ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

УДК 519

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Ю.П. ЗАЙЧЕНКО

Рассматриваются задачи многокритериальной оптимизации (МКО) в нечетких условиях, когда параметры целевой функции и ограничений являются нечеткими числами. Для задачи МКО линейного программирования предложен метод, сводящий ее к решению компромиссного решения для пары задач оптимиста и пессимиста. Для общего случая МКО задачи нелинейного программирования с нечеткими параметрами введено понятие Парето-оптимального решения уровня α и предлагается алгоритм, позволяющий находить эти решения. Приведены результаты экспериментальных исследований разработанных алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее интересных современных направлений теории принятия решений (ПР) в сложных системах являются многокритериальные задачи принятия решений. Его актуальность определяется тем, что многие практические задачи планирования и управления в социально-экономических системах сводятся к задачам МКО.

Современная теория оптимизации накопила достаточно широкий арсенал решения подобных задач, основанных на различных идеях и подходах, большинство из которых сводится к нахождению некоторого наилучшего компромиссного решения задачи МКО, одного из Парето-оптимальных решений [1, 2]. Все эти подходы и методы базируются на допущении, что лицо, принимающее решение (ЛПР), обладает полной информацией, необходимой для принятия решений (решение принимается в условиях определенности). Однако задача принятия решений значительно усложняется, если решения необходимо принимать в условиях неопределенности (неполной информированности ЛПР о целевых функциях и ограничениях). Именно эта ситуация чаще всего и встречается на практике.

Целью настоящей статьи является изложение моделей и методов принятия многокритериальных решений в условиях неполноты информации (при различных формах задания неопределенности). При этом рассматриваются как линейные, так и нелинейные задачи оптимизации.

1. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЛП) С НЕЧЕТКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

1.1. Однокритериальные задачи ПР с интервально-заданными нечеткими параметрами целевых функций. Пусть задача ПР с несколькими критериями сводится к многокритериальной задаче линейного программирования (МКЛП-задача) следующего вида:

$$\max z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = \mathbf{c}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x}, \quad i = \overline{1,K} \tag{1}$$

при условиях

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{B}, \tag{2}$$

$$\mathbf{x} \ge 0, \tag{3}$$

где все коэффициенты целевых функций C_{ij} являются нечеткими числами, заданными на интервале $c_{ij} \in \left[c_{ijl}, c_{iju}\right]$.

Рассмотрим сначала случай, когда ЛПР неизвестна функция принадлежности нечеткого параметра $\mu_{ij}(C_{ij})$, а известны только концы интервала, нижний — (C_{ijl}) и верхний (C_{iju}). Для такой степени информированности ЛПР предлагается следующий метод решения.

Составляем и решаем так называемую задачу пессимиста вида

$$\max z_l = \sum_{j=1}^{n} c_{il} x_j = \mathbf{c}_l^{\mathrm{T}} \mathbf{x} \tag{4}$$

при условиях

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{B}, \tag{5}$$

$$\mathbf{x} \ge 0. \tag{6}$$

Найденное решение обозначим через $\mathbf{x}_l^*$, а оптимальное значение целевой функции $z_{\max_l} = z_l(\mathbf{x}_l^*) = z_l^*$.

Одновременно решаем соответствующую задачу минимизации

$$\min z_l(\mathbf{x}) = \underline{z_l} \tag{7}$$

при условиях (5), (6).

Затем решаем так называемую задачу оптимиста (для наилучших условий внешней среды)

$$\max\ z_u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_{ju} x_j = \mathbf{c}_u^{\mathrm{T}} \mathbf{x} \tag{8}$$

при условиях (5), (6) и найдем оптимальное ее решение $\mathbf{x}_u^*$, а также $\mathrm{z}_{\mathrm{u}}^* = \max z_u(\mathbf{x})$.

Далее определяем нижнюю границу критерия оптимиста

$$\underline{z_u} = \min\ z_u(\mathbf{x}) \tag{9}$$

при условиях (5), (6).

Тогда задачу нахождения оптимального решения в условиях с интервально-заданными параметрами целевой функции можно свести к задаче нахождения компромиссного решения следующей МК-задачи:

$$\max \begin{bmatrix} z_l(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ z_u(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_u^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \end{bmatrix} \tag{10}$$

при условиях (2),(3).

Для нахождения ее решения применим такой подход. Перейдем от критерия $z_l(\mathbf{x})$ к нечеткому критерию $\varphi_l(\mathbf{x})$ с функцией принадлежности $f_l(\mathbf{x})$, задаваемой так:

$$f_l(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mathrm{z}_l(\mathbf{x}) \le \underline{z_l}, \\ \dfrac{z_l(\mathbf{x}) - \underline{z_l}}{z_l^* - \underline{z_l}}, & \text{если} \quad \underline{z_l} < \mathrm{z}_l(\mathbf{x}) < \mathrm{z}_l^*, \\ 1, & \text{если} \quad \mathrm{z}_l(\mathbf{x}) \ge \mathrm{z}_l^*. \end{cases} \tag{11}$$

Аналогичным образом для критерия оптимальности $z_u(\mathbf{x})$ перейдем к нечеткой целевой функции с функцией принадлежности $f_u(\mathbf{x})$, которая определяется так:

$$f_u(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mathrm{z_u}(\mathbf{x}) \le \underline{z_u}, \\ \dfrac{z_u(\mathbf{x}) - \underline{z_u}}{z_u^* - \underline{z_u}}, & \text{если} \quad \underline{z_u} < \mathrm{z_u}(\mathbf{x}) < z_{\mathrm{u}}^*, \\ 1, & \text{если} \quad z_{\mathrm{u}}(\mathbf{x}) \ge z_{\mathrm{u}}^* \end{cases} \tag{12}$$

Далее применяем подход Белмана-Заде и ищем такое компромиссное решение $\mathbf{x}^0$, для которого

$$\min\{f_l(\mathbf{x}), f_u(\mathbf{x})\} \to \max \tag{13}$$

при условиях (2), (3).

Данная минимаксная задача запишется в следующем эквивалентном виде:

$$\max_x\ \lambda \tag{14}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(z_l{}^* - \underline{z_l}) - z_l(\mathbf{x}) \le -\underline{z_l}, \\ &\lambda(z_u{}^* - \underline{z_u}) - z_u(\mathbf{x}) \le -\underline{z_u}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{B}, \tag{16}$$

$$\mathbf{x} \ge 0. \tag{17}$$

Величина λ^0 $(\lambda \in [0,1])$ характеризует достигнутую степень удовлетворения каждого из нечетких критериев (f_l и f_u).

1.2. Задача ЛП с нечеткими параметрами критериев с известными функциями принадлежности. Рассмотрим теперь случай большей информированности ЛПР о нечетких параметрах. Пусть ЛПР знает функцию принадлежности $\mu_{ij}(c_{ij})$ нечетких параметров c_j. Тогда он может задаться некоторым уровнем α $(\alpha \in (0,1))$ и определить подмножество уровня α C_j^α нечеткого числа c_j: $c_j^\alpha = \left[c_{jl}^\alpha, c_{ju}^\alpha\right]$.

Тогда можно сформировать два критерия — пессимиста $z_l^\alpha(\mathbf{x})$ для левого конца интервала и оптимиста — $z_u^\alpha(\mathbf{x})$ для правого конца интервала, и перейти к решению двух критериальных задач вида

$$\max \begin{bmatrix} z_l^\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_l^{\alpha \mathrm{T}} \mathbf{x} \\ z_u^\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_u^{\alpha \mathrm{T}} \mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

Для нахождения наилучшего компромиссного решения этой задачи необходимо перейти к линейной задаче вида

$$\max \lambda \tag{18}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} \lambda(z_l^{a^*} - \underline{z_l^a}) - z_l^a(\mathbf{x}) \le -\underline{z_l^a}, \\ \lambda(z_u^{a^*} - \underline{z_u^a}) - z_u^a(\mathbf{x}) \le -\underline{z_u^a}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{B}, \tag{20}$$

$$\mathbf{x} \ge 0. \tag{21}$$

Она является обычной ЛП-задачей и решается стандартными методами ЛП (симплекс-методом, методом обратной матрицы и т.д.).

При необходимости более полного учета информации о виде функции принадлежности $\mu_j(c_j)$ ЛПР может задаться несколькими уровнями $\alpha: \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_R$, и тогда ограничения минимаксной задачи (18) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \lambda(z_l^{\alpha_r *} - \underline{z_l^{\alpha_r}}) - z_l^{\alpha_r}(\mathbf{x}) \le -\underline{z_l^{\alpha_r}}, \\ \lambda(z_u^{\alpha_r *} - \underline{z_u^{\alpha_r}}) - z_u^{\alpha_r}(\mathbf{x}) \le -\underline{z_u^{\alpha_r}}, \end{aligned}\right\} \quad r = \overline{1, R}, \tag{22}$$

т.е. получим $2R$ ограничений (обычно $R = 3 \div 4$).

1.3. Многокритериальная задача ЛП с нечеткими параметрами в целевой функции. Рассмотрим теперь общий случай МКЛП-задачи с нечеткими целевыми функциями. Она запишется в виде

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = \mathbf{c}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x}, \quad i = \overline{1,k} \tag{23}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\le \mathbf{B}, \\ \mathbf{x} &\ge 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где c_{ij} — нечеткие числа с известными функциями принадлежности $\mu_{ij}(c_{ij})$.

Зададимся несколькими уровнями $\alpha : \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_R$ и найдем соответствующие интервалы неопределенности $[c_{ijl}^{\alpha_r}, c_{iju}^{\alpha_r}]$.

Далее, используя подход, описанный в разделе 1.2. , приводим задачу (23), (24) к следующей МК-задаче:

$$\max \begin{bmatrix} z_{1l}^{\alpha_r}(\mathbf{x}) \\ z_{1u}^{\alpha_r}(\mathbf{x}) \\ \ldots\ldots\ldots \\ z_{kl}^{\alpha_r}(\mathbf{x}) \\ z_{ku}^{\alpha_r}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad r = \overline{1,R}$$

при условии (24).

Она приводится к следующей однокритериальной задаче:

$$\max \ \lambda \tag{25}$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} \lambda({z_{il}}^{\alpha_r *} - \underline{{z_{il}}^{\alpha_r}}) - {z_{il}}^{\alpha_r}(\mathbf{x}) \le -\underline{{z_{il}}^{\alpha_r}}, \\ \lambda({z_{iu}}^{\alpha_r *} - \underline{{z_{iu}}^{\alpha_r}}) - {z_{iu}}^{\alpha_r}(\mathbf{x}) \le -\underline{{z_{iu}}^{\alpha_r}}, \end{aligned} \right\}, \quad i = \overline{1,k}, \quad r = \overline{1,R}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\le \mathbf{B}, \\ \mathbf{x} &\ge 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Заметим, что число добавляемых ограничений вида (26) составляет $2RK$, поэтому число уровней α нечетких чисел следует ограничивать $R = 3 \div 4$.

2. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (МКНП) С НЕЧЕТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим теперь самый общий случай многокритериальных задач в условиях неопределенности — так называемые МКНП-задачи с нечеткими параметрами, когда нечеткость присутствует как в описании целевой функции, так и в ограничениях.

Они имеют следующий вид.

Найти

$$\min f(\mathbf{x},\mathbf{A}) = \left[f_1(\mathbf{x},\mathbf{a}_1),..., f_k(\mathbf{x},\mathbf{a}_k)\right] \tag{28}$$

при условиях

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}(\mathbf{B}) = \left\{\mathbf{x} : g_j(\mathbf{x},\mathbf{b}_j) \le 0, \quad j = \overline{1,m}\right\}, \tag{29}$$

где $\mathbf{A} = \left[\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k\right]$, $\mathbf{B} = \left[\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_m\right]$ — нечеткие матрицы; $\mathbf{a}_i = \left[a_{ip}\right]$ $p = \overline{1,P}$, $\mathbf{b}_j = \left[b_{js}\right]$, $s = \overline{1,S}$, — векторы нечетких параметров, включенных соответственно в целевые функции $f_i(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)$ и ограничения $g_j(\mathbf{x},\mathbf{b}_j)$.

Предположим далее, что a_{ip} и b_{is} — нечеткие числа с известными функциями принадлежности $\mu_{ip}(a_{ip})$ и $\mu_{js}(b_{js})$.

Введем следующее определение.

Определение. Множеством уровня α нечетких матриц $\mathbf{A} = \left[a_{ir}\right]$ и $\mathbf{B} = \left[b_{js}\right]$ называется множество $L_\alpha(\mathbf{A},\mathbf{B})$ таких элементов $\left[a_{ir}\right]$ и $\left[b_{js}\right]$, для которых степень их принадлежности не ниже величины α, т.е.

$$L_\alpha(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \Big[\left\|a_{ir}\right\|,\left\|b_{js}\right\| \; : \mu(a_{ir}) \ge \alpha,$$

$$i = \overline{1,k}, \quad r = \overline{1,p}, \quad \mu(b_{js}) \ge \alpha, \quad j = \overline{1,m}, \quad s = \overline{1,S}\Big].$$

Ясно, что множества уровня α обладают следующим свойством:

$\alpha_1 \le \alpha_2$ тогда и только тогда, когда $L_{\alpha_1}(\mathbf{A},\mathbf{B}) \supseteq L_{\alpha_2}(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

Используя множество уровня α нечетких чисел, введем понятие Парето-оптимальных решений для нечетких α-МКНП-задач.

Вектор $\mathbf{x}^* \in X(\mathbf{B}^*)$ называют α-Парето-оптимальным решением задачи (26), (27), тогда и только тогда, когда не существует другого $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{B}})$, где $(\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}}) \in L_\alpha(\mathbf{A},\mathbf{B})$, такого, что

$$f_i(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{a}}_i) \le f_i(\mathbf{x}^*,\mathbf{a}_i^*), \quad i = \overline{1,k} \tag{30}$$

и строгое неравенство выполняется по крайней мере для одного *i*, где $(\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*)$ называются оптимальными значениями параметров уровня α.

Другими словами, не существует ни одного решения $\widetilde{\mathbf{x}}$ и соответствующих ему параметров $(\widetilde{\mathbf{A}},\widetilde{\mathbf{B}})$ уровня α, которое бы доминировало $\mathbf{x}^*$.

Заметим, что из свойства множества уровня α $L_\alpha(\mathbf{A},\mathbf{B})$ вытекает следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ — Парето-оптимальные решения уровней α_1 и α_2 соответственно, а $(\mathbf{A}^1,\mathbf{B}^1)$ и $(\mathbf{A}^2,\mathbf{B}^2)$ — соответствующие оптимальные параметры уровней α_1 и α_2. Если $\alpha_1 \ge \alpha_2$, то $f(\mathbf{x}^1,\mathbf{A}^1) \ge$ $\ge f(\mathbf{x}^2,\mathbf{A}^2)$ для любого $\mathbf{x}^1$ и набора $(\mathbf{A}^1,\mathbf{B}^1)$. Как и в четких МК-задачах, α-Парето-оптимальные решения состоят из множества точек и ЛПР должен выбрать из них компромиссное решение, исходя из своих субъективных суждений.

Чтобы осуществить выбор такого компромиссного решения, ЛПР для каждой целевой функции f_i устанавливает желательную верхнюю границу $\overline{f_i}$, называемую эталонным уровнем.

Для указаных ЛПР степени α и эталонных уровней $\overline{f_i}$, $i=\overline{1,k}$ соответствующее Парето-оптимальное решение, близкое к его требованиям, отыскивается путем решения следующей минимаксной задачи:

$$\min_{x\in X(B)} \max_i \left\lfloor f_i(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)-\overline{f_i}\right\rfloor, \tag{31}$$

$$(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbf{A},\mathbf{B}). \tag{32}$$

Эта задача записывается в следующем эквивалентном виде:

$$\min \upsilon \tag{33}$$

при условиях

$$f_i(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)-\overline{f_i} \le \upsilon, \quad i=\overline{1,k}, \tag{34}$$

$$\mathbf{x}\in \mathbf{X(B)}, \quad (\mathbf{A},\mathbf{B}) \in L_\alpha(\mathbf{A},\mathbf{B}). \tag{35}$$

Взаимосвязь между оптимальными решениями минимаксной задачи и α-Парето-оптимальными решениями устанавливается в следующих теоремах.

Теорема 1. Если $(\mathbf{x}^*,\upsilon^*,\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*)$ — единственное оптимальное решение минимаксной задачи для некоторого вектора $\bar{\mathbf{f}}=[\overline{f_1},...,\overline{f_k}]$, то точка $\mathbf{x}^*$ — α-Парето-оптимальное решение МКНП-задачи, а $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$ — оптимальные значения соответствующих нечетких параметров.

Теорема 2. Если $\mathbf{x}^*$ — α-Парето-оптимальное решение и $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$ — оптимальные значения α-уровня в МКНП-задаче, то существует такой вектор $\bar{\mathbf{f}}=[\overline{f_1},...,\overline{f_k}]$, что $(\mathbf{x}^*, \upsilon^*, \mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*)$ — оптимальное решение минимаксной задачи (33) – (35).

Доказательства теорем 1, 2 приводятся в работе [4].

Итак, из теоремы 1 следует, что если решение минимаксной задачи $(\mathbf{x}^*, \upsilon^*, \mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*)$ единственное, то оно является α-Парето-оптимальным решением. Если же оно не единственно, то можно проверить α-Парето-оптимальность для $\mathbf{x}^*$, решив следующую вспомогательную задачу.

Найти

$$\max \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tag{36}$$

при условиях

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) + \varepsilon_i = f_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}_i^*), \quad i = \overline{1, k}\,, \tag{37}$$

где

$$\varepsilon_i \ge 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\mathbf{B}), \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathrm{L}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \tag{38}$$

Пусть $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ — оптимальное решение (36) – (38). Если все $\varepsilon_i = 0$, то тогда $\mathbf{x}^*$ — α-Парето-оптимальное решение. Если же хотя бы одно $\varepsilon_i > 0$, то можно легко показать, что α-Парето-оптимальным решением является $\tilde{\mathbf{x}}$.

3. ИНТЕРАКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МКНП

На основе изложенного выше подхода предлагается интерактивный алгоритм отыскания α-Парето-оптимального решения, которое бы удовлетворяло требованиям ЛПР.

Шаг 1. Вычислить индивидуальные минимум и максимум для каждой целевой функции $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)$ при заданных ограничениях для $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Шаг 2. ЛПР просят выбрать значения α и начальные значения эталонных уровней $\bar{f}_i(0), \quad i = \overline{1,k}$.

Шаг 3. Для выбранных значений α и $\overline{f_i}(0)$ на ЭВМ решается соответствующая минимаксная задача и выполняется тест на проверку его α-Парето-оптимальности.

Шаг 4. Анализ полученного решения. ЛПР сообщаются соответствующее α-Парето-оптимальное решение $\mathbf{X}^*$, значение целевой функции $f_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}_i^*)$, текущие эталонные уровни $\overline{f_i}$ и ряд других параметров. Если ЛПР удовлетворен полученными результатами, то конец, иначе он может изменить значения для некоторых $\overline{f_i}$, а также уровень α. В этом случае переходим снова на шаг 3.

При этом для ЛПР следует подчеркнуть, что:

1) любое улучшение одной целевой функции может быть достигнуто только за счет ухудшения значений по крайней мере одной другой целевой функции;

2) увеличение уровня α приводит к ухудшению значений целевой функции при некоторых фиксированных значениях эталонных уровней $\overline{f_i}$.

Сходимость интерактивного алгоритма решения МКНП задач определяется сходимостью используемого алгоритма решения минимаксной задачи, эквивалентной исходной задаче МКНП, на шаге 3.

В качестве такого алгоритма могут быть использованы алгоритмы метода штрафных функций, например, метод барьерных поверхностей или метод штрафных функций.

3.1. Экспериментальные исследования алгоритма решения задач МКНП. Для экспериментального исследования интерактивного алгоритма решения задачи МКНП была выбрана такая задача [4]:

$$\min f_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{a}}_1) = (x_1 - \tilde{a}_{11})^2 + (x_2 - \tilde{a}_{12})^2 + 5(x_3 - \tilde{a}_{13})^2, \tag{39}$$

$$\min f_2(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{a}}_2) = (x_1 - 10)^2 \cdot \tilde{a}_{21} + (x_2 + 5)^2 \cdot \tilde{a}_{22} + 2(x_3 - \tilde{a}_{23})^2 \tag{40}$$

при ограничениях

$$\tilde{b}_1 x_1^2 + \tilde{b}_2 x_2^2 + \tilde{b}_3 x_3^2 \le 100, \tag{41}$$

где $\tilde{a}_{1i}, \tilde{a}_{2i}, \tilde{b}_i$, $i = \overline{1,3}$ — нечеткие числа с функциями принадлежности треугольного вида, имеющими параметры p_1, p_2, p_3 и p_4, значения которых приведены в табл. 1.

Таблица 1

Нечеткие параметры	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_1	b_2	b_3
p_1	3, 8	48, 5	1, 85	18, 2	2, 9	4, 7	0, 9	0, 8	0, 85
$p_2 = p_3$	4, 0	50, 0	2, 0	20, 0	3, 0	5, 0	1, 0	1, 0	1, 1
p_4	4, 3	52, 0	2, 2	22, 5	3, 15	5, 35	1, 1	1, 2	1, 15

Для нахождения решения минимаксной задачи вида (39) – (41) используется метод барьерных поверхностей (МБП), для применения которого строится барьерная функция вида

$$p(\mathbf{x}, r_k) = r_k \sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{g_i(\mathbf{x}_k, b_i)}, \tag{42}$$

где k — номер текущей итерации, $\beta = 0{,}1$, $r_0 = 5$.

Условия останова алгоритма такие:

$$r_k \sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{g_i(\mathbf{x}_k, b_i)} \le \varepsilon, \tag{43}$$

где $\varepsilon = 10^{-4}$; $\mathbf{x}_k$ — оптимальное решение после k-й итерации. При оптимизации барьерной функции используется градиентный метод с переменным шагом. Эксперименты проводились при различных уровнях α. В качестве эталонных уровней использовались значения $\overline{f_1}$ и $\overline{f_2}$,которые приняты ЛПР. В табл.2 приведены результаты экспериментальных исследований в зависимости от вариаций α и значений эталонных уровней $\overline{f_1} = 2000$, $\overline{f_2} = 2500$ (F_1 и F_2 — достигнутые значения критериев $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$; N_{iT} — число итераций оптимизации).

Таблица 2

α	F_1	F_2	$\vartheta = x_0$	x_1	x_2	x_3	N_{iT}
0,50	1635,4	2133,9	–364,2	1,542	9,807	1,136	177
0,60	1657	2156	–343,0	1,507	9,714	1,1402	113
0,80	1702	2200	–297,9	1,443	9,5339	1,1454	120

В последующих экспериментах было изучено влияние выбора нечетких параметров b_i из интервала $[\underline{b_i^\alpha}, \overline{b_i^\alpha}] = L_\alpha(b_i)$ на область допустимых решений (ОДР) и достигнутые значения критериев при $\alpha = 0,5$. Понятно, что при $b_i = \underline{b_i^\alpha}$ получим максимальную ОДР, а при $b_i = \overline{b_i^\alpha}$ – минимальную. Соответствующие результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3

Вид эксперимента	F_1	F_2	ϑ
Увеличение ОДР	1598	2089	–409,8
Уменьшение ОДР	1748	2248	–251,5

Проанализировав полученные экспериментальные результаты, приходим к выводам.

Увеличение уровня α приводит к ухудшению достигнутых значений критериев F_1 и F_2, что понятно, так как сужается интервал $L_\alpha(\mathbf{a}_i)$, на котором ищется $\min_{\mathbf{x}, \mathbf{a}_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)$.

Увеличение ОДР приводит к улучшению значений критериев, а ее уменьшение наоборот — к обратному эффекту. Уменьшая заданные значения эталонных уровней $\overline{f}_1$ и $\overline{f}_2$, можно достичь улучшения значения соответствующего критерия вследствие оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 254 с.
2. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука, 1982. — 256 с.
3. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. Нечеткая оптимизация. — Київ: Вища шк., 1991. — 191 с.
4. *Зайченко Ю.П.* Многокритериальные задачи нелинейного программирования с нечеткими параметрами. Альтернативный подход // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 6. — С. 145–151.

Поступила 23.02.2002