УДК517.956.4

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В.Г. БОНДАРЕНКО, А.Н. СЕЛИН

Рассмотрена задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с локальным и нелокальным потенциалом. Для уравнения типа «реакция-диффузия» с выпуклым локальным потенциалом построены барьерные функции, являющиеся верхней и нижней оценками решения задачи Коши. Метод построения упомянутых барьерных функция — композиция решений двух дифференциальных уравнений. Для уравнения с нелокальным логистическим потенциалом свойства построенной аналогичным образом барьерной функции, как верхней оценки, проверены с помощью вычислительного эксперимента.

ВВЕДЕНИЕ

Квазилинейное параболическое уравнение в области $D \subseteq R^n$ с нелинейным потенциалом является математической моделью ряда физических процессов, обобщающих классическую диффузию. В частности, решение такого уравнения описывает плотность популяции в ареале D. Следует отметить, что для нелинейного потенциала решение $u(t,x)$ может обладать качественно новыми свойствами, не присущими решению классического уравнения диффузии. Так, для одномерного уравнения (Колмогорова–Петровского–Пискунова–КРР)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi(u)$$

с потенциалом Φ определенного вида для некоторого класса начальных условий доказана сходимость решения (при $t \to \infty$) к функции вида $g(x+ct)$, т.е. к «бегущей волне». Свойства решений этого уравнения подробно рассмотрены в работе [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \Phi(u), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \Phi(u(t,\bullet)), \tag{2}$$

где L — эллиптический оператор второго порядка, Φ — потенциал (в уравнении (1) потенциал локальный, в (2) — нелокальный).

В биологических задачах локальный потенциал обычно удовлетворяет условиям

$$\Phi(0) = \Phi(1) = 0, \ \ \Phi'(1) < \Phi'(0)$$

и называется функцией локального роста логистической популяции. Примером функции, удовлетворяющей таким условиям, является [2]:

$$\Phi(u) = \lambda u(1-u), \ \lambda > 0.$$

В последние годы возрос интерес к физическим задачам, математической моделью которых является уравнение (2) с нелокальным потенциалом. Основные результаты, полученные в этом направлении в работах [3−5] — это асимптотическое поведение решения, т. е. наличие бегущей волны.

В данной работе для уравнений (1) и (2) рассмотрены свойства решения задачи Коши с неотрицательным начальным условием. Для этого решения построены двусторонние оценки.

УРАВНЕНИЕ С ЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Изучим свойства решения задачи Коши $u(t,x)$ уравнения (1) с начальным условием $u(0,x) = f(x) \geq 0$ с выпуклым вверх потенциалом $\Phi(u) > 0,$ $\alpha < u < \beta.$ Задача состоит в том, чтобы построить нижнюю и верхнюю оценки u_1, u_2 для решения $u(t,x)$. Заметим, что следствием выпуклости вверх является неравенство

$$\Phi\left(\int_X \gamma(y)\mu(dy)\right) \geq \int_X \Phi(\gamma(y))\mu(dy),$$

где μ — вероятностная мера на пространстве X, γ — интегрируемая функция.

Обозначим через $p(t,x,y)$ фундаментальное решение линейного уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu.$ Тогда

$$v(t,x) = \int f(y)p(t,x,y)dy, \ f(x) \geq 0$$

является решением задачи Коши для этого уравнения (интегрирование ведется по пространству R^n). Через $w(t,c)$ обозначим решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dt} = \Phi(w), \ \ w(0) = c \geq 0, \ \ w(t,c) > c.$$

Положим

$$u_1(t,x) = \int w(t, f(y))p(t,x,y)dy; \ \ u_2(t,x) = w(t, v(t,x)). \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть $Lu = \sum a_{jk}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum b_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$. Если Φ непрерывно дифференцируема, то имеет место неравенство

$$u_1(t,x) \le u(t,x) \le u_2(t,x), \;\; t>0, \;\; x \in R^n.$$

Доказательство базируется на теореме сравнения для параболических уравнений — [6, с.73]. Пусть $h_k(t,x)$ — невязки, т.е.

$$h_k = \frac{\partial u_k}{\partial t} - Lu_k - \Phi(u_k), \;\; k=1,2.$$

Требуется доказать, что $h_1 \le 0, \;\; h_2 \ge 0.$

Лемма 1. Имеют место соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial c} = \frac{\Phi(w(t,c))}{\Phi(c)}, \;\; \frac{\partial^2 w}{\partial c^2} = \frac{\Phi(w(t,c))}{\Phi^2(c)}(\Phi'(w(t,c)) - \Phi'(c)).$$

Доказательство. Пусть $H(z) = \int \frac{dz}{\Phi(z)}$ — произвольная первообразная. Тогда

$$H(w(t,c)) = t + H(c), \quad w(t,c) = H^{-1}(t + H(c))$$

и дифференцируя последнее равенство, получаем нужное утверждение.

Доказательство теоремы. Вычислим невязку h_1:

$$h_1(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\int w(t,f(y))p(t,x,y)dy - \int w(t,f(y))Lp(t,x,y)dy -$$

$$-\Phi\Big(\int w(t,f(y))p(t,x,y)dy\Big) =$$

$$= \int \Phi(w(t,f(y))\; p(t,x,y)dy - \Phi(\int w(t,f(y))\; p(t,x,y)dy \le 0$$

в силу выпуклости вверх функции Φ.

Вычисление невязки h_2 использует результат леммы 1.

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}(t,v) + \frac{\Phi(u_2)}{\Phi(v)}\frac{\partial v}{\partial t} = \Phi(u_2) + \frac{\Phi(u_2)}{\Phi(v)}\frac{\partial v}{\partial t};$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_k} = \frac{\Phi(u_2)}{\Phi(v)}\frac{\partial v}{\partial x_k};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\Phi(u_2)}{\Phi(v)}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\Phi(u_2)}{\Phi^2(v)}(\Phi'(v) - \Phi'(u_2))\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_k}.$$

Отсюда

$$h_2(t,x) = \frac{\Phi(u_2)}{\Phi^2(v)}\,(\Phi'(v) - \Phi'(u_2))\,(A(x)v', v') \ge 0,$$

что и доказывает теорему.

Приведенные ниже результаты вычислительного эксперимента для $\Phi(u) = u(1-u)$ и начального условия — функции Хевисайда $\theta(x)$ позволяют оценить уклонение решения от барьерных функций.

Замечание. При других условиях на Φ утверждение теоремы 1 доказано в работе [7].

УРАВНЕНИЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \lambda(1-u)(Ku) \tag{4}$$

с начальным условием $0 \le u(0,x) = f(x) \le 1$, где $(Ku)(t,x) = \int\limits_{R^n} u(t,y)K(x,y)\,dy$, K — стохастическое ядро, т.е. $K(x,y) \ge 0$, $\int\limits_{R^n} K(x,y)dy = 1$, $\lambda > 0$.

Изучению решений уравнения (4) (и сходным с ним) посвящен целый ряд работ, например [3–5]. Там же приведена обширная библиография. Основной результат — условия сходимости $u(t,x)$ к «волновому решению» при $t \to \infty$. Нашей задачей является изучить свойства решения задачи Коши для уравнения (4). Обозначим через $u(t,x)$ решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \lambda(1-u)g(t,x)$, $g(t,x) \ge 0$ с начальным условием $0 \le f(x) \le 1$.

Лемма 2. Если $0 \le \alpha_1(t) \le g(t,x) \le \alpha_2(t)$ и $u_k(t,x) = 1-(1-v)\times \times \exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t \alpha_k(\tau)d\tau\right\}$, то $u_1(t,x) \le u(t,x) \le u_2(t,x)$.

Доказательство основано на упомянутой выше теореме сравнения. Так, вычисляя невязку

$$h_k = \frac{\partial u_k}{\partial t} - Lu_k - \lambda(1-v)\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t \alpha_k(\tau)d\tau\right\}(\alpha_k(t) - g(t,x))$$

и так $0 \le v(t,x) \le 1$, то $h_1(t,x) \le 0$, $h_2(t,x) \ge 0$, откуда и следует утверждение.

Теорема 2. Решение задачи Коши (4) единственно и удовлетворяет неравенству $0 \le u(t,x) \le 1$.

Доказательство. В уравнении

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \lambda(1-u)(Kg)(t,x), \quad 0 \le g \le 1$$

с начальным условием $0 \le u(0,x) \le 1$ рассмотрим $u(t,x)$ как функционал от g в метрическом пространстве X с метрикой $0 \le t \le T$, $\rho(u,0) \le 1$.

В силу леммы 2 $v \le u(t,x) \le 1-(1-v)\exp\{-\lambda t\}$.

С другой стороны,

$$u(t,x)=v(t,x)+\lambda\int_0^t d\tau\int(1-u(\tau,y))(Kg)(\tau,y)p(t-\tau,x,y)dy,$$

так что для g_1, g_2 (соответсвенно, u_1, u_2) получаем уравнение для $u=u_1-u_2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu-\lambda u(Kg_1)+\lambda(1-u_2)(K(g_1-g_2)),\ u(0)=0.$$

Если $q(\tau,t,x,y)$ — фундаментальное решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=Lu-$ $-\lambda u(Kg_1)$, то $u(t,x)=\lambda\int_0^t d\tau\int(1-u_2(\tau,y))(K(g_1-g_2))(\tau,y)q(\tau,t,x,y)dy$, и переходя к оценкам, получим $\rho(u_1,u_2)\le\lambda T\rho(g_1,g_2)$, т.е. для $\lambda T<1$ отображение $u(g)$ сжимающее в X, т.е. интегральное уравнение

$$u(t,x)=v(t,x)+\lambda\int_0^t d\tau\int(1-u(\tau,y))(Ku)((\tau,y)p(t-\tau,x,y)dy$$

имеет единственное решение $u\in X$.

Замечание. Так как $0\le u(T,x)\le 1,$ то процедуру можно повторить для $t\in(T;2T)$ и т.д., т.е. $0\le u(t,x)\le 1$ для всех t.

Следствие. Решение $u(t,x)$ задачи Коши (4) удовлетворяет оценке

$$v\le u\le 1-(1-v)e^{\lambda t}.$$

Для уравнения (4) также можно построить функции u_1,u_2, являющиеся композицией решений задач Коши. Так, пусть $w(t,x)$ — решение дифференциально-интегрального уравнения

$$\frac{dw}{dt}=\lambda(1-w)\int K(x,y)w(t,y)dy,\ w(0,x)=f(x),0\le f(x)\le 1.$$

Тогда w удовлетворяет интегральному уравнению

$$w(t,x)=1-(1-f(x))\exp\left\{-\lambda\int_0^t d\tau\int K(x,y)w(\tau,y)dy\right\}.$$

Положим

$$u_3(t,x)=1-(1-v(t,x))\exp\left\{-\lambda\int_0^t d\tau\int K(x,y)u_3(\tau,y)dy\right\}. \qquad (5)$$

Проверка неравенства $u_3>u$ описанная выше методом (с помощью невязки) некорректна, так как для уравнения (4) не имеет места принцип максимума. Приведенные ниже результаты вычислительного эксперимента позволяют оценить уклонения функций $u_k(t,x)$ от решения уравнений (1) и (4).

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши для одномерных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\,(1-u) \tag{1A}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{m}(1-u)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t,y)}{\sigma^2 + (x-y)^2}\,dy \tag{4A}$$

с начальным условием Хевисайда $u(0,x) = \theta(x)$. Ядро оператора в (4А) является плотностью Коши (при $\sigma \to 0$ $K(x,y) \to \delta(x-y)$. Для такого начального условия

$$v(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy\,,$$

а функции u_1, u_2, определенные равенством (3), принимают вид

$$u_1(t,x) = v(t,x)\,,\;\; u_2(t,x) = \frac{v(t,x)\exp(t)}{1 - v(t,x) + v(t,x)\exp(t)}.$$

На рис. 1, *а*, 1, *б* приведены пространственно-временные графики функций $u(t,x)$ — решения задачи коши (1а) и u_2 — мажоранты решения.

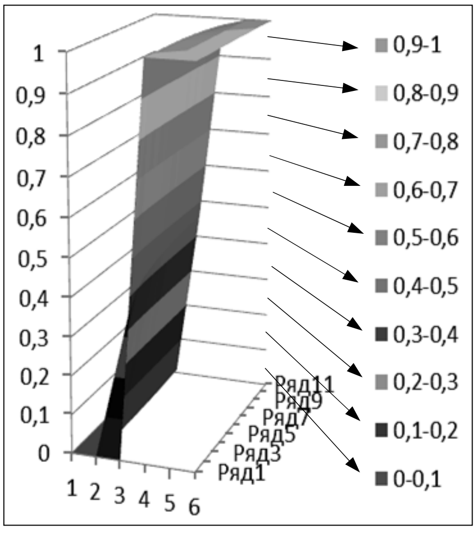

Рис. 1, а

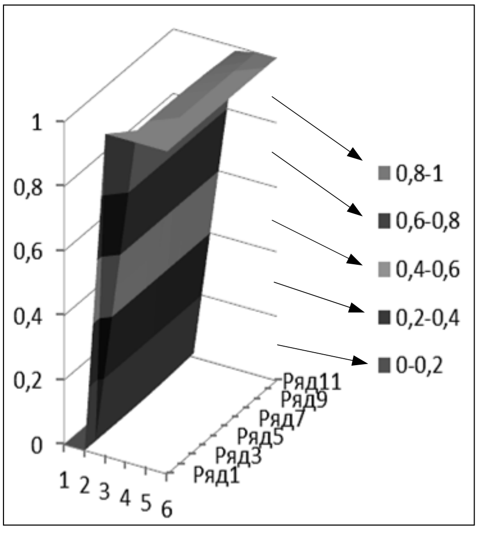

Рис. 1, б

На рис. 2, *а*, 2, *б* и 3, *а*, 3, *б* приведены пространственно-временные графики функций $u(t,x)$ — решения задачи Коши (4А) и $u_3(t,x)$ — решения интегрального уравнения (5) (рис. 2 соответствуют значению $\sigma = 0{,}1$, рис. 3 — $\sigma = 1{,}0$).

Из вычислительного эксперимента следует, что функция $u_3(t,x)$ является мажорантой для решения $u(t,x)$.

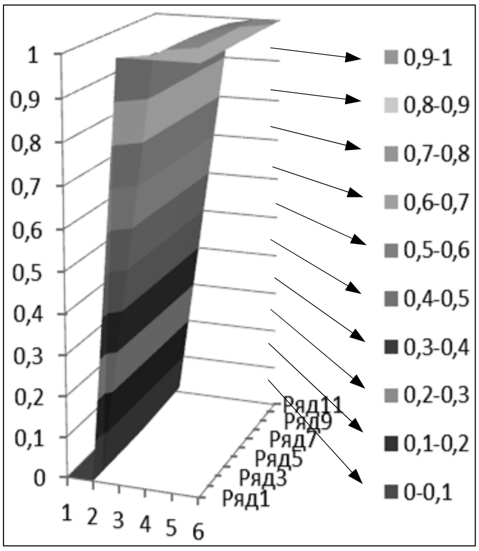

Рис. 2, *а*

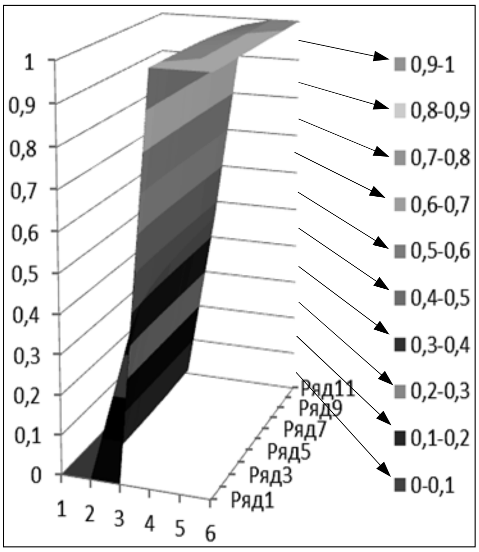

Рис. 2, *б*

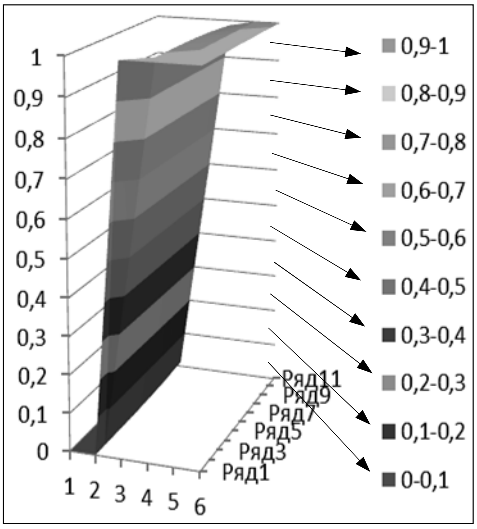

Рис. 3, *а*

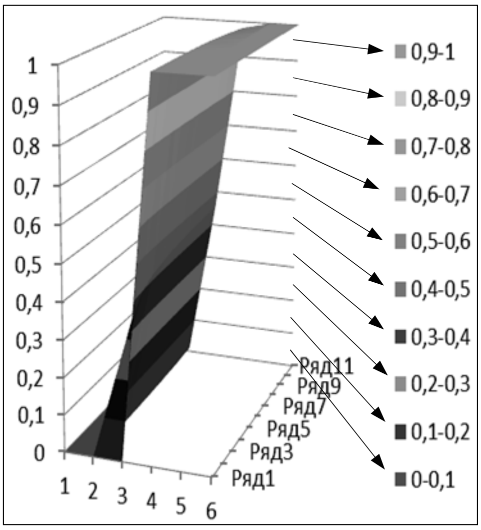

Рис. 3, *б*

ВЫВОДЫ

Для квазилинейного параболического уравнения с локальным выпуклым потенциалом построены барьерные функции — верхняя и нижняя оценки решения задачи Коши. В случае нелокального логистического потенциала, полученного усреднением решения по вероятностной мере, свойство барьерной функции как верхней оценки подтверждено вычислительным экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bramson M.* Converegence of solution of the Kolmogorov equation to travelling waves // Mem. AMS. — 1983. — № 285. — P. 190.

2. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М.: Наука, 1987. — 364 с.
3. *Pertham B., Souganidis P.E.* Front propagation for a jump process model arising in spatial ecology // Discrete and continuous dynamical systems. — **13**. — 2005. — № 5. — P. 1235–1246.
4. *Zhi-Cheng Wang, Wan-Tong Li, Shigni Ruan.* Existence and stability of travelling wave fronts in reaction advection equations with nonlocal delay // J. Differential Equations. — **238**. — 2007. — P. 153–200.
5. *Berestycki H., Nadin G., Perthame B., Ryzhik L.* The non-local Fisher-KPP equation: travelling waves and steady states // Nonlinearity. — **22**. — 2009. — P. 2813–2844.
6. *Фридман А.А.* Уравнения с частными производными параболического типа — М.: Мир, 1968–424 с.
7. *Бондаренко В.Г., Прокопенко Ю.Ю.* Барьерные функции для одного класса полулинейных параболических уравненй // Укр. мат. журнал. — **60**. — 2008. — № 11. — С. 1449–1459.

Поступила 11.07.2012