

УДК 519.2+600.1

# МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ФУНКЦИЙ

И. И. ГОРБАНЬ

Украинский научно-исследовательский и учебный центр  
проблем стандартизации, сертификации и качества, Киев

Получено 24.10.2005

Развит математический аппарат для описания гиперслучайных величин и функций – недетерминированных явлений, для которых не определена вероятностная мера. Для их описания предложено использовать границы соответствующих моментов. Проведено исследование свойств этих характеристик и рассмотрена возможность их применения в задачах акустики.

Розвинуто математичний апарат для опису гіпервипадкових функцій – недетермінованих функцій, для яких імовірнісна міра не визначена. Для їх опису запропоновано використовувати границі відповідних моментів. Проведено дослідження властивостей цих характеристик і розглянуто можливість їх використання у задачах акустики.

A mathematical apparatus is developed for describing the hyper-random values and functions that are non-determined phenomena for which the probability measure is not determined. To describe them the corresponding moment boundaries are proposed. Properties of these characteristics are studied and a possibility of their use in the acoustical problems is considered.

## ВВЕДЕНИЕ

При изучении недетерминированных явлений (событий, величин, процессов, функций) обычно считают, что они носят случайный характер. Однако кроме недетерминированных случайных явлений, для которых определена вероятностная мера [1–3], существуют еще и очень распространенные недетерминированные гиперслучайные явления [4], для которых вероятностная мера не определена. При описании гиперслучайных явлений из-за неопределенности вероятностной меры возникают трудности использования классической теории вероятностей и математической статистики.

В работах [4, 5] разработаны концептуальные основы представления гиперслучайных явлений и предложен математический аппарат описания двух простейших их классов: гиперслучайных событий и гиперслучайных величин. Примерами гиперслучайного события может служить любое событие  $A$ , частота которого  $p_N(A)$  в  $N$  опытах не имеет предела при  $N \rightarrow \infty$ , или событие  $A$ , вероятность которого  $P(A)$  не определена. Для описания гиперслучайных событий предложено использовать две нормированные полумеры, определяемые для события  $A$  как верхняя  $P_S(A)$  и нижняя  $P_I(A)$  границы условной вероятности  $P(A/g)$  это-

го события при условии  $g \in G$ :

$$\begin{aligned} P_S(A) &= \sup_{g \in G} P(A/g), \\ P_I(A) &= \inf_{g \in G} P(A/g). \end{aligned} \quad (1)$$

Когда границы  $P_S(A)$  и  $P_I(A)$  совпадают, гиперслучайное событие вырождается в случайное и величина  $P(A) = P_S(A) = P_I(A)$  может рассматриваться как вероятность случайного события.

Для характеристики гиперслучайных величин введено понятие границ функции распределения, определяемых для гиперслучайной величины  $X$  соответственно как верхняя и нижняя границы вероятности выполнения неравенства  $X \leq x$  в условиях  $g \in G$ :

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \sup_{g \in G} P\{X \leq x/g\}, \\ F_I(x) &= \inf_{g \in G} P\{X \leq x/g\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Установлено, что функции  $F_S(x)$  и  $F_I(x)$  обладают такими же свойствами, как и функция распределения вероятности случайной величины. Кроме того, всегда  $F_S(x) \geq F_I(x)$ . Между границами функции распределения расположена зона неопределенности. Ее ширина определяется разностью  $\Delta F(x) = F_S(x) - F_I(x)$ : чем больше неопределенность, тем больше величина  $\Delta F(x)$ . Если  $X -$

случайная величина, то границы функции распределения совпадают и разность  $\Delta F(x)$  равна нулю. При полной неопределенности гиперслучайной величины  $X$  (полном хаосе [6–9]) верхняя граница функции распределения  $F_S(x) \equiv 1$ , нижняя граница  $F_I(x) \equiv 0$  и разность  $\Delta F(x) \equiv 1$ .

С помощью границ функции распределения гиперслучайной величины, а также их производных (границ плотности распределения и границ характеристической функции) определены вспомогательные характеристики: математические ожидания границ, дисперсии границ, корреляционные и ковариационные функции границ и т. п.

Полученные результаты обобщены на более сложный класс гиперслучайных явлений – гиперслучайные функции (процессы): скалярные и векторные, вещественные и комплексные [10]. Для характеристики скалярной вещественной гиперслучайной функции  $X(t)$  предложено использовать границы функции распределения

$$\begin{aligned} F_S(\vec{x}; \vec{t}) &= \\ &= \sup_{g \in G} P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_M) \leq x_M/g\}, \\ F_I(\vec{x}; \vec{t}) &= \\ &= \inf_{g \in G} P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_M) \leq x_M/g\}, \end{aligned} \quad (3)$$

границы плотности распределения

$$\begin{aligned} f_S(\vec{x}; \vec{t}) &= \frac{\partial^L F_S(\vec{x}; \vec{t})}{\partial x_1, \dots, \partial x_L}, \\ f_I(\vec{x}; \vec{t}) &= \frac{\partial^L F_I(\vec{x}; \vec{t})}{\partial x_1, \dots, \partial x_L}, \end{aligned} \quad (4)$$

а также математические ожидания границ функции  $\phi(X(t_1), \dots, X(t_L))$ , зависящей от  $L$  аргументов, представляющих собой значения  $X_1 = X(t_1), \dots, X_L = X(t_L)$  гиперслучайной функции  $X(t)$  в  $L$  точках:

$$\begin{aligned} M_S[\phi(X(t_1), \dots, X(t_L))] &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \dots, x_L) \times \\ &\quad \times f_S(x_1, \dots, x_L; t_1, \dots, t_L) dx_1 \dots dx_L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_I[\phi(X(t_1), \dots, X(t_L))] &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \dots, x_L) \times \\ &\quad \times f_I(x_1, \dots, x_L; t_1, \dots, t_L) dx_1 \dots dx_L, \end{aligned}$$

в частности, математические ожидания границ  $m_{Sx}(t) = M_S[X(t)]$ ,  $m_{Ix}(t) = M_I[X(t)]$ , дисперсии границ

$$D_{Sx}(t) = D_S[X(t)] = M_S[(X(t) - m_{Sx}(t))^2],$$

$$D_{Ix}(t) = D_I[X(t)] = M_I[(X(t) - m_{Ix}(t))^2]$$

и многие другие характеристики.

Предложенный математический аппарат позволяет эффективно описывать и сравнивать между собой различные гиперслучайные явления, однако его применение сопряжено с определенными трудностями. Связаны они с тем, что основные его составляющие – математические ожидания границ, дисперсии границ, корреляционные и ковариационные моменты границ и пр. – определяются на основе границ функции распределения, а расчет последних – достаточно трудоемкая задача.

В связи с этим представляет интерес разработка другого подхода, позволяющего характеризовать гиперслучайные явления, не прибегая к границам функции распределения. Предпосылкой для этого служат следующие соображения.

В теории вероятностей вероятностные характеристики, в частности функция распределения, исчерпывающе определяют случайную величину или случайный процесс, а моменты представляют случайные явления неоднозначно. Однако совокупность всех моментов полностью характеризует вероятностные характеристики случайного явления. Поэтому и совокупность моментов границ функции распределения однозначно характеризует границы распределения.

Конечно, кроме моментов, существует множество других информативных параметров и характеристик, с помощью которых можно характеризовать гиперслучайные явления. Среди них есть и легко вычисляемые.

Целью данной статьи является развитие математического аппарата описания гиперслучайных величин и функций на основе ряда просто рассчитываемых параметров и характеристик, а также иллюстрация возможности применения предлагаемого подхода для решения практических задач, в частности, акустических.

## 1. ПАРАМЕТРЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для описания скалярной вещественной гиперслучайной величины  $X$  в дополнение к границам функции распределения  $F_S(x)$ ,  $F_I(x)$ , границам плотности распределения  $f_S(x)$ ,  $f_I(x)$ , границам характеристической функции  $Q_S(j\omega)$ ,  $Q_I(j\omega)$ , а

также математическим ожиданиям границ  $m_{sx}$ ,  $m_{Ix}$ , дисперсиям границ  $D_{sx}$ ,  $D_{Ix}$ , среднеквадратическим отклонениям границ  $\sigma_{sx}$ ,  $\sigma_{Ix}$ , и др. [5] можно предложить верхнюю и нижнюю границы математического ожидания величины  $X$ :

$$\begin{aligned} m_{sx} &= \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/g) dx, \\ m_{Ix} &= \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/g) dx, \end{aligned} \tag{5}$$

и границы моментов, определяемых с помощью границ математического ожидания функции  $\phi(X)$ , зависящей в общем случае от условия  $g$ :

$$\begin{aligned} M_s[\phi(X)] &= \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x/g) dx, \\ M_i[\phi(X)] &= \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x/g) dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $f(x/g)$  – плотность распределения гиперслучайной величины  $X$  при условии  $g$ .

Следует обратить внимание на то, что при фиксированном условии  $g$  величина  $X$  представляет собой не гиперслучайную, а случайную величину, для которой определена вероятностная мера. При этом случайной величиной оказывается и функция  $\phi(X/g)$ .

К числу границ моментов относятся верхняя и нижняя границы начального момента  $\nu$ -го порядка

$$\begin{aligned} m_{s\nu} &= M_s[X^\nu] = \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu f(x/g) dx, \\ m_{i\nu} &= M_i[X^\nu] = \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu f(x/g) dx, \end{aligned} \tag{7}$$

а также границы центрального момента  $\nu$ -го порядка

$$\begin{aligned} \mu_{s\nu} &= M_s[(X - m_{x/g})^\nu] = \\ &= \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g})^\nu f(x/g) dx, \\ \mu_{i\nu} &= M_i[(X - m_{x/g})^\nu] = \\ &= \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g})^\nu f(x/g) dx, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $m_{x/g}$  – математическое ожидание распределения при условии  $g$ .

Границы математического ожидания являются границами начального момента первого порядка, а границы центрального момента второго порядка – границами дисперсии  $D_{sx} = \mu_{s2}$ ,  $D_{Ix} = \mu_{i2}$ . Корни из последних двух величин  $\sigma_{sx} = \sqrt{D_{sx}}$ ,  $\sigma_{Ix} = \sqrt{D_{Ix}}$  представляют собой границы среднеквадратических отклонений.

В общем случае операторы  $M_s[\cdot]$ ,  $M_i[\cdot]$  не совпадают с операторами  $M_S[\cdot]$ ,  $M_I[\cdot]$ , а границы моментов гиперслучайной величины  $m_{s\nu}$ ,  $m_{i\nu}$ ,  $\mu_{s\nu}$ ,  $\mu_{i\nu}$  не совпадают с моментами границ функции распределения  $m_{S\nu}$ ,  $m_{I\nu}$ ,  $\mu_{S\nu}$ ,  $\mu_{I\nu}$  [5].

Границы моментов несут информацию не о границах распределения, а о диапазоне изменения этих моментов при изменении условий  $g$  в пределах множеств условий  $G$ . Таким образом, границы моментов и моменты границ – разные параметры, по-разному представляющие гиперслучайную величину.

Для пояснения причин возможных отличий границ характеристик от соответствующих характеристик границ на рис. 1 приведены несколько примеров функций распределения гиперслучайной величины  $X$ .

Из рисунка видно, что условные функции распределения могут не пересекаться (см. рис. 1, а, б) или пересекаться между собой (см. рис. 1, в, г). В случаях а и б границы двух первых моментов совпадают с соответствующими характеристиками границ, в случае в наблюдается частичное, а в случае г – полное несовпадение соответствующих характеристик.

Для описания вещественной векторной гиперслучайной величины  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_L)$  наряду с границами  $L$ -мерной функции распределения  $F_S(\vec{x})$ ,  $F_I(\vec{x})$ ,  $L$ -мерной плотности распределения  $f_S(\vec{x})$ ,  $f_I(\vec{x})$  и  $L$ -мерной характеристической функции можно использовать ряд параметров, основанных на определении границ математического ожидания  $M$ -мерной функции  $\vec{\phi}(\vec{X})$  гиперслучайной величины  $\vec{X}$ :

$$\begin{aligned} M_s[\vec{\phi}(\vec{X})] &= \sum_{m=1}^M \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(x_1, \dots, x_L) \times \\ &\times f(x_1, \dots, x_L/g) dx_1, \dots, dx_L \vec{e}_m, \\ M_i[\vec{\phi}(\vec{X})] &= \sum_{m=1}^M \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(x_1, \dots, x_L) \times \\ &\times f(x_1, \dots, x_L/g) dx_1, \dots, dx_L \vec{e}_m. \end{aligned}$$

Здесь  $\phi_m(x_1, \dots, x_L)$  –  $m$ -ая компонента вектора  $\vec{\phi}(x_1, \dots, x_L)$ ,  $\vec{e}_m$  –  $m$ -ый орт вектора  $\vec{\phi}(x_1, \dots, x_L)$ .

В число этих параметров входят границы  $L$ -мерного математического ожидания  $\vec{m}_{sx}$ ,  $\vec{m}_{ix}$  гиперслучайной величины  $\vec{X}$

$$\vec{m}_{sx} = M_s[\vec{X}], \quad \vec{m}_{ix} = M_i[\vec{X}]$$

и границы  $L$ -мерной дисперсии

$$\vec{D}_{sx} = M_s[(X_l - m_{x_l/g})^2, l = \overline{1, L}],$$

$$\vec{D}_{ix} = M_i[(X_l - m_{x_l/g})^2, l = \overline{1, L}],$$

где  $m_{x_l/g}$  –  $l$ -ая компонента вектора условного математического ожидания  $\vec{m}_{x/g} = M[\vec{X}/g]$ ,  $M[\cdot]$  – оператор математического ожидания.

С помощью границ дисперсии  $\vec{D}_{sx}$ ,  $\vec{D}_{ix}$  можно определить границы  $L$ -мерного среднеквадратического отклонения  $\vec{\sigma}_{sx}$ ,  $\vec{\sigma}_{ix}$  как векторы, компоненты которых представляют собой корни из компонент соответствующих границ дисперсии.

Параметрами гиперслучайной величины  $\vec{X}$  являются границы начальных моментов  $m_{s\nu_1 \dots \nu_L}$ ,  $m_{i\nu_1 \dots \nu_L}$  порядка  $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_L$ , определяемые как

$$m_{s\nu_1 \dots \nu_L} = M_s[X_1^{\nu_1} \dots X_L^{\nu_L}],$$

$$m_{i\nu_1 \dots \nu_L} = M_i[X_1^{\nu_1} \dots X_L^{\nu_L}],$$

и границы центральных моментов  $\mu_{s\nu_1 \dots \nu_L}$ ,  $\mu_{i\nu_1 \dots \nu_L}$  порядка  $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_L$ , определяемые как

$$\mu_{s\nu_1 \dots \nu_L} = M_s[(X_1 - m_{x_1/g})^{\nu_1} \dots (X_L - m_{x_L/g})^{\nu_L}],$$

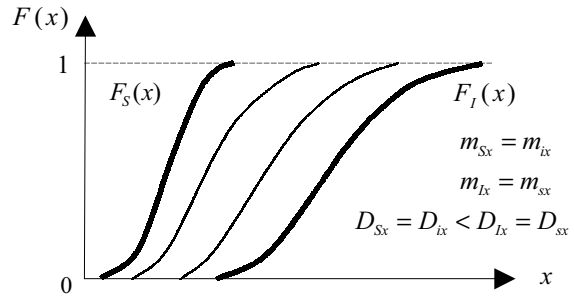
$$\mu_{i\nu_1 \dots \nu_L} = M_i[(X_1 - m_{x_1/g})^{\nu_1} \dots (X_L - m_{x_L/g})^{\nu_L}].$$

В двумерном случае ( $L = 2$ ) границы смешанного начального момента второго порядка  $m_{s11}$  и  $m_{i11}$  будем называть границами ковариационного момента и обозначать  $K_s$ ,  $K_i$ , границы смешанного центрального момента второго порядка  $\mu_{s11}$  и  $\mu_{i11}$  – границами корреляционного момента и обозначать  $R_s$  и  $R_i$ , а корреляционные моменты, нормированные на среднеквадратические отклонения,

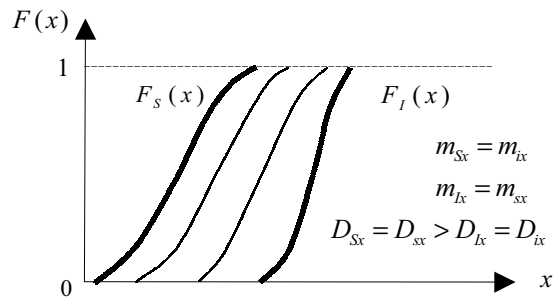
$$r_s = \frac{R_s}{\sigma_{sx_1} \sigma_{sx_2}}, \quad r_i = \frac{R_i}{\sigma_{ix_1} \sigma_{ix_2}} -$$

границами коэффициента корреляции.

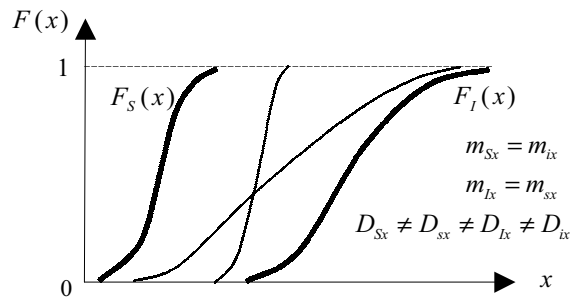
Границы моментов находятся в результате отбора экстремальных значений из множества значений, соответствующих разным условиям  $g \in G$ . При этом разным моментам соответствуют в общем случае разные условия  $g$ . Поэтому границы



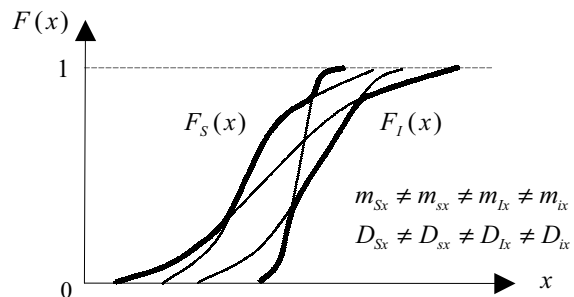
a



б



в



г

Рис. 1. Различные типы функции распределения: тонкими светлыми линиями изображены условные функции распределения  $F(x/g)$ , а жирными темными – границы функции распределения  $F_S(x)$ ,  $F_I(x)$

корреляционного момента  $R_s, R_i$  гиперслучайной величины  $\vec{X} = (X_1, X_2)$ , хотя и определяются границами ковариационного момента  $K_s, K_i$  и границами математических ожиданий  $m_{sx_1}, m_{sx_2}, m_{ix_1}, m_{ix_2}$ , однако

$$R_s \neq K_s - m_{sx_1}m_{sx_2},$$

$$R_i \neq K_i - m_{ix_1}m_{ix_2}.$$

Гиперслучайные функции  $X_1$  и  $X_2$  будем называть некоррелированными при всех условиях, если границы их корреляционных моментов  $R_s$  и  $R_i$  равны нулю.

Гиперслучайные функции  $X_1$  и  $X_2$  будем называть ортогональными при всех условиях, если границы их ковариационных моментов  $K_s$  и  $K_i$  равны нулю.

Надо отметить, что понятия некоррелированности и ортогональности гиперслучайных величин при всех условиях отличаются от введенных в работе [5] понятий некоррелированности и ортогональности, связанных с равенством нулю соответственно ковариационных и корреляционных моментов границ функции распределения.

Следует обратить внимание на то, что совокупность границ всех моментов, в отличие от совокупности всех моментов границ распределения, неоднозначно определяет границы функции распределения.

В отличие от рассмотренных ранее, предлагаемые для описания гиперслучайных величин и функций новые параметры не используют информацию о границах функции распределения. Поэтому их расчет не сопряжен с большими вычислительными затратами.

## 2. ПАРАМЕТРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для описания  $L$ -мерного гиперслучайного комплексного вектора  $\vec{Z} = \vec{X} + j\vec{Y}$  можно использовать границы комплексного математического ожидания

$$\begin{aligned} \dot{m}_{sz} &= \dot{M}_s[\vec{X} + j\vec{Y}] = \\ &= \sum_{l=1}^L \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_l f(x_l/g_{sl}) dx_l + j \int_{-\infty}^{\infty} y_l f(y_l/g_{sl}) dy_l \right] \vec{e}_l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_{iz} &= \dot{M}_i[\vec{X} + j\vec{Y}] = \\ &= \sum_{l=1}^L \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_l f(x_l/g_{il}) dx_l + j \int_{-\infty}^{\infty} y_l f(y_l/g_{il}) dy_l \right] \vec{e}_l, \end{aligned}$$

где  $g_{sl}$  и  $g_{il}$  – значения  $g$ , при которых обеспечиваются соответственно верхняя и нижняя границы функции

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} x_l f(x_l/g) dx_l \right)^2 + \left( \int_{-\infty}^{\infty} y_l f(y_l/g) dy_l \right)^2,$$

и границы моментов, определяемых с помощью границ комплексного математического ожидания  $M$ -мерной комплексной функции  $\vec{\phi}(\vec{Z})$ :

$$\begin{aligned} M_s[\vec{\phi}(\vec{Z})] &= \\ &= \sum_{m=1}^M \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}_m(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L) \times \right. \\ &\quad \left. \times f(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L/g_{sm}) dx_1 dy_1 \dots dx_L dy_L \right] \vec{e}_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i[\vec{\phi}(\vec{Z})] &= \\ &= \sum_{m=1}^M \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}_m(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L) \times \right. \\ &\quad \left. \times f(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L/g_{im}) dx_1 dy_1 \dots dx_L dy_L \right] \vec{e}_m. \end{aligned}$$

Здесь  $\dot{\phi}_m(\vec{Z})$  –  $m$ -ая компонента вектора  $\vec{\phi}(\vec{Z})$ ;  $g_{sm}, g_{im}$  – значения  $g$ , при которых достигается соответственно верхняя и нижняя границы функции

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}_m(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L) \times \right. \\ \left. \times f(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L/g) \right|^2.$$

К числу границ моментов комплексного вектора относятся, в частности, границы комплексной дисперсии  $\vec{D}_{sz}, \vec{D}_{iz}$ , определяемые как границы комплексного математического ожидания вектора

$$\sum_{l=1}^L [(X_l - m_{x_l/g})^2 + (Y_l - m_{y_l/g})^2] \vec{e}_l.$$

С помощью границ комплексной дисперсии можно определить границы комплексного среднеквадратического отклонения  $\vec{\sigma}_{sz}, \vec{\sigma}_{iz}$  как векторы, вещественные компоненты которых равны корню из соответствующих вещественных компонент границ комплексной дисперсии  $\vec{D}_{sz}, \vec{D}_{iz}$ , а мнимые – корню из соответствующих мнимых компонент этих границ.

Границами ковариационного момента комплексной гиперслучайной величины  $\tilde{Z} = X + jY$  назовем величины

$$K_{sz} = M_s[XY], \quad K_{iz} = M_i[XY],$$

а границами корреляционного момента –

$$R_{sz} = M_s[(X - m_{x/g})(Y - m_{y/g})],$$

$$R_{iz} = M_i[(X - m_{x/g})(Y - m_{y/g})].$$

Отметим, что для интегральной характеристики гиперслучайных величин (как вещественных, так и комплексных) можно использовать среднее границ рассмотренных параметров. Следуя принятым в работе [5] обозначениям, для усредненных параметров будем писать дополнительный индекс “0”:  $m_{0x}$ ,  $D_{0x}$ ,  $\vec{m}_{0x}$ ,  $\vec{D}_{0x}$  и т. д.

### 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Для описания скалярной гиперслучайной функции  $X(t)$ , кроме предложенных в работе [10] характеристик (границ функции распределения  $F_S(\vec{x}; \vec{t})$ ,  $F_I(\vec{x}; \vec{t})$ , границ плотности распределения  $f_S(\vec{x}; \vec{t})$ ,  $f_I(\vec{x}; \vec{t})$ , границ характеристической функции  $Q_S(j\vec{\omega}; \vec{t})$ ,  $Q_I(j\vec{\omega}; \vec{t})$ , математических ожиданий границ  $m_{Sx}(t)$ ,  $m_{Ix}(t)$ , дисперсий границ  $D_{Sx}(t)$ ,  $D_{Ix}(t)$ , корреляционных  $R_{Sx}(t_1, t_2)$ ,  $R_{Ix}(t_1, t_2)$  и ковариационных  $K_{Sx}(t_1, t_2)$ ,  $K_{Ix}(t_1, t_2)$  функций границ и пр.), можно использовать ряд других характеристик, аналогичных рассмотренным в разделе 1 для гиперслучайных величин.

Основой этих характеристик являются границы математического ожидания функции  $\phi(\vec{X}; \vec{t}) = \phi(X_1, \dots, X_L; t_1, \dots, t_L/g)$  гиперслучайной функции  $X(t)$ :

$$M_s[\phi(\vec{X}; \vec{t})] = \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x}; \vec{t}) f(\vec{x}; \vec{t}/g) d\vec{x},$$

$$M_i[\phi(\vec{X}; \vec{t})] = \inf_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x}; \vec{t}) f(\vec{x}; \vec{t}/g) d\vec{x}.$$

Частным случаем являются границы математического ожидания

$$m_{sx}(t) = M_s[X(t)], \quad m_{ix}(t) = M_i[X(t)],$$

границы дисперсии

$$D_{sx}(t) = M_s[(X(t) - m_{x/g}(t))^2],$$

$$D_{ix}(t) = M_i[(X(t) - m_{x/g}(t))^2],$$

(где  $m_{x/g}(t) = M[X(t)/g]$  – значение математического ожидания в условиях  $g \in G$ ), а также границы начальных моментов

$$m_{s\nu_1 \dots \nu_L}(t_1, \dots, t_L) = M_s[X^{\nu_1}(t_1) \dots X^{\nu_L}(t_L)],$$

$$m_{i\nu_1 \dots \nu_L}(t_1, \dots, t_L) = M_i[X^{\nu_1}(t_1) \dots X^{\nu_L}(t_L)]$$

порядка  $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_L$  и границы центральных моментов

$$\mu_{s\nu_1 \dots \nu_L}(t_1, \dots, t_L) =$$

$$= M_s[(X(t_1) - m_{x/g}(t_1))^{\nu_1} \dots (X(t_L) - m_{x/g}(t_L))^{\nu_L}],$$

$$\mu_{i\nu_1 \dots \nu_L}(t_1, \dots, t_L) =$$

$$= M_i[(X(t_1) - m_{x/g}(t_1))^{\nu_1} \dots (X(t_L) - m_{x/g}(t_L))^{\nu_L}]$$

порядка  $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_L$ .

Границы смешанного начального момента второго порядка  $m_{s11}(t_1, t_2)$ ,  $m_{i11}(t_1, t_2)$  будем называть границами ковариационной функции и обозначать  $K_{sx}(t_1, t_2)$ ,  $K_{ix}(t_1, t_2)$ , границы смешанного центрального момента второго порядка – называть границами корреляционной функции и обозначать  $R_{sx}(t_1, t_2)$ ,  $R_{ix}(t_1, t_2)$ , а нормированные корреляционные функции – определять следующим образом:

$$r_{sx}(t_1, t_2) = \frac{R_{sx}(t_1, t_2)}{\sigma_{sx}(t_1)\sigma_{sx}(t_2)},$$

$$r_{ix}(t_1, t_2) = \frac{R_{ix}(t_1, t_2)}{\sigma_{sx}(t_1)\sigma_{sx}(t_2)},$$

где  $\sigma_{sx}(t)$  – верхняя граница среднеквадратического отклонения в момент  $t$ , представляющая собой корень из верхней границы дисперсии  $D_{sx}(t)$ .

Как и в случае границ корреляционного и ковариационного моментов гиперслучайных величин, из-за того, что границы корреляционной функции, границы ковариационной функции и границы математического ожидания могут определяться при различных условиях  $g$ , в общем случае

$$R_{sx}(t_1, t_2) \neq K_{sx}(t_1, t_2) - m_{sx}(t_1)m_{sx}(t_2),$$

$$R_{ix}(t_1, t_2) \neq K_{ix}(t_1, t_2) - m_{ix}(t_1)m_{ix}(t_2).$$

Отсчеты гиперслучайной функции  $X(t)$  в моменты  $t_1, t_2$  будем называть некоррелированными при всех условиях, если

$$R_{sx}(t_1, t_2) = R_{ix}(t_1, t_2) = 0,$$

и ортогональными при всех условиях, если

$$K_{sx}(t_1, t_2) = K_{ix}(t_1, t_2) = 0.$$

Отметим, что понятия некоррелированности и ортогональности отсчетов функции, введенные в работе [10] для описания ситуаций, когда соответствующие корреляционные и ковариационные функции границ распределения равны нулю, отличаются от предлагаемых понятий.

Из некоррелированности и ортогональности отсчетов не следует соответственно некоррелированность и ортогональность при всех условиях. В общем случае и из некоррелированности и ортогональности отсчетов при всех условиях не следует соответственно их некоррелированность и ортогональность. Последнее обстоятельство связано с тем, что границы функции распределения  $F_S(\vec{x}; \vec{t})$ ,  $F_I(\vec{x}; \vec{t})$  не всегда принадлежат множеству условных функций распределения  $F(\vec{x}; \vec{t}/g)$ ,  $g \in G$ .

Если границы функции распределения все же принадлежат этому множеству, то из некоррелированности и ортогональности отсчетов при всех условиях следует соответственно их некоррелированность и ортогональность. Обратное утверждение неверно.

Следует обратить внимание, что также как и в случае гиперслучайных величин, множество границ всех моментов неоднозначно определяет границы распределения.

#### 4. ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Основой описания комплексной гиперслучайной функции  $\dot{Z}(t) = X(t) + jY(t)$  могут выступать границы комплексного математического ожидания функции  $\dot{\phi}(x_1(t_1), y_1(t_1), \dots, x_L(t_1), y_L(t_1))$ :

$$\begin{aligned} M_s[\dot{\phi}(\dot{Z}(t_1), \dots, \dot{Z}(t_L))] &= \\ &= \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L) \times \\ &\times f(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L; t_1, \dots, t_L/g_s) \times \\ &\times dx_1 dy_1, \dots, dx_L dy_L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i[\dot{\phi}(\dot{Z}(t_1), \dots, \dot{Z}(t_L))] &= \\ &= \sup_{g \in G} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L) \times \\ &\times f(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L; t_1, \dots, t_L/g_i) \times \\ &\times dx_1 dy_1, \dots, dx_L dy_L, \end{aligned}$$

где  $g_s, g_i$  – значения  $g$ , при которых достигаются соответственно верхняя и нижняя границы функции

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L) \times \right. \\ \left. \times f(x_1, y_1, \dots, x_L, y_L; t_1, \dots, t_L/g) \times \right. \\ \left. \times dx_1 dy_1, \dots, dx_L dy_L \right|^2. \end{aligned}$$

В частности, когда  $\dot{\phi}(\dot{Z}(t)) = X(t) + jY(t)$ , получаем границы математического ожидания

$$\begin{aligned} \dot{m}_{sz}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; t/g_s) dx + j \int_{-\infty}^{\infty} y f(y; t/g_s) dy, \\ \dot{m}_{iz}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; t/g_i) dx + j \int_{-\infty}^{\infty} y f(y; t/g_i) dy, \end{aligned}$$

когда  $\dot{\phi}(\dot{Z}(t)) = (X(t) - m_{x/g}(t))^2 + j(Y(t) - m_{y/g}(t))^2$ , имеем границы дисперсии

$$\begin{aligned} \dot{D}_{sz}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g_s}(t))^2 f(x; t/g_s) dx + \\ &+ j \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{y/g_s}(t))^2 f(y; t/g_s) dy, \\ \dot{D}_{iz}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g_i}(t))^2 f(x; t/g_i) dx + \\ &+ j \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{y/g_i}(t))^2 f(y; t/g_i) dy. \end{aligned}$$

#### 5. МОДЕЛИ АКУСТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Рассмотрим возможности использования предложенного математического аппарата для описания акустических явлений на примере задачи

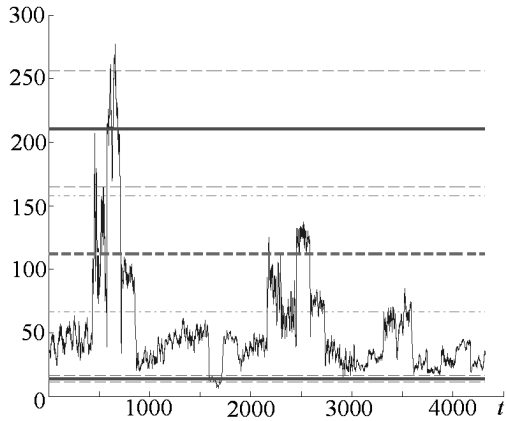


Рис. 2. Результаты измерения уровня шума в производственном помещении (изрезанная кривая) и оценки границ математического ожидания  $m_{sx}^*$ ,  $m_{ix}^*$  (жирные прямые), границ среднеквадратического отклонения  $m_{sx}^* \pm \sigma_{sx}^*$ ,  $m_{ix}^* \pm \sigma_{ix}^*$  (штриховые прямые) и тех же усредненных параметров (жирная штриховая прямая посередине для усредненных границ математического ожидания  $m_{0x}^*$  и штрих-пунктирные прямые – для усредненных границ среднеквадратического отклонения  $m_{0x}^* \pm \sigma_{0x}^*$ )

измерения уровня шума в производственном помещении с большим количеством единиц технологического оборудования. Измерения проводятся с помощью измерительного прибора, периодически регистрирующего данные на протяжении рабочей смены, в течение которой условия наблюдения меняются в широких пределах. Эту задачу можно сформулировать по-разному. Ее можно свести к классической оценке значения случайной величины или к классической оценке параметров случайной функции, если считать, что при фиксированных условиях закон изменения уровня шума носит случайный характер, а меняющиеся условия наблюдения – тоже случайны. Естественно, при этом надо знать законы распределения всех случайных явлений.

Если при фиксированных условиях закон распределения уровня шума неизвестен или случаен и, главное, неизвестен закон распределения условий, то задача носит гиперслучайный характер. В этом случае всю совокупность данных, полученных в результате измерения, можно считать выборкой из генеральной совокупности гиперслучайной величины или, как будем полагать далее, гиперслучайной функции.

Допустим, что условия меняются достаточно медленно. При этом интервал наблюдения можно разделить на примыкающие друг к другу фрей-

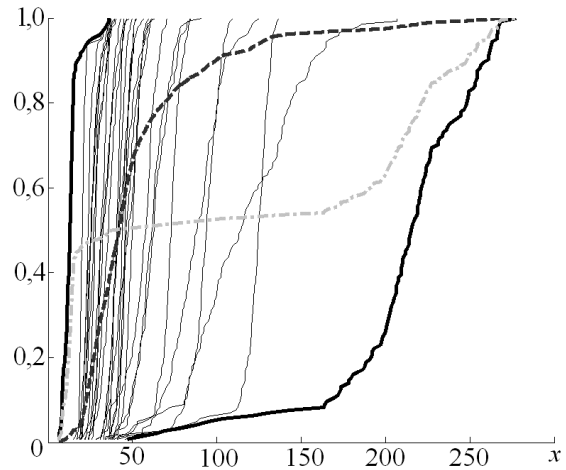


Рис. 3. Оценки функции распределения  $F^*(x/g)$ ,  $F^*(x/g)$  при различных условиях  $g \in G$  (тонкие кривые), оценки границ функции распределения  $F_{S^*}^*(x)$ ,  $F_{I^*}^*(x)$  (темные жирные кривые), средняя оценка границ функции распределения  $F_{0^*}^*(x)$  (светлая жирная кривая) и оценка функции распределения, полученная из всего объема данных  $F^*(x)$  (темная штриховая кривая)

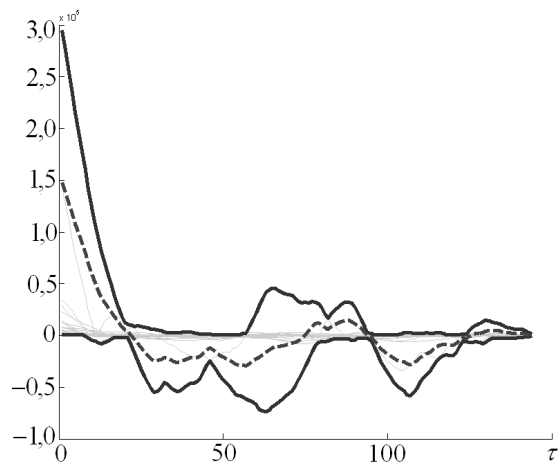


Рис. 4. Оценки корреляционной функции при различных условиях  $R_x^*(\tau/g)$  (светлые кривые), оценки границ корреляционной функций  $R_{sx}^*(\tau)$ ,  $R_{ix}^*(\tau)$  (жирные непрерывные кривые) и оценка усредненных границ корреляционной функции  $R_{0x}^*(\tau)$  (жирная штриховая кривая)

мы длительностью  $T$ , в пределах которых условия можно считать неизменными.

При неизвестном законе распределения условий множество отсчетов фреймов, соответствующих определенным фиксированным условиям  $g$ , можно рассматривать как реализацию гиперслу-



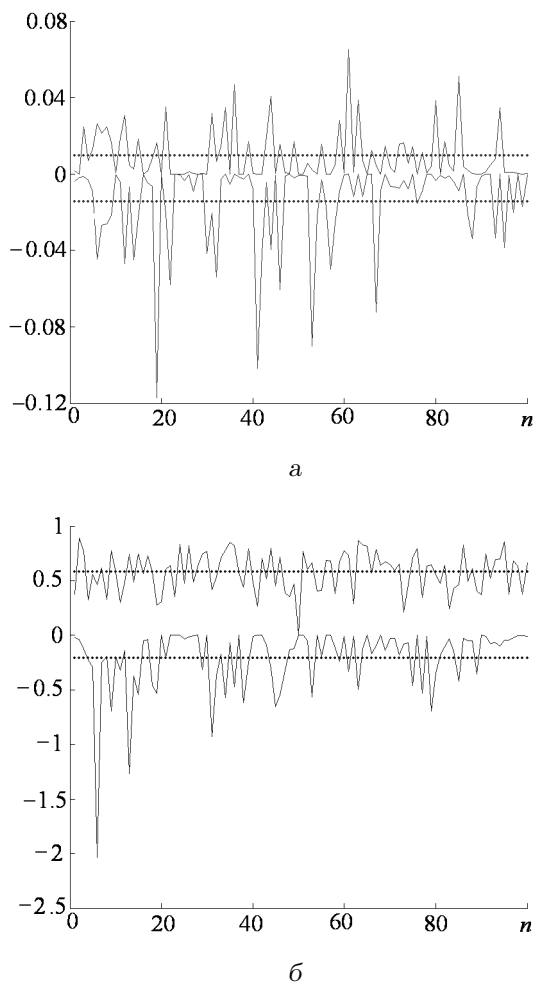


Рис. 5. Относительные отклонения оценок математических ожиданий границ  $m_{Sx}^*$ ,  $m_{Ix}^*$  от границ математического ожидания  $m_{Sx}^*$ ,  $m_{Ix}^*$  (а) и оценок среднеквадратических отклонений границ  $\sigma_{Sx}^*$ ,  $\sigma_{Ix}^*$  от границ среднеквадратического отклонения  $\sigma_{Sx}^*$ ,  $\sigma_{Ix}^*$  (б), зафиксированных в ста сериях измерений. Верхние кривые соответствуют величинам  $(m_{Ix}^* - m_{Sx}^*)/m_{Ix}^*$ ,  $(\sigma_{Sx}^* - \sigma_{Ix}^*)/\sigma_{Sx}^*$ , а нижние –  $(m_{Sx}^* - m_{Ix}^*)/m_{Sx}^*$ ,  $(\sigma_{Ix}^* - \sigma_{Sx}^*)/\sigma_{Ix}^*$

чайной функции  $X(t)$ , ( $t \in (0, T)$ ), а всю совокупность фреймов – как выборку из генеральной совокупности этой функции.

Обработывая упорядоченные таким образом данные, можно получить различные характеристики: оценки границ функции распределения  $F_S^*(\vec{x}; \vec{t})$ ,  $F_I^*(\vec{x}; \vec{t})$ , математических ожиданий границ  $m_{Sx}^*(t)$ ,  $m_{Ix}^*(t)$ , дисперсий границ  $D_{Sx}^*(t)$ ,  $D_{Ix}^*(t)$ , ковариационных функций границ  $K_{Sx}^*(t_1, t_2)$ ,  $K_{Ix}^*(t_1, t_2)$ , корреляционных функций границ  $R_{Sx}^*(t_1, t_2)$ ,  $R_{Ix}^*(t_1, t_2)$  и др., а также оценки границ математического ожидания  $m_{Sx}^*(t)$ ,  $m_{Ix}^*(t)$ , границ дисперсии  $D_{Sx}^*(t)$ ,  $D_{Ix}^*(t)$ , границ ковари-

ационной функции  $K_{Sx}^*(t_1, t_2)$ ,  $K_{Ix}^*(t_1, t_2)$ , границ корреляционной функции  $R_{Sx}^*(t_1, t_2)$ ,  $R_{Ix}^*(t_1, t_2)$  и пр. Представление об исследуемом процессе и оценках различных его характеристик в предположении, что процесс обладает свойством стационарности, при котором границы математического ожидания не зависят от времени, а границы корреляционной функции определяются разностью аргументов (т. е.  $m_{Sx}^*(t) = m_{Sx}^*$ ,  $m_{Ix}^*(t) = m_{Ix}^*$ ,  $D_{Sx}^*(t) = D_{Sx}^*$ ,  $D_{Ix}^*(t) = D_{Ix}^*$ ,  $R_{Sx}^*(t_1, t_2) = R_{Sx}^*(\tau)$ ,  $R_{Ix}^*(t_1, t_2) = R_{Ix}^*(\tau)$ , где  $\tau = t_2 - t_1$ ), дают рис. 2–4.

Из рисунков видно, что оценки границ математического ожидания  $m_{Sx}^*$ ,  $m_{Ix}^*$ , границ среднеквадратического отклонения  $\sigma_{Sx}^*$ ,  $\sigma_{Ix}^*$  и границы корреляционной функции  $R_{Sx}^*(\tau)$ ,  $R_{Ix}^*(\tau)$  несут много полезной информации о рассматриваемом гиперслучайном процессе, в первую очередь, о диапазоне изменения параметров и характеристик. Информативными являются и усредненные параметры (среднее границ математического ожидания  $m_{0x}^*$ , среднее границ среднеквадратического отклонения  $\sigma_{0x}^*$ ) и среднее границ корреляционной функции  $R_{0x}^*(\tau)$ .

Некоторые результаты сравнительного анализа оценок моментов границ распределения с оценками границ моментов представлены на рис. 5. Как видно из графиков, математическое ожидание верхней границы практически совпадает с нижней границей математического ожидания, а математическое ожидание нижней границы – с верхней границей математического ожидания ( $m_{Sx}^*(t) \approx m_{Ix}^*(t)$ ,  $m_{Ix}^*(t) \approx m_{Sx}^*(t)$ ). Относительная погрешность в обоих случаях составляет несколько процентов. Дисперсия же верхней границы распределения в целом не совпадает с нижней границей дисперсии, а дисперсия нижней границы – с верхней границей дисперсии ( $D_{Sx}^*(t) \neq D_{Ix}^*(t)$ ,  $D_{Ix}^*(t) \neq D_{Sx}^*(t)$ ), хотя в отдельных случаях и наблюдается примерное равенство соответствующих величин. Таким образом, тип функции распределения близок к типу, приведенному на рис. 1, в.

Исследование ряда других гиперслучайных явлений показывает, что этот тип распределения достаточно распространен, причем не только в акустике. Часто встречается и распределение типа рис. 1, а.

## ВЫВОДЫ

1. Разработан новый подход к описанию гиперслучайных величин и функций, позволяющий характеризовать гиперслучайные явления, не прибегая к расчету границ функции распределения. Его основой служит вычисление гра-

ниц центральных и нецентральных моментов: математического ожидания, дисперсии, корреляционного момента, ковариационного момента и пр.

2. Границы моментов гиперслучайного явления и моменты границ функции распределения – разные понятия. В общем случае границы моментов не совпадают с соответствующими моментами границ.
3. Зачастую верхняя граница математического ожидания гиперслучайного явления близка к математическому ожиданию нижней границы распределения, а нижняя граница математического ожидания – к математическому ожиданию верхней границы распределения.
4. При вычислении границ моментов не требуется информация о границах функции распределения. Поэтому, в отличие от моментов границ, их расчет не сопряжен с большими вычислительными затратами.
5. Область практического применения предлагаемого подхода охватывает различные акустические, гидроакустические, гидродинамические, радиотехнические и другие задачи, в

которых присутствует неопределенность гиперслучайного типа.

1. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика.– М.: Наука, 1986.– 535 с.
2. Корольок В.С. и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике.– М.: Наука, 1985.– 637 с.
3. Горбань І. І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників і інженерів.– К.: ПІММС НАН України, 2003.– 244 с.
4. Горбань И. И. Случайность, гиперслучайность, хаос и неопределенность // Стандартизація, сертифікація, якість.– 2005.– N 3.– С. 41–48.
5. Горбань И. И. Гиперслучайные явления и их описание // Акуст. вісн.– 2005.– 8, N 1-2.– С. 16–27.
6. Гринченко В. Т., Мацьшура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы.– К.: Наук. думка, 2005.– 263 с.
7. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах.– М.: Постмаркет, 2000.– 350 с.
8. Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu. Turbulence, ideal // Encyclopedia of nonlinear science.– London: Taylor Francis, 2005.– P. 955–957.
9. Шустер Г. Детерминированный хаос.– М.: Мир, 1988.– 240 с.
10. Горбань И. И. Гиперслучайные функции и их описание // Радиоэлектроника.– 2006.– N 1.– С. 3–15 (в печати).