отрезка будет

$$\begin{aligned} L_{seg}(x, y, \Delta\tau) &= \frac{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}}{|\boldsymbol{\eta}^0|} = \\ &= 1 + \Delta\tau \left( \frac{U_0^2(p_2 - d) + V_0^2(p_2 - a)}{U_0^2 + V_0^2} + \frac{V_0 U_0(b + c)}{U_0^2 + V_0^2} + p_1 \right) + O(\Delta\tau^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Эти примеры показывают, что растяжение отрезков в окрестности некоторой точки поля скорости зависит от многих факторов. Растяжение или сжатие исходных отрезков проявляет различный характер со временем из-за поля скорос-

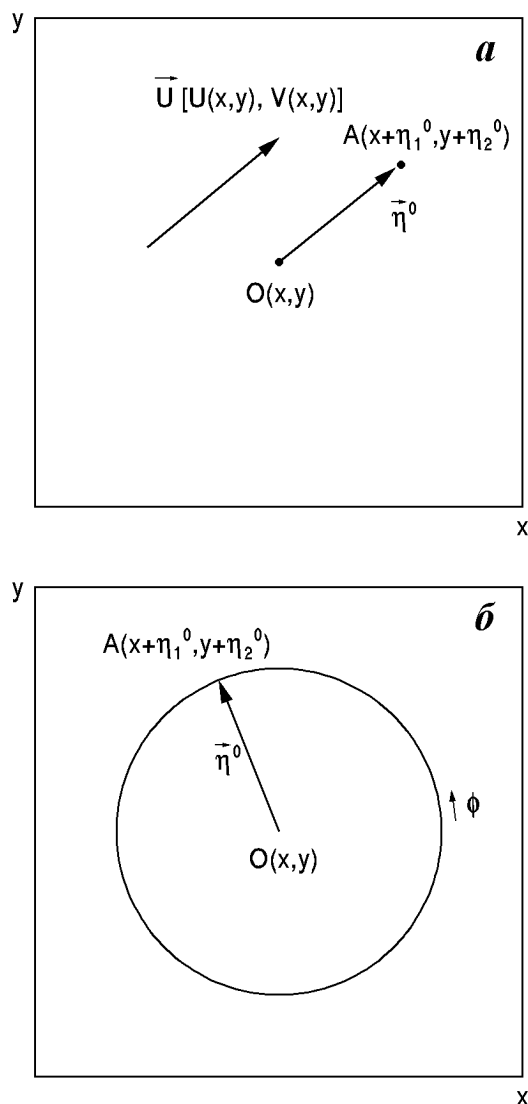


Рис. 2. Схематическая диаграмма, показывающая начальное положение последовательности маркеров, помещенных около точки  $O$ : а – короткий отрезок в направлении вектора скорости в точке  $O$ ; б – малый круг радиуса  $|\boldsymbol{\eta}^0|$

ти и начальных положений рассматриваемых точек. Длина контуров может изменяться линейно и квадратично со временем на начальных стадиях перемешивания изначально компактных контуров. Подробный анализ различных рисунков и данных в численных экспериментах [4, 10, 12, 17, 18] приводит к заключению о достоверности достигнутых результатов. Однако, при размешивании расстояние между точками не совпадает точно с длиной отрезка, поскольку изначально прямая линия тоже деформируется. Это тривиальное рассуждение приводит к заключению, что задачу следует рас-

смагтривать не только для последовательности точек около рассматриваемой точки (базовой), но и для непрерывных линий и контуров.

### 2.2 Локальное движение пассивных жидких контуров

Непрерывный контур может быть представлен последовательностью пассивных маркеров. Рассмотрим растяжение произвольного контура, охватывающего точку  $O(x_0, y_0)$  (рис. 2, б). Локальные координаты всех маркеров, которые формируют в начальный момент контур, могут быть заданы как

$$\begin{aligned} x(\phi) &= |\boldsymbol{\eta}^0| f_1(\phi) + x_0, \\ y(\phi) &= |\boldsymbol{\eta}^0| f_2(\phi) + y_0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\phi$  – параметр контура, изменяющийся от 0 до  $\phi_0$ ;  $|\boldsymbol{\eta}^0|$  – масштаб фигуры,  $|\boldsymbol{\eta}^0| < \varepsilon$ . Длина контура определяется с помощью интеграла

$$l_{con}(x_0, y_0, \tau) = |\boldsymbol{\eta}^0| \int_0^{\phi_0} \left\{ \left( \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial \phi} \right)^2 \right\}^{1/2} d\phi. \quad (13)$$

Используя общее решение (7), вычислим относительную длину контура:

$$\begin{aligned} L(x, y, \tau) &= \frac{l_{con}(x_0, y_0, \tau)}{|\boldsymbol{\eta}^0|} = e^{p_1 \tau} \times \\ &\times \int_0^{\phi_0} \left[ f_1^2 (A^2 + C^2) + f_2^2 (B^2 + D^2) + \right. \\ &\left. + 2(AB + CD) f_1 f_2 \right]^{1/2} d\phi, \end{aligned} \quad (14)$$

где функции  $A, B, C$  и  $D$  определяются в соответствии с уравнениями (7). Здесь точка означает дифференцирование функций по их аргументу.

Интеграл в выражении (14) всегда положителен. Когда  $t \rightarrow 0$ , коэффициенты  $A$  и  $D$  стремятся к единице, в то время как  $B$  и  $C$  стремятся к нулю, означая, что интеграл стремится к конечному значению, равному начальной длине контура. Интеграл зависит от времени и эта зависимость определяется полем скорости. Когда  $D_c > 0$  (см. выражение (8)), интеграл в выражении (14) характеризуется экспоненциальной функцией с положительным аргументом, см. в приложении выражение (34). Если  $D_c = 0$ , все коэффициенты увеличиваются линейно со временем, (выражение (35)). Когда  $D_c < 0$ , они осциллируют, (выражение (36)). Необходимо помнить, что наш анализ

справедлив только в рамках временного масштаба, связанного с масштабом  $\Delta_\tau$ , то есть времени, в течение которого рассматриваемый контур не покидает  $\varepsilon$ -окрестности.

Окружим точку  $O(x_0, y_0)$  малым кругом радиуса  $\varepsilon_0$  (рис. 2, б) в качестве иллюстративного примера. В этом случае начальные значения можно представить в виде (сравни выражения (6) и (12))

$$\eta_1^0 = |\boldsymbol{\eta}^0| \cos \phi, \quad \eta_2^0 = |\boldsymbol{\eta}^0| \sin \phi. \quad (15)$$

Здесь  $\phi$  меняется от 0 до  $2\pi$ .

В процессе растяжения начальный круг подвергается некоторой деформации и каждый маркер занимает новое положение в соответствии с уравнениями (7). Интеграл (14) позволяет определить относительное изменение длины контура (некоторые математические преобразования приведены в Приложении). Как результат, относительная длина контура, формирующего в начальный момент круг, определяется выражением

$$L_{cir}(x, y, \tau) = e^{p_1 \tau} \left[ \frac{2}{\pi} \sqrt{\xi + \mu} \mathbf{E}(k) \right], \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(a, b, c, d, x_0, y_0, t_0), \\ \mu &= \mu(a, b, c, d, x_0, y_0, t_0), \\ k^2 &= 2\xi / (\xi + \mu). \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{E}(k)$  – поный эллиптический интеграл второго рода, а  $\xi, \mu$  – значения, определяемые полем скорости в базовой точке  $(x_0, y_0)$ . Выражение в квадратных скобках описывает длину эллипса, сформированного новым положением маркеров;  $\mu$  и  $\mu + \xi$  – меньшая и большая оси эллипса [16] соответственно. Экспоненциальный множитель  $\exp(p_1 \tau)$  в выражении (16) описывает дополнительное растяжение контура и зависит только от поля скорости. Численный эксперимент показывает: если  $p_1 = 0$ , то изначально круговая область деформируется точно в эллипс. Если  $p_1 \neq 0$ , имеет место складкообразование (см. аналогию с глобальным процессом, четко определенным в монографии [1]) и круг трансформируется в более сложную фигуру.

Выражение (16) может быть разложено в ряд по малому параметру  $\Delta_\tau$ :

$$L_{cir}(x, y, \Delta_\tau) = 1 + \Delta_\tau \left( \frac{a+d}{2} \right) + O(\Delta_\tau^2). \quad (17)$$

Третий член в выражении (17) показан в Приложении. Можно предположить, что структура второго члена в выражении (17) является типичной

для начального растяжения фигур, помещенных в окрестностях  $\varepsilon$ . Если течение несжимаемое, то  $a + d = 0$ .

Важно отметить, что экспоненциальная часть в выражении (14) зависит от поля скорости. Она не определяется типом контура или кривой, которая окружает точку, и описывает растяжение, вызванное только полем скорости. В нашем случае,  $p_1 = p_1(x_0, y_0, t_0)$  соответствует наибольшему положительному корню характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений, которые описывают относительное изменение расстояния между точками во времени, которые были изначально помещены около базовой точки  $O(x_0, y_0)$ . Другая часть выражения (14), определяемая интегралом, описывает локальные свойства растяжения заданных контуров в поле скорости для момента времени  $t_0$ .

Анализ, представленный ранее, может быть выполнен для других базовых точек  $(x_0, y_0)$  поля скорости для одного и того же фиксированного момента  $t_0$ . Особенности растяжения могут быть представлены для момента  $t = t_0$  на топологической карте (карты локального растяжения), где удобно наносить значение  $C_1(x_0, y_0)$ ,  $C_2(x_0, y_0)$  или  $p_1(x_0, y_0)$  (см. выражения (9) или (14) в общем случае) для различных начальных рассматриваемых фигур. Последовательность карт (если имеем нестационарное течение) позволяет открыть дополнительные возможности для анализа положения и смещения областей, которые имеют интенсивное или слабое растяжение различных контуров во времени. Этот анализ представлен ниже.

### 3. ДИНАМИКА ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

В данном разделе применим метод, основанный на картах локального растяжения к течению, генерируемому системой точечных вихрей. Движение точечных вихрей описывается дифференциальными уравнениями первого порядка [19, 20]. Интегрируемость системы зависит от числа вихрей и, для случая трех и более вихрей, генерируемое поле скорости приводит к хаотической адвекции и, как результат, к интенсивному размешиванию. Такая модель движения жидкости приводит к упрощению численного моделирования и анализа, и следовательно, часто используется в качестве теста различных алгоритмов и методов, а также для качественного описания сложных течений [18, 21, 22]. Ниже представлены основные уравнения динамики точечных вихрей для того, чтобы определить наши обозначения; ссылки [4, 20, 23] содержат дополнительные детали.

Движение  $N$  точечных вихрей интенсивности  $k_\alpha$  с координатами  $(x_\alpha, y_\alpha)$  описывается

$$\dot{z}_\alpha^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^N \frac{k_\beta}{z_\alpha - z_\beta}, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (18)$$

с начальными условиями  $z_\alpha(0) = z_\alpha^0$ . Здесь  $z_\alpha = x_\alpha + jy_\alpha$ , точка означает производную по времени, звездочка – комплексное сопряжение, штрих – опущение сингулярного члена  $\alpha = \beta$ .

Движение системы точечных вихрей определяется Гамильтоновой динамической системой

$$\begin{aligned} k_\alpha \dot{x}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, & k_\alpha \dot{y}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \\ \alpha &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N k_\alpha k_\beta \times \\ &\times \ln[(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2]. \end{aligned} \quad (20)$$

Три первых интеграла системы (19), помимо  $H$ , имеют вид

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\alpha=1}^N k_\alpha x_\alpha, & P &= \sum_{\alpha=1}^N k_\alpha y_\alpha, \\ I &= \sum_{\alpha=1}^N k_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение движения пассивной Лагранжевой частицы в поле скорости, наведенной системой точечных вихрей, может быть получено, рассматривая маркер при  $Z = X + jY$  как точечный вихрь нулевой интенсивности [4, 18]. Уравнение пассивной жидкой частицы

$$\dot{Z}^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^N \frac{k_\beta}{Z - z_\beta} \quad (22)$$

с  $Z(0) = Z^0$  трансформируется в Гамильтониановскую форму:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, & \dot{Y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \\ \Psi &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^N k_\beta \ln[(X - x_\beta)^2 + (Y - y_\beta)^2]. \end{aligned} \quad (23)$$

Следовательно, динамическая задача временно-зависимой Гамильтониановской системы с одной

степенью свободы является эквивалентной кинематической задаче пассивной жидкой частицы.

### 3.1 Режим регулярной адвекции

Сначала рассмотрим адвекцию пассивных маркеров в поле скорости одиночного вихря, помещенного в начало координат с безразмерной интенсивностью  $k_1 = 1$ . Вихрь остается неподвижным из-за уравнений (18), и генерируемое потенциальное поле скорости может быть переписано в полярной координатной системе  $(r, \phi)$ :

$$U_\phi = \frac{1}{r}, \quad U_r = 0. \quad (24)$$

Каждая пассивная жидкая частица  $(r, \phi)$  будет двигаться по круговой траектории с постоянной угловой скоростью  $U_\phi$ , которая изменяется с расстоянием  $r$  до вихревого центра. Радиальная скорость  $U_r$  отсутствует.

В нашем анализе можно применить только одну карту растяжения, потому что наведенное поле скорости является стационарным. Используя предыдущий анализ, растяжение отрезка, ориентированного с направлением вектора скорости будет равно нулю, (уравнение (9)), поскольку обе точки движутся с постоянной угловой скоростью согласно уравнениям (24). Как результат, отрезок не подвергается ни сжатию, ни растяжению. В то же время, если точка окружена круговым контуром, коэффициент  $C_1(r) = 0$ , тогда как  $C_2(r)$  пропорционален  $1/r^4$  (рис. 3). Последнее утверждение может быть получено на основе соотношений, приведенных в Приложении, и выражения (24).

Анализ, основанный на растяжении различных контуров и фигур (кругов, ориентированных отрезков, крестов и др.) дает аналогичные, но не одинаковые результаты. Количественные значения зависят от типа исследуемого контура. Можно сказать, что только анализ экспоненциального растяжения становится лишенным этого недостатка. Экспоненциальный коэффициент, чья роль заключалась в выражении растяжения произвольного контура, равен  $p_1 = 1/r^4$  (рис. 3). Можно показать, что первый член в ряде Тейлора  $\exp(p_1 \Delta\tau) = 1 + \Delta\tau/r^4 + O(\Delta\tau^2)$  определяет линейное начальное растяжение контура в окрестности одиночного вихря. Однако этот вывод должен быть обобщен отдельно для глобального процесса с использованием интегрирования вдоль каждой рассматриваемой кривой и во времени.

Тем не менее, можно сделать вывод об области интенсивного растяжения, находящейся около изолированного вихря. Если жидкий контур или его

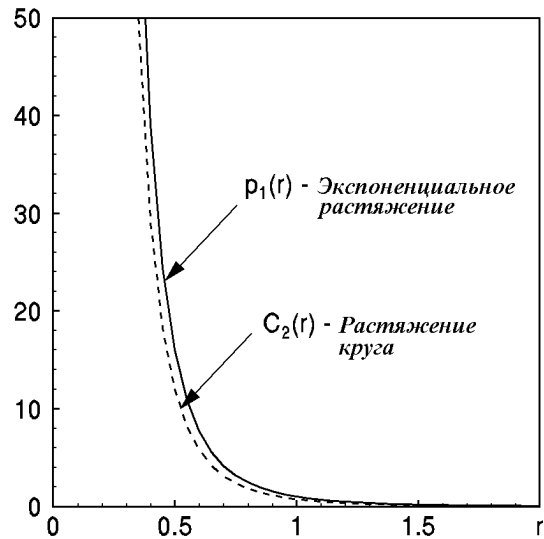


Рис. 3. Зависимость коэффициента  $C_2(r)$  в уравнении (9), выражающего относительное растяжение круга в поле скорости, наведенном одиночным точечным вихрем, и экспоненциального коэффициента  $p_1(r)$  в уравнении (16)

часть расположены при  $r < 0.5 \dots 0.6$ , имеет место сильное растяжение. С течением большого промежутка времени контур станет тонкой линией, и ее растяжение будет определяться разностью расстояний от наудаленной и ближайшей точек к центру вихря. Существование областей интенсивного размешивания и их свойства уже были показаны и анализировались в различных численных экспериментах [18, 24]. Это совпадает с выводом о том, что сильное размешивание (линейное во времени) находится около ( $r < 0.5$ ) точечного вихря.

### 3.2 Хаотическая адвекция в потенциальных течениях

Предшествующие исследования [18] показали, что хаотический режим движения пассивной жидкой частицы наблюдается при определенных начальных условиях системы с тремя и более точечными вихрями. В этой связи, периодическое движение системы с тремя точечными вихрями позволяет нам продемонстрировать различие между глобальными областями хаотического движения и локальными областями интенсивного размешивания.

Рассмотрим периодическое движение трех точечных вихрей со следующими безразмерными на-

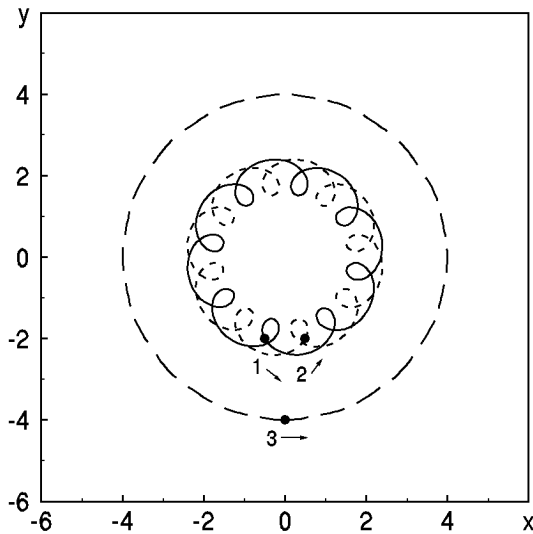


Рис. 4. Траектории вихрей при взаимодействии. Кружки обозначают начальное положение в соответствии с выражением (25), стрелки показывают направление движения

чальными условиями:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.0, & x_1^0 &= -0.497, & y_1^0 &= -2.0, \\ k_2 &= 1.0, & x_2^0 &= 0.497, & y_2^0 &= -2.0, \\ k_3 &= -1.0, & x_3^0 &= 0.0, & y_3^0 &= -4.0. \end{aligned} \quad (25)$$

В работах [23, 25] представлена дополнительная информация о закономерностях взаимодействия такой системы точечных вихрей.

Траектории вихрей определялись с помощью численного интегрирования системы (18) с использованием схемы Рунге-Кутты четвертого порядка [16, 26]. Инварианты (20) и (21) использовались для контроля численного моделирования. Эволюция вихревой системы показана на рис. 4. В течение взаимодействия вихри 1 и 2 формируют вихревую пару, двигаясь периодически, и образуется так называемое движение типа "чехарда", с локальным периодом  $T_L$  [25]. В тоже время три вихря вращаются вокруг центра завихренности  $x_c = 0, y_c = 0$  с глобальным периодом  $T_G$ . Начальные координаты выбраны так, чтобы отношение глобального и локального периодов было целое число, а именно  $T_G/T_L = 8$ .

Сначала обратимся к хорошо известным методам [1, 12, 13] для идентификации глобальных хаотических областей движения жидких частиц. На рис. 5 показано сечение Пуанкаре для жидких частиц, двигающихся в поле скорости при взаимодействии вихрей. Сечение Пуанкаре было построено, когда вихрь 3 пересекал плоскость  $x = 0$  в положительном направлении. Имеются как регулярная,

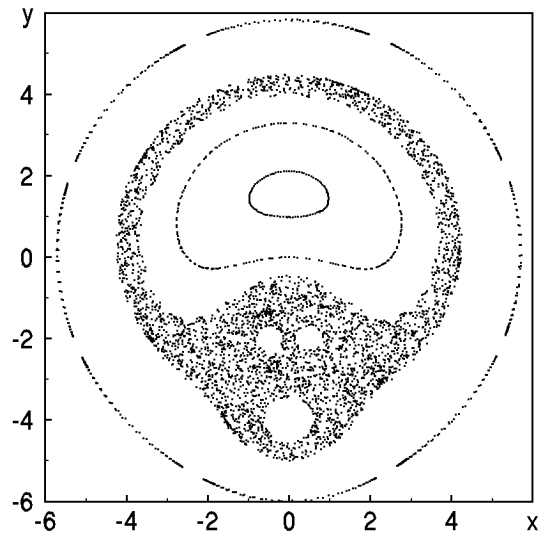


Рис. 5. Сечение Пуанкаре для системы точечных вихрей (25), показывающее области регулярного и хаотического глобального движений пассивных частиц

так и хаотическая области движения: неупорядоченный набор точек соответствует хаотическому движению, в то время как упорядоченный набор точек определяет области регулярного движения.

Рис. 6,а показывает траекторию одиночной жидкой частицы 1, изначально помещенной в  $X_1^0 = 0.0, Y_1^0 = -3.0$ . Это – хаотическая траектория, которая занимает конечный фазовый объем. В то же самое время, частица 2, которая расположена в регулярной области сечения Пуанкаре ( $X_2^0 = 0.0, Y_2^0 = 1.0$ ), имеет регулярное движение (рис. 6, б).

Модуль спектра  $|S(w)|$  проекции траектории

$$|S(w)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} Y(t) e^{jw t} dt \quad (26)$$

для обеих частиц ( $Y_1(t)$  и  $Y_2(t)$ ) показан на рис. 7. Ярко выраженный дискретный набор гармоник свидетельствует о том, что маркер 2 находится в регулярном движении. Напротив, маркер 1 имеет непрерывно изменяющийся спектр, который соответствует хаотическому движению.

Рис. 8 иллюстрирует эволюцию наибольшего показателя Ляпунова  $\lambda(t)$ . Для того, чтобы найти эту функцию, необходимо решить вариациональное уравнение

$$\frac{d\zeta}{dt} = A\zeta, \quad \zeta(0) = \zeta^0. \quad (27)$$



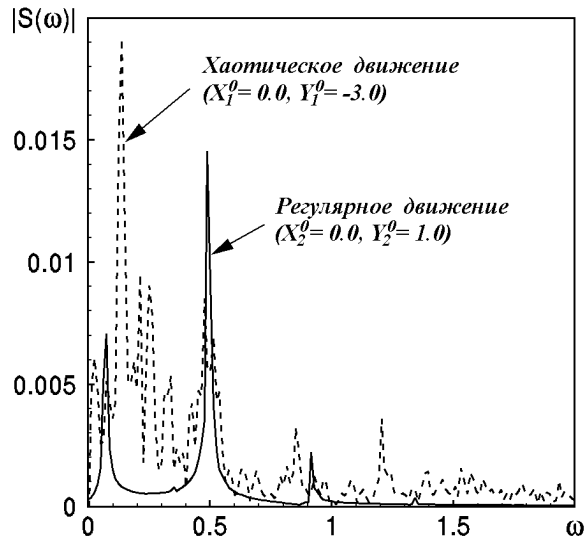
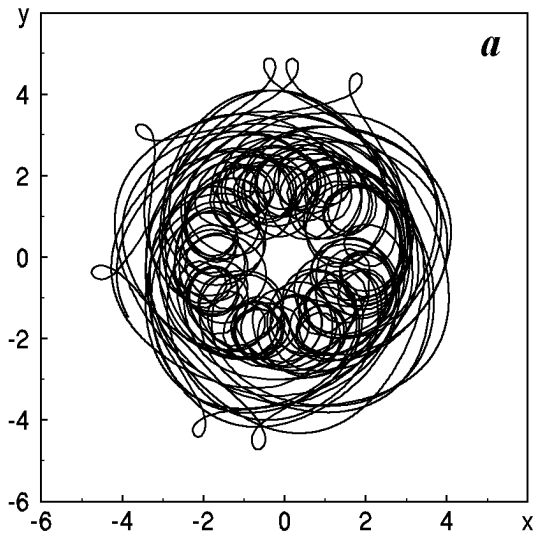


Рис. 7. Модули спектров фазовых проекций траекторий  $y(t)$  для обеих частиц на рис. 6

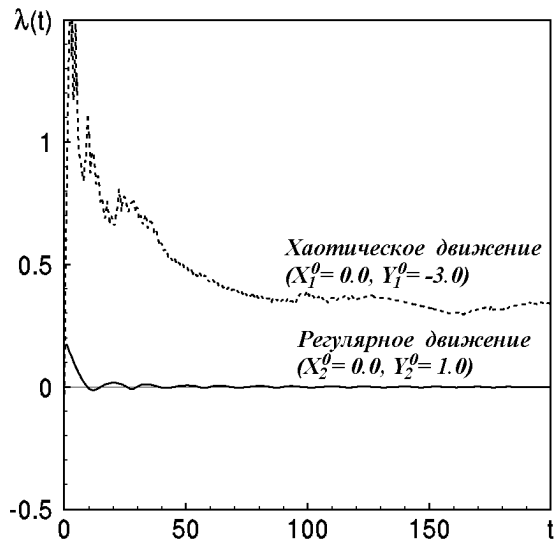
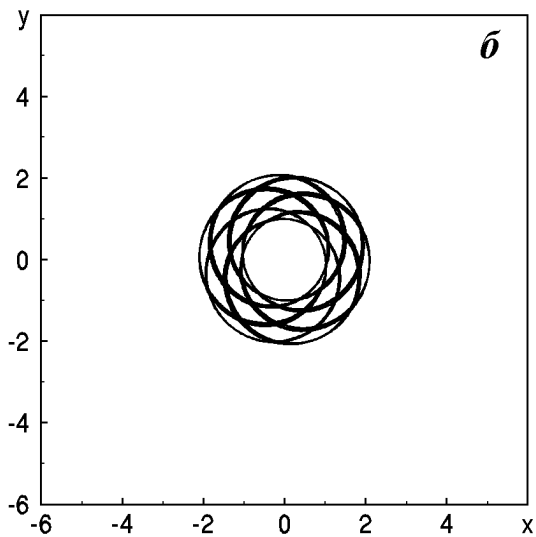


Рис. 6. Траектории пассивных жидких частиц, изначально расположенных в (а)  $(0.0, -3.0)$  и (б)  $(0.0, 1.0)$  в поле скорости, наведенном системой точечных вихрей

Рис. 8. Наибольший показатель Ляпунова  $\lambda(t)$  для обеих частиц на рис. 6

Здесь

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial U}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial V}{\partial \zeta_2} \end{pmatrix}, \quad \zeta(t) = \begin{pmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{A}$  оценивается вдоль траектории маркера  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(X(t), Y(t))$ . На практике уравнения (4) и (27) интегрируются одновременно. Затем вычисляется функция

$$\lambda(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{|\zeta(t)|}{|\zeta^0|}. \quad (28)$$

Соседние траектории в хаотической области расходятся и  $\lambda(t)$  приближается к положительному значению  $\sim 0.3$ . Напротив, для регулярного движения наибольший показатель Ляпунова стремится к нулю.

Все глобальные критерии свидетельствуют, что обе пассивные жидкие частицы имеют различные типы движения.

Сечение Пуанкаре позволяет нам показать глобальные области интенсивного размешивания для хаотического движения. Однако, не очевидно то, что те части хаотической области, которые нахо-

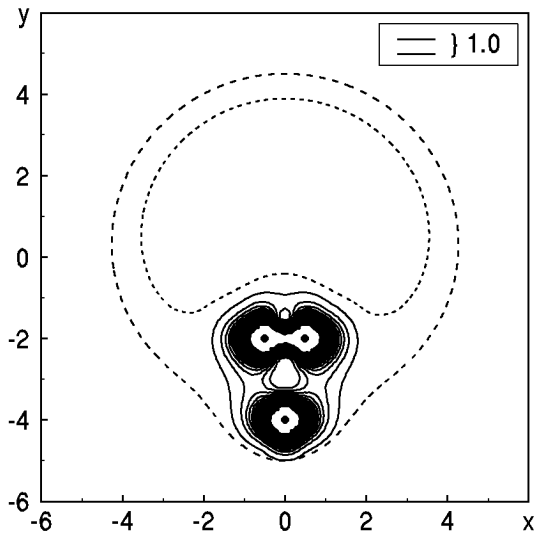


Рис. 9. Карта коэффициента локального растяжения  $C_2(x, y)$  (см. выражение (17),  $C_1(x, y) = 0$  везде) конфигурации "круг" в поле скорости, наведенной точечными вихрями. Разницы в топологических уровнях составляют 1.0. Штриховой линией показаны границы сечения Пуанкаре на рис. 5

дятся вдали от вихрей (см. рис. 5), соответствуют интенсивному режиму размешивания. Наоборот, внутренняя область, расположенная не так далеко от вихрей, имеет регулярный остров. Почему эта область обладает регулярным режимом размешивания, при том, что поле скорости непрерывно и нет особенностей в этой области? Предшествующий анализ локального растяжения может быть применен для того, чтобы ответить на этот вопрос.

Давайте окружим произвольную точку  $(x, y)$  малым кругом и изучим его локальную деформацию во времени. Другими словами, мы хотим вычислить (см. выражения (44), (45))

$$C_2(x, y) = \frac{1}{8}(4\beta_2 - \beta_1^2 - 2\alpha_2 + \alpha_1\beta_1 + 4p_1\beta_1 - 2p_1\alpha_1 + 4p_1^2) \quad (29)$$

и проанализировать карту локального растяжения "круга". Результаты простых вычислений показаны на рис. 9. Здесь штриховой линией показаны границы глобально хаотического движения, связанного с хаотической областью сечения Пуанкаре (рис. 5). Топологические уровни нанесены с интервалом 1.0. Мы не наносили уровни около вихрей, где поле скорости имеет сингулярность. Интенсивное размешивание имеет место в хаотической области только в той части, в которой расположены точечные вихри. Эта карта соответ-

ствует моменту  $t = 0.0$ . Когда вихри имеют аналогичное взаимное положение ( $t_n = T_L n / F_G$ , где  $n = 1, 2, \dots$ ), карты имеют аналогичную структуру. В этом случае карта должна быть повернута соответственно на угол  $2\pi n T_L / T_G$ .

В течение размешивания начальный контур трансформируется почти в тонкую линию, части которой ориентированы в направлении вектора скорости. Понятно, что ориентация отрезков и вектора скорости совпадает только для установившегося режима движения. И тем не менее, карта растяжения изначально линейного отрезка в направлении, совпадающем с вектором скорости, может оценить деформацию для моментов, когда процесс уже продолжается достаточно долгое время:

$$C_2(x, y) = \frac{U_0^2(p_2 - d) + V_0^2(p_2 - a)}{U_0^2 + V_0^2} + \frac{U_0 V_0(b + c)}{U_0^2 + V_0^2} + p_1, \quad (30)$$

где  $U_0$  и  $V_0$  – компоненты скорости в текущей точке  $(x, y)$ . Карта (рис. 10) имеет практически аналогичную структуру: зоны интенсивного растяжения расположены рядом с вихрями, а слабой деформации – вдали от них. Асимметрия в ориентации отрезков по отношению к полю скорости приводит к асимметрии топологических уровней. Этот простой графический анализ подтверждает вывод о том, что интенсивная адвекция имеет место только в областях, расположенных недалеко от вихрей.

Рассмотренные примеры показывают растяжение определенных фигур или их частей, ориентированных в пространстве. Показано, что области интенсивного растяжения расположены рядом с вихрями. Количественные оценки растяжения зависят от вида контура, особенно на начальных стадиях размешивания.

Наконец, можно вычислить карту экспоненциальных коэффициентов

$$p_1(x, y) = \frac{a + d + D_c}{2}, \quad (31)$$

которые имеют действительные значения везде для потенциального несжимаемого потока, когда  $a + d = 0$  и  $c - d = 0$ . Карта экспоненциального коэффициента  $p_1(x, y)$  нанесена на рис. 11 по аналогии с предыдущими случаями. Здесь  $p_1(x, y)$  описывает расхождение близлежащих траекторий. Топологическая карта качественно аналогична случаям, рассмотренным ранее. Значение растяжения контуров из-за экспоненциально-

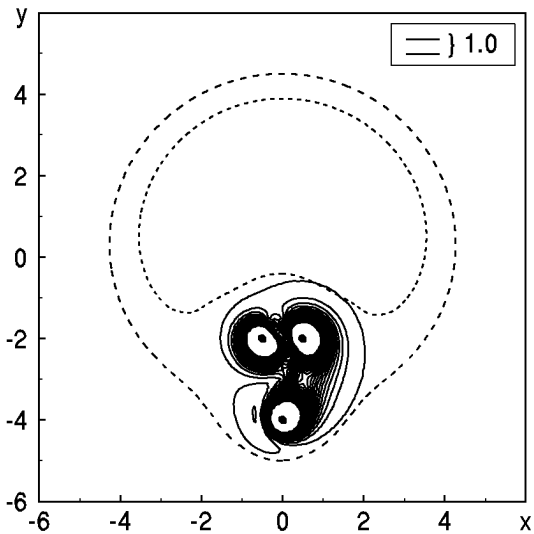


Рис. 10. Карта коэффициента локального растяжения  $C_1(x, y)$  (см. выражение (11)) для отрезка, ориентированного в направлении вектора скорости в системе точечных вихрей. Разницы в топологических уровнях составляют 1.0. Штриховой линией показаны границы сечения Пуанкаре на рис. 5

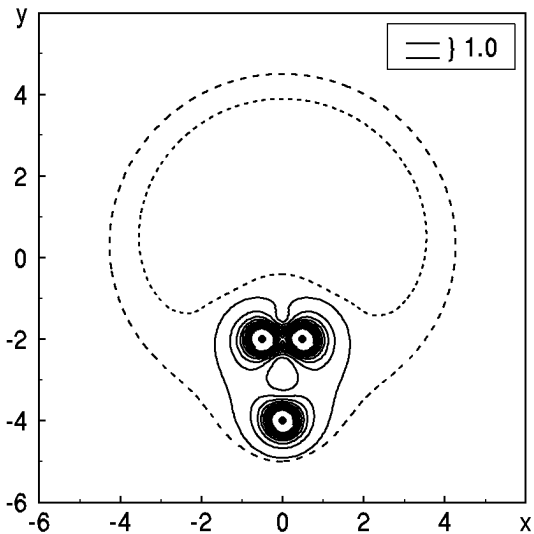


Рис. 11. Карта коэффициента экспоненциального растяжения  $r_1(x, y)$  (см. выражение (14)) контуров в поле скорости точечных вихрей. Разницы в топологических уровнях составляют 1.0. Штриховой линией показаны границы сечения Пуанкаре на рис. 5

го множителя имеет доминирующую роль по сравнению с интегралом в выражении (14). Надо помнить, что этот коэффициент не зависит от типа рассматриваемых контуров или линий и определяется только полем скорости.

Эволюция каждого отрезка контура зависит от поля скорости, наведенного вихрями. Если неко-

торые отрезки контура, в течение процесса адвекции, расположены далеко от вихрей, они не подвергаются сильной деформации и двигаются почти с той же формой и размерами, даже если расположены в хаотической области. Это значит, что пассивные жидкие частицы двигаются от одной части хаотической области к другой. Вот почему хаотическая область имеет также зоны слабого размешивания. Эти зоны расположены по бокам и наверху хаотической области, изображенной на сечении Пуанкаре (см. рис. 5).

Чтобы показать это, необходимо смоделировать процесс адвекции для пассивных жидких частиц в поле скорости, наведенном тремя точечными вихрями. Начальные координаты вихрей соответствуют выражению (25). Вычисления проводились для пассивной области, начально занимающую круговую область с радиусом 0.5, чей центр расположен в хаотической области движения с координатами  $x_c = -2.5, y_c = -2.0$  (рис. 12, а). Эволюция изучаемого контура описывается уравнениями (22). Для того, чтобы построить сдеформированную область для фиксированных моментов мы использовали метод кусочной сплайн-интерполяции [27], который позволяет сформировать границы замкнутой области, используя упорядоченную последовательность маркеров. Численное моделирование проверялось на сохранение площади во времени, поскольку  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$  для несжимаемого течения, и

$$\frac{dS}{dt} = \oint \frac{d\mathbf{U}}{dt} dC = \int_{S_C} \frac{d}{dt} [\nabla \cdot \mathbf{U}] dS = 0, \quad (32)$$

где  $C$  – рассматриваемый контур;  $\nabla$  – оператор набла [16].

Момент  $t = 2T_L$  (рис. 12, б) соответствует двум периодам взаимодействия (между вихрями 1 и 2), система точечных вихрей повернулась на угол  $\pi/2$  относительно вихревого центра ( $x_c = 0, y_c = 0$ ) и имеет взаимное расположение, аналогичное начальному моменту. Форма пассивной области практически не изменилась; только расстояние между вихрем и областью увеличилось. Как результат, влияние вихрей на процесс размешивания уменьшилось. К тому же, пассивная область осталась внутри области хаотической адвекции, показанной штриховой линией.

Рис. 12, в соответствует моменту  $t = 4T_L$ : расстояние между пассивным контуром и вихрями максимальное, и вихри почти не оказывают влияния на процесс пассивной адвекции. Форма области и ее положение в пространстве не меняются.

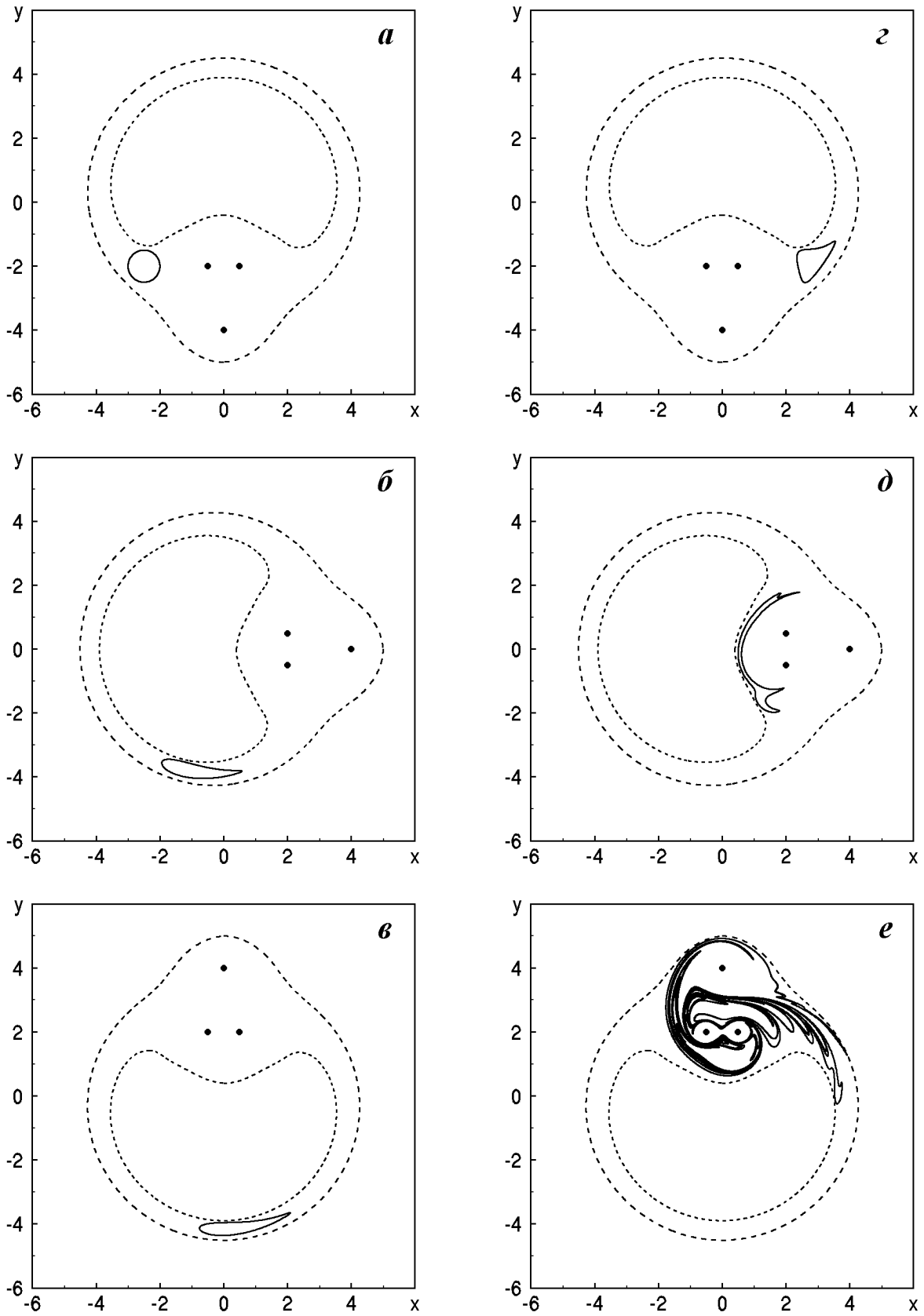


Рис. 12. Эволюция кругового контура радиуса 0.5, изначально расположенного в точке  $(-2.5, -2.0)$  в хаотической области движения в поле скорости, наведенной точечными вихрями:  $a - t = 0.0$ ,  $б - t = 2T_L$ ,  $в - t = 4T_L$ ,  $г - t = 8T_L$ ,  $д - t = 10T_L$ ,  $е - t = 12T_L$ . Штриховой линией показаны границы сечения Пуанкаре на рис. 5

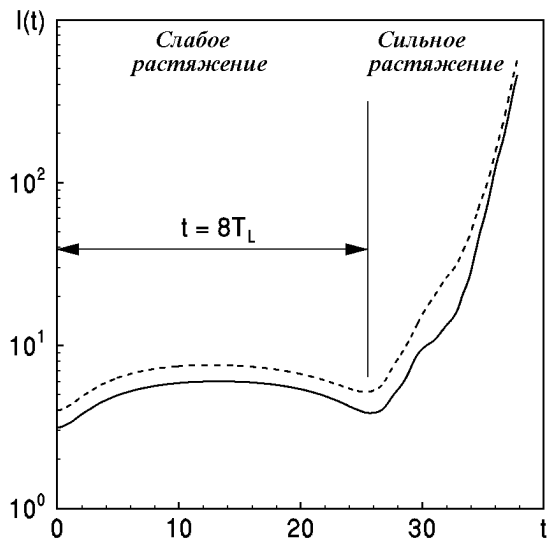


Рис. 13. Эволюция во времени длин контуров, изначально расположенных в точке  $(-2.5, -2.0)$  в хаотической области в поле скорости, наведенном точечными вихрями. Непрерывная линия показывает изменение изначально круговой области с радиусом 0.5, штриховая линия соответствует изначально квадратной области  $1.0 \times 1.0$ .

Эта ситуация продолжается вплоть до полного периода взаимодействия,  $t = 8T_L$  (рис. 12, г). Расстояние между вихрями и маркерами области уменьшилось. Область расположена около вихрей, и влияние вихрей на процесс размешивания значительно увеличилось. Интенсивный режим начался только в этот момент (рис. 12, д). Значительная деформация имеет место, и изучаемая область сильно растянулась и сформировалась почти в тонкую линию в течение следующего полупериода взаимодействия. На рис. 12, е показаны границы области при  $t = 12T_L$ .

На рис. 13 показано изменение длины контура как функция времени. Сначала, поскольку начальная область располагалась недалеко от вихрей, она была подвержена слабой деформации. Растяжение области в течение  $0 < t < 8T_L$  очень слабое. Затем контур подвергается значительной деформации: его длина увеличивается экспоненциально (рис. 13). Это подтверждает то, что наступил режим хаотической адвекции.

Непосредственное моделирование процесса размешивания в поле скорости, наведенном системой точечных вихрей, ясно демонстрирует наличие как сильных, так и слабых процессов размешивания внутри хаотической области, отмеченной сечением Пуанкаре. Анализ эффектов растяжения показывает, что области интенсивного размешивания

не обязательно совпадают с областью хаотического движения. В действительности, сильное локальное растяжение имеет место около вихрей, в то время как остальная часть хаотической области участвует в перемещении жидких частиц.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Построение локальных карт растяжения разных контуров для фиксированных моментов дает существенное преимущество в предварительном целенаправленном анализе процессов адвекции пассивных контуров в заданном поле скорости. Эти карты, подобно мгновенным слайдам значений растяжений (или нормированным значениям растяжений) для разных контуров, помогают не только обнаружить существование областей интенсивного размешивания, но и, используя последовательность карт, выявить их дрейф во времени.

К сожалению, очень трудно дать практические рекомендации в отношении того, какой контур необходимо использовать при анализе произвольного поля скорости. Очевидно, если мы рассматриваем регулярное стационарное течение, наиболее удобными являются локальные карты растяжений отрезков, ориентированных в направлении вектора скорости, потому что в стационарном течении исходный контур со временем деформируется в линию, совпадающую с траекторией пассивных частиц. С нашей точки зрения, наиболее удобными картами для хаотических режимов являются карты экспоненциального растяжения, потому что хаотическое растяжение характеризуется глобальным экспоненциальным растяжением контуров.

Растяжение контуров может быть представлено и в экспоненциальной форме для всех рассмотренных контуров (см. уравнения (7), (14), (16) и (11), где экспонента может быть выделена) с экспоненциальным коэффициентом, определяемым градиентами поля скорости. Он не зависит от типа рассматриваемого контура или отрезка и описывает растяжение в связи с течением жидкости. Здесь  $p_1(x, y, t) = \text{Re}[p(x, y, t)]$ , где  $p(x, y, t)$  – комплексный корень характеристического уравнения (4) есть аналог наибольшего показателя Ляпунова  $\lambda(t)$ , обычно используемого для определения хаотических режимов движения в хаотической динамике [12, 13]. В нашем случае  $p_1(x, y, t)$  определяется в течение короткого интервала времени  $\tau$ ,  $t_0 < \tau < t_0 + \Delta\tau$ , в то время как наибольший показатель Ляпунова следует вычислять при  $t \rightarrow \infty$ . Другими словами, для того, чтобы определить  $\lambda(t)$  для заданного маркера, необхо-

димо усреднить  $p_1(x, y, t)$  вдоль траектории  $X(t)$ ,  $Y(t)$ . Этот маркер посещает различные области, как интенсивного, так и слабого размешивания, и информация о локальном растяжении в посещенных областях усредняется и, следовательно, теряется. Вот почему значение наибольшего показателя Ляпунова для маркера, изначально помещенного в точку  $(x, y)$ , не совпадает с локальным значением  $p_1(x, y, t)$  и сравнительный анализ [17, 28] не дал точного совпадения. Вероятно оба коэффициента равны, только когда рассматриваемая точка является точкой равновесия: маркер не движется и

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_1(x, y, t) dt = p(x, y). \quad (33)$$

Одновременно, существует другой механизм локального растяжения. Он определяется типом контура, помещенного около заданной точки. Его длина увеличивается, зависит от формы контура и определяется интегралом (13). Для несжимаемых вихревых течений экспоненциальный множитель в уравнении (7) может быть равен нулю или малому значению. Следовательно, второй механизм играет лидирующую роль в этом случае.

Можно предположить, что оба механизма, скажем экспоненциальный и интегральный, не существуют отдельно. Вопрос заключается в том, какой преобладает в различных ситуациях. В частности, штриховая линия на рис. 13 показывает изменение длины квадратной области пассивной примеси в поле скорости, наведенной системой трех точечных вихрей, рассмотренных ранее. Квадратная область имеет размер 1.0 и ее центр (пересечение диагоналей) совпадает с центром круговой области, рассмотренной ранее. Изменение длины двух контуров, как количественная оценка процесса перемешивания, почти одинаково. Это позволяет сделать вывод о том, что экспоненциальное растяжение является преобладающим для каждого локального отрезка контуров в заданном поле скорости: глобальный процесс растяжения почти не зависит от формы начального контура.

Построение локальных карт растяжения для различных контуров требует априорного знания формы контура для текущего момента процесса адвекции, это означает, что необходимо решить глобальную задачу об адвекции, что является трудной численной задачей. Напротив, построение локальных карт экспоненциального растяжения (хаотические режимы) позволяют нам упростить исследования областей интенсивного растяжения и их пространственное положение как для

стационарных, так и нестационарных течений, и не требует сложных вычислений. Вот почему мы можем заключить, что локальные карты экспоненциальных коэффициентов наиболее информативны для сложных хаотических режимов движения в гидродинамических системах.

Пример пассивной адвекции в поле скорости трех точечных вихрей позволил нам наглядно выявить области интенсивного растяжения и их смещение в пространстве с течением времени. Простой анализ локальных растяжений показывает, что существуют области слабого размешивания в хаотической области движения пассивной частицы. Эти области двигаются во времени, но остаются внутри хаотической области. Представленный метод идентифицирует области сильного размешивания и оценивает эффекты локального растяжения в этих областях.

### Благодарности

Эти исследования были выполнены в то время, когда автор посещал Thermofluids and Complex Flows Research Group, LTI, URA-CNRS 869, ISITEM, University of Nantes, France (в рамках гранта the Conseil Général de Loire Atlantique), сотрудником которой (A. Mokrani and C. Castelain) автор выражает свою признательность и благодарность. Автор также благодарен профессору Мелешко В. В. (Институт гидромеханики, НАН Украины) за полезные советы.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение уравнения движения с начальными условиями (4) зависит от корней ( $p_1$  and  $p_2$ ) характеристического уравнения [16] и может быть записано в форме (7). Имеются три случая:

а) оба корня характеристического уравнения ( $p_1$  and  $p_2$ ) являются действительными, когда  $D_c^2 > 0$ :

$$\begin{aligned} A &= [p_1 - d - (p_2 - d)\exp(-D_c\tau)]/D_c, \\ B &= b[1 - \exp(-D_c\tau)]/D_c, \\ C &= c[1 - \exp(-D_c\tau)]/D_c, \\ D &= [p_1 - a - (p_2 - a)\exp(-D_c\tau)]/D_c, \\ E &= \left\{ \frac{g}{D_c} + \frac{e(p_1 - d) + (hp - dg)p_1 + fb}{p_1^2 D_c} \right\} - \\ &\quad - \left\{ \frac{g}{D_c} + \frac{e(p_2 - d) + (hb - dg)p_2 + fb}{p_2^2 D_c} \right\} \times \\ &\quad \times e^{-D_c\tau} + \left\{ \frac{e + hb - dg}{p_1 p_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{fb - ed}{p_1^2 p_2^2} (p_1 + p_2 + p_1 p_2 \tau) \right\} e^{-p_1 \tau}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$F = \left\{ \frac{h}{D_c} + \frac{f(p_1 - a) + (gc - ha)p_1 + \epsilon c}{p_1^2 D_c} \right\} - \times \frac{p_0^2 - K^2}{p_0^2 + K^2} \left\{ \frac{\sin K\tau}{K} + \{f + gc - ha + \right.$$

$$- \left. \left\{ \frac{h}{D_c} + \frac{f(p_2 - a) + (gc - ha)p_2 + \epsilon c}{p_2^2 D_c} \right\} \times \right. + \left. \frac{\epsilon c - fa}{p_0^2 + K^2} [2p_0 + (p_0^2 + K^2)\tau] \right\} \frac{e^{-p_0\tau}}{p_0^2 + K^2},$$

$$\times e^{-D_c\tau} + \left\{ \frac{f + gc - ha}{p_1 p_2} + \right.$$

$$+ \left. \frac{\epsilon c - fa}{p_1^2 p_2^2} (p_1 + p_2 + p_1 p_2 \tau) \right\} e^{-p_1\tau};$$

где

$$4K^2 = -D_c^2. \tag{37}$$

Для того, чтобы вычислить длину изначально кругового контура для момента времени  $\tau$  необходимо вычислить (см. выражения (13), (15))

б) оба корня совпадают ( $p_1 = p_2 = p_0$ ), то есть  $D_c^2 = 0$ :

$$A = 1 + (p_0 - a_{22})\tau,$$

$$B = a_{12}\tau,$$

$$C = a_{21}\tau,$$

$$D = 1 + (p_0 - a_{11})\tau, \tag{35}$$

$$E = g\tau - \frac{e + hb - gd}{p_0^2} (1 - p_0\tau) + \frac{fb - ed}{p_0^2} \tau -$$

$$- \frac{2(fb - ed)}{p_0^3} + \{e + hb - gd +$$

$$+ (fb - ed)\tau + \frac{2(fb - ed)}{p_0}\} \frac{e^{-p_0\tau}}{p_0^2},$$

$$F = h\tau - \frac{f + gc - ha}{p_0^2} (1 - p_0\tau) + \frac{\epsilon c - fa}{p_0^2} \tau -$$

$$- \frac{2(\epsilon c - fa)}{p_0^3} + \{f + gc - ha +$$

$$+ (\epsilon c - fa)\tau + \frac{2(\epsilon c - fa)}{p_0}\} \frac{e^{-p_0\tau}}{p_0^2};$$

$$l = \frac{|\eta^0|}{\sqrt{2}} \exp(-D_c\tau) \int_0^{2\pi} \left( (A^2 + B^2 + C^2 + D^2) + \right.$$

$$+ [(B^2 + D^2 - A^2 - C^2)^2 +$$

$$+ 4(AB + DC)^2]^{1/2} \sin 2\phi \Big)^{1/2} d\phi. \tag{38}$$

Вводя обозначения,

$$\xi = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \tag{39}$$

$$\mu = (B^2 + D^2 - A^2 - C^2)^2 + 4(AB + DC)^2,$$

безразмерная длина контура выражается

$$L = \frac{l}{2\pi|\eta^0|} = \frac{\exp(-D_c\tau)}{\sqrt{8\pi}} \int_0^{2\pi} (\xi + \mu \sin 2\phi)^{1/2} d\phi =$$

$$= \frac{2\exp(p_1\tau)}{\pi} \left( \sqrt{\xi + \mu} \mathbf{E}(k) \right), \tag{40}$$

где  $k^2 = (2\xi)/(\xi + \mu)$  и  $\mathbf{E}(k)$  - полный эллиптический интеграл второго рода.

в) оба корня характеристического уравнения  $p_{1,2} = p_0 \pm j|D_c|/2$ , где  $p_0 = \text{Re}[p_1]$  являются комплексно сопряженными, когда  $D_c^2 < 0$ :

$$A = \cos K\tau + [(p_0 - a_{22})\sin K\tau]/K,$$

$$B = [a_{12}\cos K\tau]/K,$$

$$C = [a_{21}\cos K\tau]/K,$$

$$D = \cos K\tau + [(p_0 - a_{11})\sin K\tau]/K, \tag{36}$$

$$E = \left\{ dg - e - hb - \frac{2p_0(fb - ed)}{p_0^2 + K^2} \right\} \frac{\cos K\tau}{p_0^2 + K^2} +$$

$$+ \left\{ g - \frac{p_0(e + hb - gd)}{p_0^2 + K^2} + (fb - ed) \times \right.$$

$$\times \left. \frac{p_0^2 - K^2}{p_0^2 + K^2} \right\} \frac{\sin K\tau}{K} + \{e + hb - dg +$$

$$+ \frac{fb - ed}{p_0^2 + K^2} [2p_0 + (p_0^2 + K^2)\tau] \} \frac{e^{-p_0\tau}}{p_0^2 + K^2},$$

$$F = \left\{ ha - f - gc - \frac{2p_0(\epsilon c - fa)}{p_0^2 + K^2} \right\} \frac{\cos K\tau}{p_0^2 + K^2} +$$

$$+ \left\{ h - \frac{p_0(f + gc - ha)}{p_0^2 + K^2} + (\epsilon c - fa) \times \right.$$

Давайте рассмотрим случай  $D_c^2 > 0$ . Случай  $D_c^2 = 0$  и  $D_c^2 < 0$  могут трактоваться по аналогии. Ряды Тейлора ( $\Delta_\tau$  - малый параметр) для неизвестных функций имеют вид

$$A = 1 + \Delta_\tau(p_2 - d) - \Delta_\tau^2 \frac{D_c}{2}(p_2 - d) + O(\Delta_\tau^3),$$

$$B = b\Delta_\tau \left( 1 - \frac{D_c\Delta_\tau}{2} + O(\Delta_\tau^2) \right),$$

$$C = c\Delta_\tau \left( 1 - \frac{D_c\Delta_\tau}{2} + O(\Delta_\tau^2) \right), \tag{41}$$

$$D = 1 + \Delta_\tau(p_2 - a) - \Delta_\tau^2 \frac{D_c}{2}(p_2 - a) + O(\Delta_\tau^3).$$

Затем из выражения (39) мы можем написать

$$2\xi = \Delta_\tau\alpha_1 + \Delta_\tau^2\alpha_2 + O(\Delta_\tau^3), \tag{42}$$

$$\xi + \mu = 1 + \Delta_\tau\beta_1 + \Delta_\tau^2\beta^2 + O(\Delta_\tau^3), \tag{43}$$

где

$$\alpha_1 = 2\sqrt{(a_{22} + a_{11})^2 + (a_{12} + a_{21})^2},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1} ((a_{22} + a_{11})(a_{12}^2 - a_{21}^2 + \\
&+ (p_2 - a_{11})(p_2 - a_{11} - D_c) - \\
&- (p_2 - a_{22})(p_2 - a_{22} - D_c)) + \\
&+ (a_{12} + a_{21})(a_{12}(2p_2 - 2a_{22} - D_c) + \\
&+ a_{21}(2p_2 - 2a_{11} - D_c)), \\
\beta_1 &= \frac{\alpha_1}{2} - D_c, \\
\beta_2 &= \frac{1}{2} [(p_2 - a_{22})(p_2 - a_{22} - D_c) + \\
&+ (p_2 - a_{11})(p_2 - a_{11} - D_c) + a_{12}^2 + a_{21}^2 + \alpha_2].
\end{aligned} \tag{44}$$

В этом случае уравнение (16) может быть разложено в следующий ряд:

$$\begin{aligned}
L &= 1 + \frac{\Delta\tau}{4}(2\beta_1 - \alpha_1 + 4p_1) + \\
&+ \frac{\Delta\tau^2}{8}(4\beta_2 - \beta_1^2 - 2\alpha_2 + \alpha_1\beta_1 + \\
&+ 4p_1\beta_1 - 2p_1\alpha_1 + 4p_1^2).
\end{aligned} \tag{45}$$

- Ottino J. M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport.– Cambridge: Cambridge University Press, 1989.– 683 p.
- Lamb H. Hydrodynamics.– Cambridge: Cambridge University Press, 6th ed., 1967.– 677 p.
- Aref H. Chaotic advection of fluid particle // Phil. Trans. R. Soc. London.– 1990.– **333**.– P. 273–288.
- Meleshko V. V. and van Heijst G. J. F. Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties // Chaos, Solitons & Fractals.– 1994.– **4**.– P. 977–1010.
- Wang L. P., Maxey M. R., Burton T. D., and Stock D. E. Chaotic dynamics of particle dispersion in fluids // Phys. Fluids.– 1992.– **A4**.– P. 1789–1804.
- Muzzio F. J., Meneveau C., Swanson P. D., and Ottino J. M. Scalling and multifractal properties of mixing in chaotic flows // Phys. Fluids.– 1992.– **A4**.– P. 1439–1456.
- Jones S. W., Thomas O. M. and Aref H. Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe // J. Fluid Mech.– 1989.– **209**.– P. 335–357.
- Umeki M. Lagrangian motion of fluid particles induced by three-dimensional standing surface waves // Phys. Fluids.– 1992.– **A4**.– P. 1968–1978.
- Muzzio F. J., Swanson P. D. and Ottino J. M. The statistics of stretching and stirring in chaotic flows // Phys. Fluids.– 1991.– **A3**.– P. 822–834.
- Flór J. B. and van Heijst G. J. F. An experimental study of dipolar vortex structures in a stratified fluid // J. Fluid Mech.– 1994.– **279**.– P. 101–133.
- Ling F. H. Chaotic mixing in a spatially periodic continuous mixer // Phys. Fluids.– 1993.– **A5**.– P. 2147–2160.
- Moon F. C. Chaotic and Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers.– New York: John Wiley & Sons, 1989.– 312 p.
- Schuster H. G. Deterministic Chaos.– 2nd ed., Wein: VHC Publishers, 1984.– 342 p.
- Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Л.И.Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн // Успехи Физических Наук.– 1979.– Т.128, Вып.4.– С. 579–624.
- Peerhossaini H., Castelain C. and Le Guer Y. Heat exchanger design based on chaotic advection // Exper. Thermal and Fluid Science.– 1993.– **7**.– P. 333–341.
- Korn G. A. and Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers.– New York: McGraw-Hill, 1968.– 1130 p.
- Aref H. and Jones S. W. Enhanced separation of diffusing particles by chaotic advection // Phys. Fluid.– 1989.– **A1**.– P. 470–474.
- Meleshko V. V., Konstantinov M. Yu., Gurzhi A. A. and Konovalyuk T. P. Advection of a vortex pair atmosphere in a velocity field of point vortices // Phys. Fluids.– 1992.– **A4**.– P. 2779–2797.
- Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. reine angew. Math.– 1858.– **55**.– P. 25–55.
- Aref H. Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional flows // Ann. Rev. Fluid Mech.– 1983.– **15**.– P. 345–390.
- Velasco Fuentes O. U., van Heijst G. J. F. and Lipzig N. P. M. Unsteady behaviour of topography-modulated tripole // J. Fluid Mech.– 1996.– **307**.– P. 11–41.
- Салтанов Н. В., Горбань В. А. Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения.– Киев: Наук. думка, 1993.– 244 с.
- Коновалюк Т. П. Классификация взаимодействия вихревой пары с точечным вихрем в идеальной жидкости // Гидромеханика.– 1990.– **62**.– С. 64–69.
- Price T. Chaotic scattering of two identical point vortex pairs // Phys. Fluids.– 1993.– **A5**.– P. 2479–2483.
- Meleshko V. V. and Gourjii A. A. Stirring of an inviscid fluid by interacting point vortices // in "Modelling of Oceanic Vortices" (ed. G. J. F. van Heijst), Proceeding Colloquium Royal Netherlands Academy of Arts and Science.– Amsterdam, Noth-Holland.– 1994.– P. 271–281.
- Форсайт Дж., Малкольм М., Коулер К. Машинные методы математических вычислений.– М.: Мир, 1980.– 210 с.
- Гуржий О. А., Мелешко В. В., ван Хейст Г. Я. Ф. Метод кусковой сплайн-интерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // Доп. АН України.– 1996.– N.8.– С. 48–54.
- Jones S. W. The enhancement of mixing by chaotic advection // Phys. Fluids.– 1991.– **A3**.– P. 1081–1086.