УДК 519.7

ПРОСТРАНСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ИЗОМОРФИЗМ

Н.Н. ДИДУК

Рассмотрены некоторые свойства пространств неопределенности (ПН). Показано, как с помощью ПН можно осуществлять формализацию неформальных ситуаций неопределенности различных типов (вероятностных ситуаций, бесструктурных, нечетких). Выведено понятие изоморфизма ПН, которое затем использовано для определения однородных ПН.

Понятие пространства неопределенности было введено впервые в 1983 – 1984 гг. в двух работах автора [1, 2]. В них, а также в двух других работах [3, 4] было показано следующее:

- каждому пространству неопределенности можно поставить в соответствие величину, аналогичную энтропии, введенной К. Шенноном для распределений вероятностей (эта величина была названа *энтропией пространства неопределенности*);
- энтропия пространств неопределенности удовлетворяет теореме кодирования, аналогичной одной из теорем Шеннона;
- существует подкласс пространств неопределенности, описывающих ситуации вероятностного типа (эти пространства названы *шенноновскими*);
- пространства неопределенности, не являющиеся шенноновскими, могут быть использованы для описания других типов неопределенности;
- на всех пространствах неопределенности, удовлетворяющих одному (довольно слабому) дополнительному условию, можно определить также понятия *количества информации* и *меры неопределенности* (последняя в общем случае отличается от энтропии, но тоже удовлетворяет аналогичной теореме кодирования).

Существование математической конструкции с такими свойствами позволило предположить, что можно создать новый математический аппарат, который обеспечил бы возможность оперировать ситуациями неопределенности произвольной природы аналогично тому, как сейчас принято оперировать ситуациями вероятностного типа. В связи с этим сразу возникает вопрос о требованиях, которым должен удовлетворять такой аппарат. Вот каковы *минимальные* требования: 1) аппарат должен быть применим ко всем типам неопределенности; 2) результаты применения аппарата к ситуациям неопределенности вероятностного типа должны совпадать с аналогичными результатами применения теории вероятностей или теории информации (требование *преемственности* нового аппарата).

ПРОСТРАНСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Так как понимание дальнейшего материала статьи невозможно без знакомства с понятием «пространство неопределенности», напомним здесь его определение.

Пусть задано *дискретное* (конечное или счетно-бесконечное) множество X. И пусть $\overline{\mathbf{R}}$ и $\overline{\mathbf{R}}_+$ — два числовых множества, образованных из множеств $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_+$ (всех действительных чисел и неотрицательных действительных чисел) путем добавления «бесконечного числа» $+\infty$. Рассмотрим множество $\overline{\mathbf{R}}_+^X$ всех функций, отображающих X в $\overline{\mathbf{R}}_+$. И пусть на множестве $\overline{\mathbf{R}}_+^X$ определен функционал T, который каждой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ ставит в соответствие число $\mathsf{T}(f)$ из множества $\overline{\mathbf{R}}$.

Функционал T называется **критерием свертывания** (КС) по множеству X, если он является *возрастающим*, т. е. если для любых функций $f, g \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ соотношение $f \le g$ влечет соотношение $\mathsf{T}(f) \le \mathsf{T}(g)$. Множество всех критериев свертывания по множеству X обозначается $\mathsf{T}(X)$. **Пространством неопределенности** (ПН) называется всякая пара (X, T), где X — дискретное множество (носитель ПН), а T (КС пространства) принадлежит множеству $\mathsf{T}(X)$.

Такое определение ПН не дает никакого ключа к тому, каким образом пространства неопределенности можно было бы использовать по назначению — для описания и изучения реальных ситуаций неопределенности. Действительно, в то время как пространства неопределенности представляют собой формальные математические конструкции, *ситуация неопределенности* — это содержательное понятие, к тому же довольно туманное и не имеющее в настоящее время однозначного толкования. Поэтому необходимо отдельно предусмотреть способы устанавливать связи между содержательными ситуациями и формальными пространствами. Одним из таких способов является так называемое *погружение*. Под погружением данного типа неопределенности понимается однозначное (но не обязательно взаимно) соответствие между конкретными ситуациями данного типа и пространствами неопределенности.

При построении погружений подразумевается, что все рассматриваемые ситуации неопределенности относятся к одному и тому же (дискретному) *множеству возможностей* X. Так что все ПН, ставящиеся в соответствие этим ситуациям, будут иметь один и тот же носитель X. Поэтому фактически любое погружение представляет собой функцию, которая каждой ситуации неопределенности заданного типа (на множестве X) ставит в соответствие некоторый КС из множества $\mathsf{T}(X)$. Ситуации неопределенности, являющиеся аргументами такой функции-погружения, описываются на том языке, который является общепринятым или считается удобным для данного типа неопределенности. Таким образом, области определения различных погружений различны, но все погружения рассматриваются как отображения в множество $\mathsf{T}(X)$.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ТИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В качестве первого примера мы рассмотрим погружение *вероятностного* типа неопределенности. Этот пример является очень ответственным в связи со вторым нашим требованием к аппарату неопределенности.

Ввиду предположения, что множество X дискретно, наиболее удобным способом описания одиночных ситуаций вероятностного типа обычно является указание конкретного *распределения вероятностей* (РВ), заданного на множестве X. Другими словами, для любого дискретного множества X существует взаимно однозначное соответствие между вероятностными ситуациями неопределенности на множестве X и элементами множества $\mathsf{P}(X)$ всех РВ на множестве X. Таким образом, для того чтобы для множества возможностей X построить погружение вероятностного типа неопределенности, достаточно каждому распределению вероятностей $q \in \mathsf{P}(X)$ на множестве X поставить в соответствие некоторый КС по множеству X. Иначе говоря, достаточно задать отображение множества $\mathsf{P}(X)$ в множество $\mathsf{T}(X)$.

Покажем, как построить подходящее отображение. Пусть заданы РВ $q \in \mathsf{P}(X)$ и функция $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$. Рассмотрим сумму (которая всегда существует, но может оказаться бесконечной)

$$\Sigma_q(f) \underset{df}{=} \sum_{x \in X} q(x) \odot f(x), \tag{1}$$

где $\odot$ — коммутативная ассоциативная операция, продолжающая на $\overline{\mathbf{R}}_+$ обычное умножение действительных чисел и удовлетворяющая соглашению $0 \odot \infty = \infty \odot 0 = 0$. Каждому РВ $q \in \mathsf{P}(X)$ можно поставить в соответствие функционал

$$\Sigma_q \underset{df}{=} f \mapsto \sum_{x \in X} q(x) \odot f(x) \Diamond \overline{\mathbf{R}}_+^X, \tag{2}$$

отображающий множество функций $\overline{\mathbf{R}}_+^X$ в множество чисел $\overline{\mathbf{R}}$. Функционал Σ_q каждой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ ставит в соответствие число $\Sigma_q(f)$.

Легко проверить, что функционал Σ_q является возрастающим, т.е. представляет собой критерий свертывания по множеству X. В результате для каждого распределения $q \in \mathsf{P}(X)$ мы построили ПН $\left(X, \Sigma_q\right)$, т.е. фактически уже имеем погружение вероятностного типа неопределенности в пространства неопределенности. Для заданного X оно характеризуется функцией

$$\vartheta_{Pr} \underset{df}{=} q \mapsto \Sigma_q \Diamond \mathsf{P}(X), \tag{3}$$

которая отображает множество $\mathsf{P}(X)$ в $\mathsf{T}(X)$. Причем, как показано в [5] (предложение 1), функция ϑ_{Pr} отображает $\mathsf{P}(X)$ в $\mathsf{T}(X)$ *инъективно*, т.е. построенное погружение оказалось взаимно однозначным. Все ПН вида $\left(X, \Sigma_q\right)$ (где $q \in \mathsf{P}(X)$) в [3] были названы **шенноновскими пространствами**.

БЕССТРУКТУРНЫЙ ТИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Под ситуацией неопределенности *бесструктурного* типа понимается такая ситуация, когда задано *только* множество возможностей X и больше ничего. Каждая такая ситуация полностью характеризуется своим множеством возможностей X. Таким образом, при заданном множестве X погружение бесструктурного типа в множество $\mathsf{T}(X)$ сводится к построению некоторого *конкретного* ПН, которое будет сопоставлено бесструктурной ситуации на X.

В работе [4] было принято решение бесструктурным ситуациям неопределенности дать *пессимистическую трактовку*. Такое решение означает, что в бесструктурной ситуации предлагается действовать в расчете на самую неблагоприятную возможность. Пусть на множестве возможностей X задана некоторая функция $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$, отражающая какие-то убытки. Если мы хотим ориентироваться на самую неблагоприятную возможность, то функции f нужно поставить в соответствие ее наибольшее значение, если оно существует. А в общем случае вместо наибольшего значения нужно взять верхнюю грань области значений $\operatorname{Val} f$ функции f в множестве $\overline{\mathbf{R}}$ (которая существует всегда).

Таким образом, мы пришли к заданию следующего функционала:

$$\mathrm{SUP}_X \underset{df}{=} f \mapsto \sup_{x \in X} f(x) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^X . \tag{4}$$

Легко показать, что функционал SUP_X является возрастающим и что поэтому пара (X, SUP_X) является пространством неопределенности. Это пространство мы и ставим в соответствие бесструктурной ситуации неопределенности на множестве X. Пространства неопределенности вида (X, SUP_X) будем называть (допуская вольность речи) **бесструктурными**.

ТИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ «НЕЧЕТКОЕ МНОЖЕСТВО»

После того, как было построено погружение бесструктурного типа неопределенности, естественно сразу перейти к погружению *нечетких множеств*. При этом можно воспользоваться связью между обычными множествами и нечеткими, состоящей в том, что (с точки зрения теории нечеткости) первые считаются частным случаем вторых. Ввиду этой связи ситуациям неопределенности, описываемым нечеткими множествами, в работе [4] тоже была дана пессимистическая трактовка.

Пусть по-прежнему X — (обычное) дискретное множество. В этом разделе рассматриваются нечеткие подмножества множества X. Каждое такое нечеткое подмножество характеризуется своей *функцией принадлежности*. Хотя сейчас известно много вариантов понятия «функция принадлежности», мы здесь будем придерживаться самого раннего его толкования.

Итак, здесь предполагается, что функция принадлежности любого нечеткого подмножества заданного множества X есть отображение множества X в единичный интервал $[0, 1]$ множества $\mathbf{R}_+$ (любая функция этого типа задает некоторое нечеткое подмножество множества X). Множество всех таких функций принадлежности имеет вид

$$\mathsf{M}(X) \underset{df}{=} [0,1]^X . \tag{5}$$

Таким образом, для того чтобы построить погружение типа неопределенности «нечеткое множество», достаточно каждой функции принадлежности из множества $\mathsf{M}(X)$ поставить в соответствие некоторый КС по множеству X. Иначе говоря, достаточно построить отображение множества $\mathsf{M}(X)$ в множество $\mathsf{T}(X)$.

Пусть задана некоторая функция принадлежности $\mu \in \mathsf{M}(X)$. Для каждой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ рассмотрим функцию $f_\mu \underset{df}{=} x \mapsto \mu(x) \odot f(x) \Diamond X$.

Так как имеет место $f_\mu \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$, область значений $\operatorname{Val} f_\mu$ функции f_μ имеет верхнюю грань в множестве $\overline{\mathbf{R}}$. А это значит, что можно задать следующий функционал:

$$\mathrm{SUP}_\mu \underset{df}{=} f \mapsto \sup_{x \in X} \mu(x) \odot f(x) \Diamond \overline{\mathbf{R}}_+^X . \tag{6}$$

Легко показать, что функционал SUP_μ является возрастающим и, следовательно, принадлежит множеству $\mathsf{T}(X)$. Так что пара (X, SUP_μ) представляет собой ПН. А это значит, что фактически уже построено погружение типа неопределенности «нечеткое множество» в пространства неопределенности. Для заданного X оно характеризуется функцией

$$\vartheta_{FS} \underset{df}{=} \mu \mapsto \mathrm{SUP}_\mu \Diamond \mathsf{M}(X), \tag{7}$$

которая отображает множество $\mathsf{M}(X)$ в $\mathsf{T}(X)$. Можно показать, что это погружение тоже взаимно однозначно. Все ПН вида (X, SUP_μ) будем называть **пространствами Заде**.

ПОНЯТИЕ ЭНТРОПИИ ПН

Пусть заданы ПН (X, T) и некоторая функция f из множества $\overline{\mathbf{R}}_+^X$. Результат $\mathsf{T}(f)$ применения функционала T к функции f записывается еще так:

$$\mathsf{T}(f) = \underset{x \in X}{\mathsf{T}} f(x) . \tag{8}$$

Для любого распределения вероятностей $p \in \mathsf{P}(X)$ на множестве X и числа $a > 1$ введем обозначение

$$H_a\left(p \,|\, X, \mathsf{T}\right) \underset{df}{=} \underset{x \in X}{\mathsf{T}} \log_a \frac{1}{p(x)}. \qquad (9)$$

Энтропией пространства неопределенности $\left(X, \mathsf{T}\right)$ по основанию a в работах [1, 2] было названо число

$$H_a\left(X, \mathsf{T}\right) \underset{df}{=} \inf_{p \in \mathsf{P}(X)} H_a\left(p \middle| X, \mathsf{T}\right) \qquad (10)$$

(нижняя грань берется по всем распределениям вероятностей на множестве X). В работе [6, теорема 1] было показано, что всякое пространство неопределенности обладает энтропией, т.е. нижняя грань в (10) всегда существует (но это не значит, что она всегда достигается на некотором РВ $p \in \mathsf{P}(X)$).

Такое определение понятия «энтропия» может вызвать (и вызывало!) возражение, состоящее в том, что термин *энтропия* уже занят (он был использован К. Шенноном) и что поэтому величину, введенную с помощью дефиниции (10), нужно назвать как-то иначе. Однако это возражение несправедливо, так как в работах [1, 2] было показано, что наше понятие энтропии не противоречит шенноновскому, а является его *расширением*. Кроме того, именно такое определение энтропии является существенным звеном в обеспечении той *преемственности* нового аппарата, которая подразумевается нашим вторым требованием.

ЭНТРОПИЯ ШЕННОНОВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Ввиду важности вопроса о преемственности, здесь еще раз покажем, каким образом наше определение энтропии оказалось расширением определения Шеннона. Для того чтобы ответ на этот вопрос стал очевидным, достаточно применить дефиницию (10) к шенноновскому пространству $\left(X, \Sigma_q\right)$. Действительно, согласно (10) энтропия $H\left(X, \Sigma_q\right)$ шенноновского пространства $\left(X, \Sigma_q\right)$ должна иметь вид

$$H\left(X, \Sigma_q\right) = \inf_{p \in \mathsf{P}(X)} H\left(p \middle| X, \Sigma_q\right) = \inf_{p \in \mathsf{P}(X)} \sum_{x \in X} q(x) \odot \log \frac{1}{p(x)}. \qquad (11)$$

Для расшифровки правой части (11) достаточно вспомнить известное неравенство

$$\sum_{x \in X} q(x) \odot \log \frac{1}{q(x)} \leq \sum_{x \in X} q(x) \odot \log \frac{1}{p(x)}, \qquad (12)$$

которое справедливо для любых $p, q \in \mathsf{P}(X)$.

Проиллюстрируем неравенство (12) на простом примере. Покажем наглядно, как величина $H\left(p \,|\, q\right) \underset{df}{=} H\left(p \,|\, X, \Sigma_q\right)$ зависит от двух РВ: $p, q \in \mathsf{P}(X)$.

Пусть множество X состоит из двух элементов: $X = \{1, 2\}$. Тогда каждое из РВ p и q характеризуется единственным числом: $p = (a, 1-a)$ и $q = (b, 1-b)$, где числа a и b удовлетворяют условию $0 \le a, b \le 1$. На рис. 1 показана поверхность, отражающая зависимость величины $H(p\,|\,q)$ от p и q. Хорошо видна характерная седловидная форма.

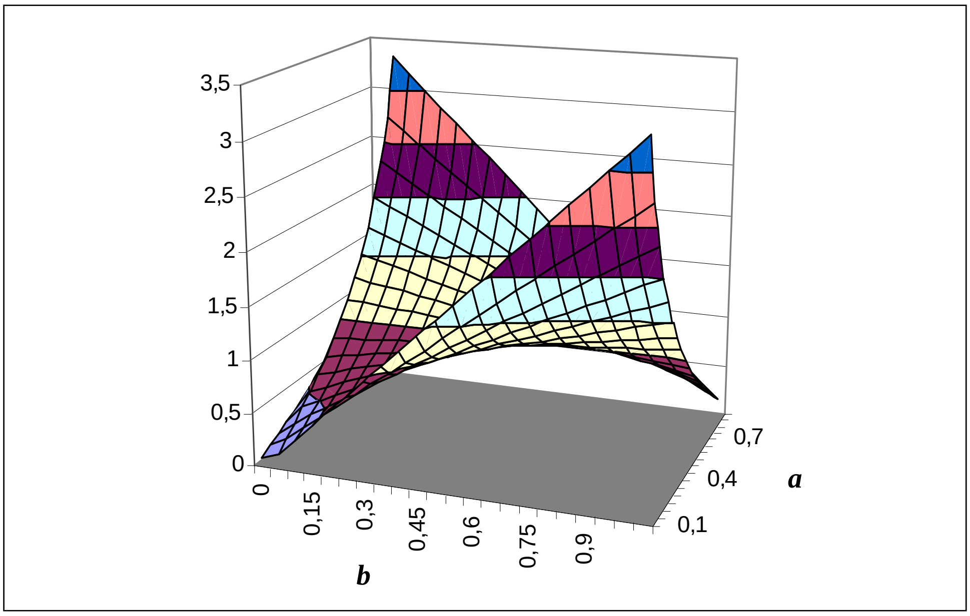

Рис. 1. Зависимость $H(p\,|\,q)$ от p и q: $p = (a, 1-a)$, $q = (b, 1-b)$

Возвращаясь к применению понятия энтропии ПН к шенноновским пространствам, из выражения (11) на основании неравенства (12) получим следующий результат:

$$H\left(X, \Sigma_q\right) = H\left(q\,|\,X, \Sigma_q\right) = \sum_{x \in X} q(x) \odot \log \frac{1}{q(x)}, \qquad (13)$$

— который означает, что энтропия $H\left(X, \Sigma_q\right)$ шенноновского пространства $\left(X, \Sigma_q\right)$ *совпадает* с энтропией $H(q)$ распределения вероятностей q, введенной К. Шенноном. Таким образом, требуемая преемственность понятия энтропии обеспечена.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КОДИРОВАНИЯ

Теперь покажем, что упомянутая преемственность обеспечена еще в одном смысле, а именно, что энтропия ПН удовлетворяет теореме кодирования, которая в применении к шенноновским пространствам совпадает с одной из известных теорем кодирования Шеннона. Приведем здесь упрощенную формулировку основной теоремы кодирования (полный вариант этой теоремы опубликован в [6]).

Пусть задан некоторый (конечный) алфавит L. Множество всех (конечных) слов в алфавите L обозначается L^*. *Кодом* для множества X над алфавитом L называется всякая функция γ, инъективно (взаимно однозначно) отображающая множество X в множество L^*. Множество всех кодов для множества X над алфавитом L обозначим $\Gamma(X,L)$. Если γ — код из $\Gamma(X,L)$, а x — элемент множества X, то элемент $\gamma(x)$ множества L^* называется *кодовым словом* для x при коде γ.

Решение типичной задачи кодирования начинается с того, что в множестве $\Gamma(X,L)$ всех кодов выделяется некоторое подмножество *допустимых* кодов. Однако чаще всего на роль допустимых выбираются *дешифруемые* или *префиксные* коды [2, 6, 7] (префиксные коды являются частным случаем дешифруемых). Это объясняется тем, что те и другие обладают следующим свойством *полной самостоятельности*. Если с помощью любого кода из $\Gamma(X,L)$ закодировать произвольную конечную последовательность элементов множества X, то в результате получится *последовательность букв* из алфавита L. Дешифруемые коды (в отличие от всех остальных) позволяют по этой последовательности букв однозначно восстановить исходную последовательность элементов множества X (и для этого не требуется никаких дополнительных разделителей или знаков препинания). Дешифруемые коды не содержат пустых кодовых слов.

Для кода $\gamma \in \Gamma(X,L)$ и элемента $x \in X$ длина кодового слова $\gamma(x)$ (общее число букв) обозначается $\chi_\gamma(x)$. Для формулировки теоремы кодирования потребуются следующие две числовые функции: $\chi_\gamma \underset{df}{=} x \mapsto \chi_\gamma(x) \lozenge X$ и $\chi_\gamma - 1 \underset{df}{=} x \mapsto \chi_\gamma(x) - 1 \lozenge X$. Функция χ_γ (*калибровочная функция* кода γ), очевидно, не принимает отрицательных значений. Если же код γ является дешифруемым, то и функция $\chi_\gamma - 1$ тоже не принимает отрицательных значений. Так что в этом случае, если задано некоторое ПН (X,T), то обе функции χ_γ и $\chi_\gamma - 1$ относятся к области определения критерия T. Теперь до формулировки теоремы кодирования осталось напомнить еще одно понятие. ПН (X,T) называется *собственным* по основанию $a > 1$ [3, 6], если в выражении (10) нижняя грань достигается на некотором распределении p из $\mathsf{P}(X)$.

Теорема 1. Пусть заданы ПН (X,T) и алфавит L. Тогда:

1) для каждого дешифруемого кода $\gamma \in \Gamma(X,L)$ имеет место неравенство

$$\mathsf{T}(\chi_\gamma) \geq H_{|L|}(X,\mathsf{T}) \tag{14}$$

(где $H_{|L|}(X,\mathsf{T})$ — энтропия пространства (X,T) по основанию $|L|$, а $|L|$ — мощность алфавита L);

2) если пространство (X,T) является собственным (по основанию $|L|$), то существует префиксный код $\gamma \in \Gamma(X,L)$, удовлетворяющий неравенству

$$\mathsf{T}(\chi_\gamma - 1) \leq H_{|L|}(X,\mathsf{T}). \blacksquare \tag{15}$$

ЭНТРОПИЯ ПРОСТРАНСТВ ЗАДЕ

Теорема 1 показывает, что энтропия ПН — серьезное понятие. Поэтому интересно рассмотреть, как вычисляется энтропия для нашего третьего примера формализованных типов неопределенности — для пространств Заде.

Пусть задана функция принадлежности $\mu \in \mathsf{M}(X)$ некоторого нечеткого подмножества множества X. Применив к пространству Заде $\left(X,\, \mathrm{SUP}_\mu\right)$ общее определение энтропии, получим

$$H\left(X,\, \mathrm{SUP}_\mu\right) = \inf_{p \in \mathsf{P}(X)} \sup_{x \in X} \mu(x) \odot \log \frac{1}{p(x)}\,. \tag{16}$$

Это выражение не годится для непосредственного вычисления энтропии, поэтому придется специально искать способ ее вычисления. Рассмотрим следующее равенство:

$$\sum_{x \in X} y^{-\frac{1}{\mu(x)}} = 1\,. \tag{17}$$

Если множество X конечно (а функция μ принимает хотя бы одно ненулевое значение), то равенство (17) (рассматриваемое как уравнение) имеет единственное решение по букве *y*. Если же множество X бесконечно, то существование решения будет зависеть от вида функции μ. Например, если функция μ постоянна и принимает значения 1 во всех точках X, то (при бесконечном X) решение не существует.

Энтропия пространства Заде вида $\left(X,\, \mathrm{SUP}_\mu\right)$ будет конечной тогда и только тогда, когда решение уравнения (17) существует (в этом случае оно единственно). Это решение (если оно существует) будем обозначать d_μ (в этом случае выполняются условия $1 \le d_\mu < \infty$). Подставив решение d_μ в (17), получим равенство

$$\sum_{x \in X} d_\mu^{-\frac{1}{\mu(x)}} = 1\,, \tag{18}$$

из которого следует, что функция

$$p_\mu \underset{df}{=} x \mapsto d_\mu^{-\frac{1}{\mu(x)}} \lozenge X \tag{19}$$

представляет собой распределение вероятностей на множестве X.

Можно показать, что нижняя грань в выражении (17) достигается на распределении p_μ, т.е. что

$$H\left(X,\, \mathrm{SUP}_\mu\right) = H\left(p_\mu \middle| X,\, \mathrm{SUP}_\mu\right) = \sup_{x \in X} \mu(x) \odot \log \frac{1}{p_\mu(x)} = \log d_\mu\,, \tag{20}$$

причем p_μ — единственное РВ, на котором достигается эта нижняя грань [4].

Таким образом, очевидно, что способы вычисления энтропии для пространств Заде и пространств Шеннона совершенно непохожи. В связи с этим было бы интересно как-то сравнить поведение энтропии тех и других пространств.

ВОЗМОЖНО ЛИ СРАВНЕНИЕ?

Вопрос фактически сводится к тому, можно ли найти для пространств Шеннона и Заде некий общий *масштаб*, в котором сравнение их энтропии оказалось бы осмысленным. Здесь понадобится одно новое понятие. Пусть задано ПН (X, T) и некоторая *постоянная* функция $x \mapsto r \Diamond X$, где $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$. Введем обозначение

$$\mathsf{T}\langle r\rangle \underset{df}{=} \underset{x\in X}{\mathsf{T}} r = \mathsf{T}(x \mapsto r \Diamond X). \tag{21}$$

Будем говорить, что КС T **сохраняет число** $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$, если имеет место равенство $\mathsf{T}\langle r\rangle = r$. ПН (X, T) будем называть **равномерным**, если КС T сохраняет все числа из $\overline{\mathbf{R}}_+$.

Легко заметить, что все шенноновские ПН являются равномерными. Но нельзя то же самое сказать о пространствах Заде: для того чтобы ПН (X, SUP_μ) было равномерным, необходимо и достаточно, чтобы функция принадлежности μ хотя бы в одной точке принимала значение 1. Если мы хотим энтропию шенноновского пространства (X, Σ_q) сравнить с энтропией некоторого пространства Заде, то, вероятно, нужно взять для этого равномерное пространство Заде. Существует очень простое преобразование, которое каждому РВ $q \in \mathsf{P}(X)$ на множестве X ставит в соответствие такую функцию принадлежности $\mu = \beta_q$ нечеткого подмножества множества X, что соответствующее пространство Заде $(X, \mathrm{SUP}_{\beta_q})$ равномерно:

$$\beta_q \underset{df}{=} x \mapsto q(x)/\widehat{q} \Diamond X, \tag{22}$$

где $\widehat{q}$ — максимальное значение функции q (оно всегда существует). Таким образом, мы будем сравнивать энтропию двух ПН (X, Σ_q) и $(X, \mathrm{SUP}_{\beta_q})$.

Предложение 1. Пусть заданы: действительное число $a > 1$ и РВ $q \in \mathsf{P}(X)$. Тогда имеет место неравенство

$$H_a(X, \mathrm{SUP}_{\beta_q}) \le H_a(X, \Sigma_q). \blacksquare \tag{23}$$

Доказательство этого предложения опубликовано в [8, часть II, теорема 3]. А здесь мы проиллюстрируем неравенство (23) на простом примере. Пусть снова множество X состоит из двух элементов: $X = \{1, 2\}$. Тогда РВ q характеризуется единственным числом b: $q = (b, 1-b)$. Соответствующая же ему функция принадлежности $\mu = \beta_q$ (22) тоже характеризуется единственным числом: $\mu = (1, m)$. Причем, число m, ввиду дефиниции (22), определяется из условия

$$m = \frac{\min\{b, 1-b\}}{\max\{b, 1-b\}}.$$

На рис. 2 показаны три кривые, отражающие зависимость от b следующих величин: 1) энтропии $H(Sh) = H\left(X, \Sigma_q\right)$ шенноновского пространства $\left(X, \Sigma_q\right)$; 2) числа m; 3) энтропии $H(Z) = H\left(X, \mathrm{SUP}_\mu\right)$ пространства Заде $\left(X, \mathrm{SUP}_\mu\right)$ (где $\mu = (1, m)$).

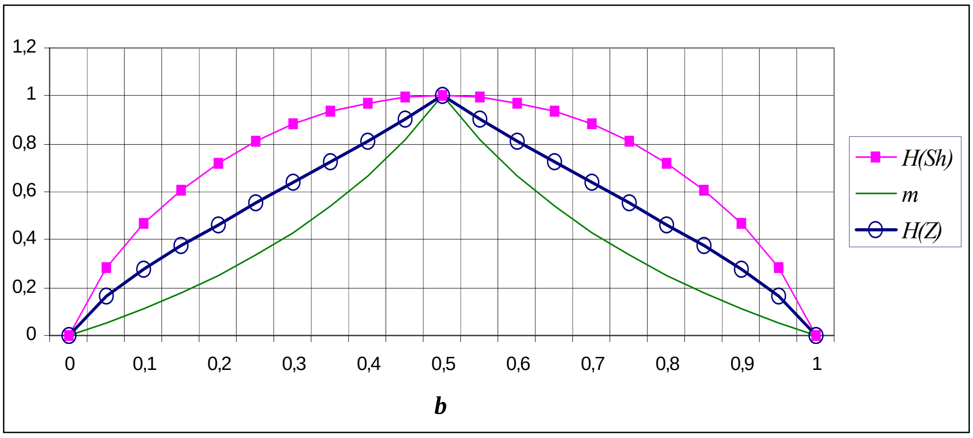

Рис. 2. Сравнение энтропии $H(Sh)$ ПН Шеннона для РВ $q = (b, 1-b)$ с энтропией $H(Z)$ пространства Заде для функции принадлежности $\mu = (1, m)$

ПРОСТРАНСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ КАК РОД МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Следующая (и последняя) тема настоящей статьи — понятие *изоморфизма* пространств неопределенности (это понятие является основой дальнейшего развития математического аппарата). При рассмотрении этой темы нам придется опереться на *теорию математических структур* Н. Бурбаки [9] (гл. IV), так как Бурбаки впервые предложил самое общее определение понятие изоморфизма, применимое ко всем математическим теориям.

Фактически задача сводится к тому, чтобы просто применить теорию структур. Однако ввиду очень специфического характера изложения этой теории, мы даем перевод необходимых здесь понятий теории структур на доступный язык и объясняем все свои действия. Согласно теории структур понятие изоморфизма может быть *выведено*, если задан конкретный *род математических структур* (РМС). Таким образом, наша первая задача состоит в построении РМС, соответствующего понятию «пространство неопределенности». В пространствах неопределенности вида (X, S) математической структурой, заданной на множестве X, является критерий свертывания S. Поэтому интересующий нас род структур был назван родом «критерии свертывания» или более кратко — *родом КС*.

Согласно [9, гл. IV, § 1, п. 4 и Сводка результатов, § 8] для построения произвольного рода математических структур необходимо задать два объекта: *универсум* данного рода и его *родовой признак* (отметим, что терминов *универсум* и *родовой признак* у Бурбаки нет, но они удобны для более доступного, чем у Бурбаки, изложения теории структур). Универсум — это множество, содержащее все математические структуры данного рода (а также и некоторые структуры, не принадлежащие этому роду). Назначение родового признака состоит в том, чтобы отличать структуры данного рода от остальных структур, принадлежащих тому же универсуму.

Построение универсума опирается на понятие *шкалы множеств*, которая по терминологии Х. Карри [10, гл. 2, п. А.5] представляет собой пример *индуктивного класса*, порождаемого из фиксированного набора заранее заданных объектов, называемого *базисом*, по некоторым фиксированным *правилам порождения*. Базис каждой шкалы множеств представляет собой набор из одного или нескольких множеств. Правил же порождения при построении шкалы множеств всегда два: 1) образование *булеана* (множества всех подмножеств) от одного из ранее построенных множеств и 2) образование *произведения* одного из ранее построенных множеств на другое (в частном случае оба сомножителя могут совпадать). Любое множество, принадлежащее данной шкале множеств (т.е. построенное по указанным правилам) называется **ступенью** этой шкалы.

Множества, составляющие базис каждой шкалы множеств, должны быть разделены на две группы: *основные* множества и *вспомогательные*. При этом хотя бы одно из множеств базиса должно быть названо основным, в то время как вспомогательных множеств может не быть вообще. Здесь сразу сделаем одно допущение, которое приведет к отказу от максимальной степени общности в объяснении основных понятий теории структур: будем рассматривать только такие случаи, когда базис шкалы множеств содержит *одно основное множество* (и любое количество вспомогательных множеств).

Универсум строящегося рода структур при основном базисном множестве X будем обозначать $\mathsf{E} ¦ X ¦$, где $¦\,¦$ — специальные скобки для подстановок, которыми Бурбаки широко пользуется в [9] (объяснения даются в гл. I, § 1, п. 1). Использование таких скобок позволяет легко перейти к аналогичной шкале множеств, которая отличается от исходной только основным базисным множеством (все вспомогательные базисные множества остаются теми же).

Для рода КС шкала множеств строится на базисе, состоящем из трех множеств: *основное* множество X и два вспомогательных множества $\overline{\mathbf{R}}$ и $\overline{\mathbf{R}}_+$. Найдем универсум для рода КС. Если задано ПН (X, S), то функционал S отображает множество $\overline{\mathbf{R}}_+^X$ в множество $\overline{\mathbf{R}}$. Следовательно, выполняется соотношение

$$\mathsf{S} \in \mathsf{F} ¦ X ¦ \underset{df}{=} \overline{\mathbf{R}}^{\left(\overline{\mathbf{R}}_+^X\right)}. \tag{24}$$

Легко понять, что множество $\mathsf{F}\,\text{¦}\,X\,\text{¦}$ *не является* ступенью никакой шкалы множеств. Но в нашей шкале множеств (с базисом $\{X, \overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}}_+\}$) существует *единственная* ступень $\mathsf{E}\,\text{¦}\,X\,\text{¦}$, такая, что выполнится включение $\mathsf{F}\,\text{¦}\,X\,\text{¦} \subset \mathsf{E}\,\text{¦}\,X\,\text{¦}$. Эта ступень $\mathsf{E}\,\text{¦}\,X\,\text{¦}$ и будет нашим универсумом. Легко показать, что универсум для рода КС имеет вид

$$\mathsf{E}\,\text{¦}\,X\,\text{¦} = \mathsf{B}\left(\mathsf{B}(X \times \overline{\mathbf{R}}_+) \times \overline{\mathbf{R}}\right), \qquad (25)$$

где $\mathsf{B}(Z)$ — булеан (множество всех подмножеств) множества Z.

Для завершения формального построения рода КС осталось задать родовой признак, который выражается в виде *аксиомы* данного рода структур [9, гл. IV, § 1, п. 4]. Аксиома обычно представляет собой конъюнкцию нескольких требований, предъявляемых к основному множеству X и к родовой структуре S. (К самой аксиоме тоже предъявляется некое требование: она должна быть *переносимым соотношением*, но этот вопрос мы здесь затрагивать не будем.) Фактически все требования, составляющие аксиому рода КС, содержатся в определении понятия «пространство неопределенности». Они таковы: 1) множество X дискретно; 2) структура S является функционалом, отображающим $\overline{\mathbf{R}}_+^X$ в $\overline{\mathbf{R}}$; 3) функционал S является возрастающим, т.е. для любых двух функций $f, g \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ соотношение $f \le g$ влечет соотношение $\mathsf{S}(f) \le \mathsf{S}(g)$.

ИЗОМОРФИЗМ ПРОСТРАНСТВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Теперь, когда род структур КС построен, наша задача состоит в том, чтобы вывести понятие изоморфизма, соответствующее роду КС. Для этого используется аппарат *распространения функций*. Если на основном базисном множестве X задана некоторая функция φ, то ее можно распространить на любую ступень шкалы множеств, в том числе и на универсум данного рода структур (при этом подразумевается, что на каждом из вспомогательных базисных множеств тоже задано по одной функции: это тождественное отображение данного множества на себя). Для распространения функций используются следующие два правила.

1. Пусть на некотором множестве U задана функция f. Способ распространения этой функции на булеан $\mathsf{B}(U)$ характеризуется следующим выражением:

$$\overline{f} \underset{df}{=} W \mapsto \{f(u) : u \in W\} \Diamond \mathsf{B}(U), \qquad (26)$$

где $\overline{f}$ — функция, определенная уже на булеане $\mathsf{B}(U)$ [9, гл. II, § 5, п. 1].

2. Пусть теперь, кроме того, на некотором множестве V определена функция g. Тогда из функций f и g получаем следующую функцию, определенную на произведении $U \times V$:

$$\langle f,g\rangle \underset{df}{=} (u,v)\mapsto \big(f(u),g(v)\big)\lozenge U\times V \tag{27}$$

(значением $\langle f,g\rangle(u,v)$ функции $\langle f,g\rangle$ является пара $\big(f(u),g(v)\big)$, там же, § 3, п. 9).

Применяя эти два правила по мере надобности, можно распространить любую функцию, заданную на основном базисном множестве (совместно с тождественными отображениями вспомогательных множеств), на любую ступень шкалы. Результат распространения определенной на X функции φ на универсум $\mathsf{E}\,\vdots\, X\,\vdots$ обозначается $\widehat{\varphi}$. Если обозначить тождественные отображения вспомогательных множеств $\overline{\mathbf{R}}$ и $\overline{\mathbf{R}}_+$ на себя соответственно через i и i_+, то из соотношения (25) можно получить следующую схему построения функции $\widehat{\varphi}$ для рода КС:

$$\widehat{\varphi}=\overline{\langle\overline{\langle\varphi,\, i_+\rangle},\, i\rangle}\,.$$

Ниже приводится формулировка теоремы, касающейся распространения функций на универсум. Затем мы даем определение изоморфизма для ПН, которое является частным случаем общего определения изоморфизма Н. Бурбаки. И дальше приводятся еще одна теорема и ее следствие (последнее содержит необходимые и достаточные условия изоморфизма ПН).

Теорема 2. Пусть X и Y — равномощные множества и φ — биекция X на Y. Тогда функция $\widehat{\varphi}$ является биекцией универсума $\mathsf{E}\,\vdots\, X\,\vdots$ на универсум $\mathsf{E}\,\vdots\, Y\vdots$. ■

Определение 1. Пусть (X,S) и (Y,T) — два ПН, причем множества X и Y равномощны. Биекция φ множества X на множество Y называется **изоморфизмом** пространства (X,S) на пространство (Y,T), если $\widehat{\varphi}(\mathsf{S})=\mathsf{T}$. Пространства (X,S) и (Y,T) называются **изоморфными**, если существует изоморфизм одного из них на другое. ■

Теорема 3. Пусть (X,S) и (Y,T) — два ПН, причем множества X и Y равномощны. И пусть φ — биекция X на Y. Тогда:

1) применение функции $\widehat{\varphi}$ к критерию S дает КС из $\mathsf{T}(Y)$ вида

$$\widehat{\varphi}(\mathsf{S})=g\mapsto \mathsf{S}(g\circ\varphi)\lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^{Y}; \tag{28}$$

2) применение обратной функции $\widehat{\varphi}^{-1}$ к критерию T дает КС из $\mathsf{T}(X)$ вида

$$\widehat{\varphi}^{-1}(\mathsf{T})=f\mapsto \mathsf{T}(f\circ\varphi^{-1})\lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^{X}. \;■ \tag{29}$$

Следствие 1. Пусть (X,S) и (Y,T) — два ПН с равномощными носителями X и Y. Для того, чтобы биекция φ множества X на множество Y была изоморфизмом ПН (X,S) на ПН (Y,T), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:

1) для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ имеет место

$$\mathsf{S}(g \circ \varphi) = \mathsf{T}(g)\,; \qquad (30)$$

2) для любой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ имеет место

$$\mathsf{S}(f) = \mathsf{T}(f \circ \varphi^{-1})\,. \blacksquare \qquad (31)$$

Из следствия 1 ясно, что, например, шенноновское пространство может быть изоморфно только другому шенноновскому пространству (но не может быть изоморфно пространству Заде). Пусть заданы два дискретных равномощных множества X и Y и два РВ $p \in \mathsf{P}(X)$ и $q \in \mathsf{P}(Y)$. Это значит, что мы получили два шенноновских пространства $\left(X, \sum_{p}\right)$ и $\left(Y, \sum_{q}\right)$. И пусть φ — биекция X на Y. Ввиду следствия 1, функция φ тогда и только тогда является изоморфизмом $\left(X, \sum_{p}\right)$ на $\left(Y, \sum_{q}\right)$, когда для каждой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$ имеет место

$$\sum_{x \in X} p(x) \odot f(x) = \sum_{y \in Y} q(y) \odot (f \circ \varphi^{-1})(y)\,. \qquad (32)$$

Можно показать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы распределение q имело следующий вид:

$$q = y \mapsto (p \circ \varphi^{-1})(y) \lozenge Y\,. \qquad (33)$$

ПОНЯТИЕ ОДНОРОДНОГО ПН

Определенный самостоятельный интерес представляют такие ПН, все точки которых “равноправны”. Такие пространства естественно было бы назвать *однородными*. Для пространств Шеннона или Заде более или менее понятно, что значит “равноправие” точек. Например, для ПН Заде $\left(X, \mathrm{SUP}_{\mu}\right)$ это должно означать, что функция принадлежности μ должна принимать одно и то же значение во всех точках множества X. Но в общем случае для определения однородных ПН нужно привлечь понятие *автоморфизма* (частный случай изоморфизма). Биекция φ множества X на себя называется **автоморфизмом** пространства (X, S), если она есть изоморфизм пространства (X, S) на себя.

Определение 2. ПН (X, S) будем называть **однородным**, если каждая биекция φ множества X на себя является автоморфизмом пространства (X, S). $\blacksquare$

Пусть X — конечное множество. Тогда шенноновское пространство $\left(X, \sum_{p}\right)$ будет однородным, если p — *равномерное* РВ. Пространство Заде $\left(X, \mathrm{SUP}_{\mu}\right)$ будет однородным и притом равномерным, если функция μ во всех точках множества X принимает значение 1, т.е. если оно совпадает с бесструктурным пространством (X, SUP_X). Заметим, что энтропия обоих пространств равна

$$H\left(X, \Sigma_{\mathrm{eq}_X}\right) = H\left(X, \mathrm{SUP}_X\right) = \log|X|, \tag{34}$$

где eq_X — равномерное РВ на X. Заметим также, что многие другие (но не все) однородные равномерные ПН будут иметь такую же энтропию. Однако свойства этих пространств (в частности, реакция на различные преобразования) могут сильно различаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дидук Н.Н.* Энтропия дискретных пространств неопределенности // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1983. — № 1. — С. 63–65.
2. *Дидук Н.Н.* Пространства неопределенности. Энтропия и теорема кодирования // Кибернетика. — 1984. — № 2. — С. 69–73.
3. *Дидук Н.Н.* Информационные пространства. Понятия собственной информации и неопределенности // Там же. — 1986. — № 4. — С. 74–80.
4. *Дидук Н.Н.* Нечеткость с точки зрения теории информации // Там же. — 1987. — № 2. — С. 80–86.
5. *Дидук Н.Н.* Примеры вероятностной семантики основной теоремы кодирования для пространств неопределенности // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 4. — С. 129–140.
6. *Дидук Н.Н.* Свойства дискретных пространств неопределенности. Уточнение основной теоремы кодирования // Там же. — 1994. — № 1. — С. 14–24.
7. *Дидук Н.Н.* Экономное префиксное кодирование пространств неопределенности // Там же. — 1994. — № 5. — С. 168–178.
8. *Дидук Н.Н.* Теоретико-информационное сравнение нечеткости с вероятностной неопределенностью. I, II // Кибернетика. — 1988. — № 1. — С. 84–90; — № 2. — С. 78–83.
9. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 456 с.
10. *Карри Х.* Основания математической логики. — М.: Мир, 1969. — 568 с.

Поступила 18.07.2002