УДК 518.9

МЕТОДИ ВИЛУЧЕННЯ НЕВІДОМИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАЦІЙ ПРОЕКТУВАННЯ

В.В. ОСТАПЕНКО, Г.С. ФІНІН

В статті досліджується зв'язок між операцією проектування та методами вилучення невідомих. Окремо розглядаються метод послідовного вилучення однієї невідомої, а також метод вилучення групи невідомих. Значну увагу приділяється методам вилучення невідомих із систем нерівностей, що описуються нерівностями, які мають структуру графу.

В роботах [1–4] наведені і обгрунтовані методи вилучення невідомих при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних нерівностей. В [1] досліджено метод послідовного вилучення одної невідомої, в [2–4] — метод вилучення групи невідомих. Розроблені у цих роботах методи використовувались для визначення невідомих течій у сітках із узагальненим законом Кірхгофа. В даній роботі запропонована загальна схема вилучення невідомих на основі операторів проектування.

1. **Схема вилучення невідомих**. Нехай E^n — n-вимірний евклідів простір, множина $M \subset E^n$. Розглянемо задачу : знайти точку $x^* \in M$. Для розв'язання цієї задачі скористаємося методом вилучення невідомих.

Позначимо одиничні орти через $e_i = (0,...,0,\underset{i}{1},0,...,0)$, $i = 1,...,n$. Нехай $E^s(e_{i_1},...,e_{i_s})$ — підпростір у E^n, який натягнутий на вектори $e_{i_1},...,e_{i_s}$ $\pi_{x_{i_1},...,x_{i_s}}$ — оператор ортогонального проектування на підпростір $E^s(e_{i_1},...,e_{i_s})$. Припустимо, що вектори $e_{i_1},...,e_{i_s}$, $e_{j_1},...,e_{j_k}$, $s+k=n$ складають базис простору E^n, тобто змінні $x_{i_1},...,x_{i_s}$, $x_{j_1},...,x_{j_k}$ складають множину всіх змінних $x_1,...,x_n$.

В зроблених позначеннях операція вилучення групи невідомих $x_{j_1},...,x_{j_k}$ еквівалентна операції ортогонального проектування $\pi_{x_{i_1},...,x_{i_s}}$ множини M на підпростір $E^s(e_{i_1},...,e_{i_s})$. Щоб це підкреслити, покладемо $\pi(\bar{x}_{j_1},...,\bar{x}_{j_k}) \equiv$ $\equiv \pi_{x_{i_1},...,x_{i_s}}$.

Наприклад, вилучення одної невідомої x_1 еквівалентно застосуванню оператора $\pi(\bar{x}_1) \equiv \pi_{x_2,...,x_n}$.

Нехай $x^*_{i_1},...,x^*_{i_n}$ — фіксовані значення відповідних координат вектора $x \in E^n$.

Позначимо

$$L(x_{i_1}^*,...,x_{i_n}^*) = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \in E^n : \; x_{i_1} = x_{i_1}^*,...,x_{i_s} = x_{i_s}^* \right\}.$$

Опишемо схему послідовного вилучення однієї невідомої. Будемо послідовно вилучати невідомі $x_1,...,x_n$. Прямий хід методу вилучення невідомих полягає у наступному. Послідовно знаходимо множини $\pi(\bar{x}_1)M$, $\pi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_2)M,..., \pi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_k)M,..., \pi(\bar{x}_1,\bar{x}_{n-1})M$. Остання множина додається до підпростору $E^1(e_n)$ який має вимірність 1 і задає обмеження тільки на змінну x_n.

Опишемо зворотній хід методу вилучення невідомих. Визначаємо точку $x_n^* \in \pi(\bar{x}_1,..., \bar{x}_{n-1})M$. Множина $\pi(\bar{x}_1,..., \bar{x}_{n-2})M \cap L(x_n^*)$ має вимірність 1 і задає обмеження тільки на змінну x_{n-1}. Визначаємо точку $x_{n-1}^* \in \pi(\bar{x}_1,..., \bar{x}_{n-2})M \cap L(x_n^*)$. Якщо відомі значення $x_{k+1}^*,..., x_n^*$, то значення x_k^* знаходиться із одновимірної множини $\pi(\bar{x}_1,..., \bar{x}_{k-1})M \cap$ $\cap L(x_{k+1}^*,..., x_n^*)$.

Продовжуючи такий процес, знаходимо точку $x^* = (x_1^*,..., x_n^*) \in M$.

Зазначимо, що у випадку, коли M — опукла замкнена множина, то для будь-якого k множина $\pi(\bar{x}_1,..., \bar{x}_{k-1})M \cap L(x_{k+1}^*,..., x_n^*)$ є або всією дійсною віссю, де змінюється x_k, або піввіссю, або проміжком.

Аналогічно описується схема послідовного вилучення групи невідомих. Припустимо, що послідовно вилучаються наступні групи:

$$x_1,...,x_{n_1}; \;\; x_{n_1+1},...,x_{n_2};...; x_{n_{s-1}+1},...,x_{n_s} = x_n .$$

Прямий хід полягає у послідовному визначенні множин

$$\pi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{n_1})M, \;\; \pi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{n_2})M,..., \pi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{n_{s-1}})M$$

Множина $\pi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{n_{s-1}})M$ включається до підпростору $E(e_{n_{s-1}+1},..., e_n)$, який має вимірність $n - n_{s-1}$ і задає обмеження на змінні $x_{n_{s-1}+1}^*,...,x_n^*$.

Зворотний хід полягає у наступному. Визначаємо точку $(x_{n_{s-1}+1}^*,...,x_n^*) \in$ $\in \pi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{n_{s-1}})M$. Множина $\pi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{n_{s-2}})M \cap L(x_{n_{s-1}+1}^*,...,x_n^*)$ визначає обмеження на невідомі $x_{n_{s-2}+1},...,x_{n_{s-1}}$. У цій множині знаходимо точку $(x_{n_{s-2}+1}^*,...,x_{n_{s-1}}^*)$ і продовжуємо процес далі. В результаті одержуємо точку $x^* = (x_1^*,...,x_n^*) \in M$.

Процес вилучення групи невідомих можна звести до послідовного вилучення однієї невідомої. Але, як показано у роботах [2–4], метод вилучення групи невідомих у ряді випадків більш ефективний, ніж метод послідовного вилучення одної невідомої.

2. Обмеження у вигляді многогранників. Припустимо, що M — опуклий многогранник. За визначенням, многогранник — опукла оболонка скінченного числа точок. Відомо (див., наприклад [5]), що многогранник можна зобразити у вигляді скінченної системи лінійних нерівностей. Таке зображення, як правило, виникає в процесі побудови лінійних моделей.

Розглянемо вектори $a = (a_1, ..., a_n) \in E^n$, $x = (x_1, ..., x_n) \in E^n$. Позначимо через $\langle a, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ скалярний добуток векторів a та x.

Нехай $a^i = (a_1^i, ..., a_n^i)$, $i = 1, ..., m$ — набір сталих векторів; b_i, $i = 1, ..., m$ — деякі числа. Припускаємо, що многогранник M задається у вигляді системи нерівностей

$$\langle a^i, x \rangle \le b_i, \quad i = 1, ..., m. \tag{1}$$

Для опису множин $\pi(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k)M$ зручно представити множину M не у вигляді (1), а за допомогою крайніх точок (вершин).

Відомо [5], що x^0 є крайньою точкою множини M, заданої у вигляді (1), тоді і тільки тоді, коли множина $I(x^0) = \{i : \langle a^i, x^0 \rangle = b_i\}$ містить підмножину I_0, що має потужність n, і вектори a^i, $i \in I_0$ лінійно незалежні. Із цього випливає, що можна визначити всі крайні точки множини M. Для цього треба розв'язати ряд невироджених систем лінійних рівнянь.

Недоліком даного підходу є необхідність великої кількості переборів таких систем рівнянь.

Нехай $x^1, \ldots, x^p$ — знайдені крайні точки множини M. Тоді $M = \mathrm{co}\{x^1, ..., x^p\}$ (co — опукла оболонка множини). Очевидно, що

$$\pi(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k)M = \mathrm{co}\{\pi(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k)x^1, ..., \pi(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k)x^p\}$$

Здійснення операції проектування одної точки $\pi(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k)x^i$, $i = 1, ..., p$ досить тривіально.

Для здійснення зворотного ходу методу необхідно будувати множини вигляду

$$\pi(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{k-1})M \cap L(x_{k+1}^*, ..., x_n^*).$$

При цьому зручно многогранник $\pi(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{k-1})M$ задавати системою нерівностей.

Нехай $x^1,...,x^q \subset R^n$ — деякий набір точок, $N = \text{co}\left\{x^1,...,x^q\right\}$ — многогранник. Використовуючи викладений в [5] апарат, по точках $x^1,...,x^q$ можна побудувати скінченну систему нерівностей, яка описує множину *N*.

Позначимо опорну функцію $W_N(x^*) = \sup\limits_{x \in N}\left\langle x, x^*\right\rangle = \max\limits_{1 \le x^i \le q}\left\langle x^i, x^*\right\rangle$.

Для кожного x^* визначимо $I(x^*) = \left\{i : \left\langle x^i, x^*\right\rangle = W_N(x^*),\ \ i = 1,...,q\right\}$.

Гіперплощина $\left\langle x, x^*\right\rangle = W_N(x^*)$ називається опорою. Якщо $j \in I(x^*)$ і серед векторів $x^i - x^j$, $i \in I(x^*)$ є $n-1$ лінійно незалежних, то опора називається крайньою.

Кожну крайню опору описує вектор x^* і число $W_N(x^*)$. Кількість різних опор скінченна. Дійсно, розглянемо різні набори по *n* векторів x^i $i = 1,...,q$. Нехай x^i, $i \in I$, $|I| = n$ — такий набір. Зафіксуємо $j \in J$ та перевіримо чи будуть вектори $y^i = x^i - x^j$, $i \in I$, $i \ne j$ лінійно незалежними. Якщо ні, то розглядаємо наступний набір векторів. Якщо так, то відшукуємо ортогональний векторам y^i, $i \in I \setminus \{j\}$ вектор x^*, тобто $\left\langle x^*, y^i\right\rangle = 0$, $i \in I \setminus \{j\}$. Розв'язок цієї системи є одновимірним простором. Для побудови шуканої системи нерівностей досить розглянути тільки вектори x^* одиничної довжини. Таких векторів буде два : x_+^*, x_-^*, $x_-^* = -x_+^*$. Знаходимо $b^{\pm} = \max\limits_{1 \le x^i \le q}\left\langle x^i, x_{\pm}^*\right\rangle = W_N(x_{\pm}^*)$.

В результаті одержуємо, що до опису множини *N* повинні входити нерівності — $b^- \le \left\langle x, x_+^*\right\rangle \le b^+$. Таких нерівностей буде скінченна кількість.

Описаний метод вимагає істотного перебору. Крім того, одержана система нерівностей може містити велику кількість нерівностей, які випливають з інших нерівностей.

3. Вилучення невідомих із систем нерівностей. Скінченна система нерівностей у загальному випадку описує многогранну множину і многогранник, якщо ця множина обмежена.

Питання послідовного вилучення невідомих розглянуто у роботі [1]. Основним ускладненням, що виникає при вилученні невідомої є те, що нова система може мати більше нерівностей, ніж вихідна. В роботах [2–4] викладено метод вилучення групи невідомих із систем лінійних нерівностей. Показано, що у ряді випадків цей метод більш ефективний ніж метод послідовного вилучення невідомих.

4. Методи вилучення течій у сітках із узагальненим законом Кірхгофа. Розглянемо зв'язний граф $G = \{V, E\}$, де *V* — множина вершин; *E* — множина ребер графа *G*. З кожним ребром $e = (i, j)$ зіставимо невідому величину $x_{ij} = x_{ji}$, $(i, j) \in E$.

Нехай $x = \{x_{ij}, \ \ (i,j) \in E\}$ — вектор течій, що течуть по усіх ребрах $(i,j) \in E$, для яких $x_{ij} = x_{ji}$. Множина X є векторним простором вимірності $\dim \ X = |E|$. Позначимо $N(i) = \{j : (i,j) \in E\}$ окіл вершини. Для кожної вершини $i \in V$ розглянемо вектори течій, що збігаються до цієї вершини $x_i = \{x_{ij}, \ \ j \in N(i)\}$. Позначимо через X_i множину усіх таких векторів x_i. Множина X_i є векторним простором вимірності $\dim X_i = |N(i)|$.

Нехай $M_i \subset X_i$, $i \in V$ — замкнені підмножини. Покладемо

$$\widetilde{M}_i = \{x \in X : x_i \in M_i\}. \tag{2}$$

Простори X_i є підпросторами в X. Позначимо π_i — оператор ортогонального проектування по X_i. Тоді

$$\widetilde{M}_i = \{x \in X : \pi_i x \in M_i\}. \tag{3}$$

Обмеження (2) або (3) назвемо обмеженнями, які мають структуру графа.

Сформулюємо задачу: знайти вектор $x^* \in X$, такий що

$$x^* \in \widetilde{M}_i, \quad i \in V. \tag{4}$$

Розглянемо метод послідовного вилучення одної невідомої. Припустимо, що вилучається одна невідома x_{ab}, $(a,b) \in E$. При цьому ребро (a,b) стягується, точки a та b збігаються і стають одною точкою, яку позначимо $a\bar{b}$. Опишемо спосіб побудови множини $\widetilde{M}_{a\bar{b}}$. Розглянемо простір векторів $X(a,\bar{b}) = \{x_{ij}, \ \ (i,j) \in E, \ \ (i,j) \neq (a,b)\}$, у яких відсутня координата x_{ab} з номером (a,b). Множина $X(a,\bar{b})$ є підпростором простору X. Нехай $\pi(a\bar{b})$ оператор ортогонального проектування простору X на підпростір $X(a\bar{b})$. Покладемо $\widetilde{M}_{ab} = \widetilde{M}_a \bigcap \widetilde{M}_b$, $\widetilde{M}_{a\bar{b}} = \pi(a\bar{b})\widetilde{M}_{a\bar{b}}$.

Вище всі множини $\widetilde{M}_i$, $i \in V$ було описано за допомогою множин M_i. Ці множини задають обмеження на координати вектора x, що знаходяться у просторі X_i. Дамо аналітичний опис множини $\widetilde{M}_{a\bar{b}}$.

Розглянемо два векторних простори:

$$X_{ab} = \{x_{ai}, x_{bj} : i \in N(a), \quad j \in N(b)\};$$

$$X_{a\bar{b}} = \{x_{ai}, x_{bj} : i \in N(a), \quad j \in N(b), \quad i \neq b, \quad j \neq a\}.$$

Множина $X_{a\bar{b}}$ є підпростором простору X_{ab}. Нехай $\pi(a\bar{b})$ — оператор ортогонального проектування простору X_{ab} на підпростір $X_{a\bar{b}}$. Покладемо

$$M_a(b)=\{\bar{x}\in X_{ab}: x_a\in M_a\};\quad M_b(a)=\{\bar{x}\in X_{ab}: x_b\in M_b\};$$

$$M_{ab}=M_a(b)\bigcap M_b(a),\quad M_{a\bar{b}}=\pi(a\bar{b})M_{ab}.$$

Із побудови випливає, що $\widetilde{M}_{a\bar{b}}=\{x\in X(a\bar{b}): x_{a\bar{b}}\in M_{a\bar{b}}\}$.

Таким чином, як наслідок вилучення невідомої x_{ab}, виходить нова система нерівностей, що має структуру графа $G(a\bar{b})$. Граф $G(a\bar{b})$ виходить з графа G шляхом стягування ребра (a, b) та злиття точок a та b в одну точку $(a\bar{b})$, тобто $G(a\bar{b})=\{V(a\bar{b}), E(a\bar{b})\}$, де $V(a\bar{b})=\{i\in V: i\neq a,$ $i\neq b\}\bigcup(a\bar{b})$; $E(a\bar{b})=\{(i,j)\in E,\ (i,j)\neq(a,b)\}$.

При цьому нова система нерівностей описує множину невідомих векторів із простору X_{ab}.

Розглянемо вилучення групи невідомих. Нехай $H=\{VH, EH\}$ — зв'язний підграф графа G; VH, EH — відповідно множини його вершин та ребер. Будемо вилучати невідомі $x_{\alpha\beta}$, $(\alpha,\beta)\in EH$.

Розглянемо векторні простори, які складаються з наступних координат:

$$X_H=\{x_{\alpha i},\ \alpha\in VH,\ i\in V,\ (\alpha,i)\in E\},$$

$$X_{\overline{H}}=\{x_{\alpha i},\ \alpha\in VH,\ i\in V,\ i\notin VH,\ (\alpha,i)\in E\}.$$

Множина $X_{\overline{H}}$ є підпростором простору X_H. Нехай $\pi(\overline{H})$ — оператор ортогонального проектування простору X_H на підпростір $X_{\overline{H}}$. Покладемо $M_\alpha(H)=\{\bar{x}\in X_H: x_\alpha\in M_\alpha\}$, $\alpha\in VH$, $M_H=\bigcap\limits_{\alpha\in VH}M_\alpha(H)$, $M_{\overline{H}}=\pi(\overline{H})M_H$.

Утворимо з графа G новий граф $G(\overline{H})$, який випливає з графа шляхом стягування підграфа H в точку. Позначимо цю точку через $\overline{H}$. При вилученні групи невідомих $x_{\alpha\beta}$, $(\alpha,\beta)\in EH$ одержуємо нову систему нерівностей зі структурою графа $G(\overline{H})$. Для цієї системи всі $\widetilde{M}_\alpha$ визначені, як і вище, а $\widetilde{M}_{\overline{H}}=\{x\in X(\overline{H}): x_{\overline{H}}M_{\overline{H}}\}$.

Зауваження. В роботах [2–4] розглянуті випадки, коли кожній вершині графа G відповідає одна двостороння нерівність. В цьому випадку можна вилучати невідомі , що відповідають проміжним та кінцевим ребрам.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968. — 488 с.
2. *Остапенко В.В., Финин Г.С.* Метод исключения неизвестных для систем линейных неравенств со структурой графа // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 5. — С. 66–74.
3. *Остапенко В.В., Финин Г.С.* Методы исключения неизвестных из систем линейных неравенств и их приложения // Укр. мат. журн. — 2001. — № 1. — С. 50–56.
4. *Финин Г.С.* Решение систем линейных неравенств методами исключения неизвестных // Вестник Междунар. Соломонов. ун-та. — 1999.— №1.— С. 116–122.
5. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

Надійшла 15.03.2002