УДК 517.929.4; 517.962.24

УМОВИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ І ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА

О.М. БАШНЯКОВ, В.В. ПІЧКУР, І.В. ХІТЬКО

Розглянуто питання побудови оптимальних оцінок множин початкових даних та фазових обмежень для дискретних систем за допомогою методу функцій Ляпунова. Для лінійних дискретних систем за опуклих фазових обмежень одержано оптимальні оцінки множини початкових умов у вигляді кулі та еліпсоїда.

ВСТУП

Дослідження, пов'язані з дискретними системами, широко представлені в науковій літературі у зв'язку з розвитком обчислювальних методів і підходів до моделювання та оптимізації складних систем. Крім того, поведінка значної кількості біологічних, соціальних, економічних, технічних систем описуються дискретними системами [1–6]. Результати, пов'язані з аналізом стійкості дискретних систем на основі методу функцій Ляпунова, висвітлено в роботах [7–22]. Важливим із прикладної точки зору є дослідження стійкості на фіксованому інтервалі часу при заданих фазових обмеженнях. Основні підходи до задач практичної стійкості висвітлено в роботах [8, 9, 15, 16, 23–25], у працях [8, 9, 16, 24] розвиваються методи практичної стійкості дискретних систем. При цьому центральною постановкою є задача про знаходження оптимальної множини початкових умов та її оцінка в еліпсоїдальних формах. Такі задачі мають значне прикладне значення. Наприклад, для розрахунку області захоплення частинок у процес прискорення, у системах прискорення і фокусування необхідно застосовувати чисельні алгоритми визначення оптимальних областей практичної стійкості [8, 23].

Робота присвячена побудові оптимальних оцінок множин початкових даних та фазових обмежень для дискретних систем за допомогою методу функцій Ляпунова. Одержано необхідні та достатні умови практичної стійкості, запропоновано підхід до знаходження функції Ляпунова. На основі отриманих тверджень досліджується задача практичної стійкості лінійних дискретних систем за опуклих фазових обмежень. Одержано оптимальні оцінки множини початкових умов у вигляді кулі та еліпсоїда, а також оцінки фазових обмежень за умови поділу.

Мета роботи — побудова необхідних і достатніх умов практичної стійкості дискретних систем із використанням функції Ляпунова, а також знаходження оптимальних оцінок множини початкових умов у вигляді кулі та еліпсоїда, і оцінок фазових обмежень у задачі практичної стійкості лінійних дискретних систем за опуклих фазових обмежень.

ТЕОРЕМА ПРО ПРАКТИЧНУ СТІЙКІСТЬ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Розглянемо дискретну систему

$$x(k+1) = f_k(x(k)), \quad k = 0,1,\dots,N-1, \tag{1}$$

де $f_k(x): D \to D$ — n-вимірні вектор-функції, $D \subset R^n$. Позначимо $x(k) = x(k, x_0)$ — розв'язок системи (1) за умови $x(0) = x_0$, $k = 0,1,\dots,N$. Нехай $G_0 \subset D$ — множина початкових умов, $\Phi_k \subset D$, $k = 0,1,\dots,N$ — множина фазових обмежень, $0 \in \operatorname{int}\Phi_k$, $k = 0,1,\dots,N$, $f_k(0) = 0$, $k = 0,1,\dots,N-1$.

Означення 1 [8]. Нульовий розв'язок системи (1) називається $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$-стійким (внутрішньо $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$-практично стійким), якщо $x(k, x_0) \in \Phi_k$, для всіх $x_0 \in G_0$, $k = 0,1,\dots,N$.

Максимальну за включенням множину всіх початкових умов, для яких виконується означення 1, позначимо G_*.

Лема 1. Якщо для функції $f: D \to D$, $D \subset R^n$ виконується умова $a\|x - y\| \le \|f(x) - f(y)\|$, $a > 0$, $x, y \in D$, то функція f є ін'єктивною в області D.

Доведення. Нехай існує $z \in D$ таке, що $f(x) = z$, $f(y) = z$ та $x \ne y$. Тоді $0 = \|z - z\| = \|f(x) - f(y)\| \ge a\|x - y\|$. Звідси отримуємо $x = y$. Лему доведено.

Теорема 1. Нехай Φ_k, $k = 0,1,\dots,N$ — компакти, функції $f_k(x)$, $k = 0,1,\dots,N-1$ неперервні в області D і знайдуться такі додатні константи a_k, $k = 0,1,\dots,N-1$, що $a_k\|x - y\| \le \|f_k(x) - f_k(y)\|$, $x, y \in D$, $k = 0,1,\dots$ $\dots,N-1$. Для того, щоб система (1) була $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$-стійкою необхідно і достатньо, щоб існували функції Ляпунова $V_k(x)$, $k = 0,1,\dots,N$ такі, щоб справджувалися співвідношення:

$$G_0 \subseteq \{x \in R^n : V_0(x) \le 1\}, \tag{2}$$

$$\{x \in R^n : V_k(x) \le 1\} \subseteq \Phi_k, \; k = 0,1,\dots,N, \tag{3}$$

$$V_{k+1}(f_k(x)) \le V_k(x), \; k = 0,1,\dots,N-1. \tag{4}$$

Доведення. **Достатність** [8]. Доведемо від супротивного. Нехай існують функції $V_k(x)$, $k = 0,1,\dots,N$, що задовольняють умовам (2)–(4), але для розв'язку системи (1) порушується означення 1. Тоді знайдуться $\bar{x}_0 \in G_0$, $0 \le \bar{k} \le N$ такі, що $x(\bar{k}, \bar{x}_0) \notin \Phi_{\bar{k}}$. Згідно з (3) $V_{\bar{k}}(x(\bar{k}, \bar{x}_0)) > 1$. Враховуючи (4), отримуємо $1 < V_{\bar{k}}(x(\bar{k}, \bar{x}_0)) \le V_{\bar{k}-1}(x(\bar{k}-1, \bar{x}_0)) \le \ldots \le V_0(x(0, \bar{x}_0))$. З умови (2) маємо $\bar{x}_0 \notin G_0$, що суперечить припущенню.

Необхідність. Оскільки Φ_k, $k = 0,1,\dots,N$ — компакти, то оптимальна за включенням множина початкових умов G_* є компакт. Нехай $\alpha(\cdot)$ — визначальна функція множини G_*. Це означає, що $\alpha(\cdot)$ є неперервною функцією з R^n в R^1, функція $\alpha(x) < 1$ при $x \in \operatorname{int} G_*$, $\alpha(x) = 1$ при $x \in \partial G_*$ та $\alpha(x) > 1$, якщо $x \notin G_*$ [23]. З леми 1 випливає, що існують обернені функції $\psi_k(x)$, $k = 1,\dots,N$ такі, що $x(k-1) = \psi_k(x(k))$, $k = 1,2,\dots,N$. Введемо функцію $\psi_0(x) = x$. Тоді $x_0 = x(0) = \varphi_k(x) = \psi_0(\psi_1(\dots(\psi_k(x))\dots)$, $k = 0,1,\dots,N$.

Виберемо функції Ляпунова у вигляді $V_k(x) = \alpha(\varphi_k(x))$, $k = 0,1,\dots,N$ і покажемо, що вони задовольняють умовам (2)–(4). Для довільного $x_0 \in G_0 \subseteq G_*$ маємо $V_0(x_0) = \alpha(\varphi_0(x_0)) = \alpha(x_0) \le 1$. Отже, умова (2) виконується. Справджується рівність $V_k(x(k, x_0)) = \alpha(x_0)$, $k = 0,1,\dots,N$, тому умова (4) теж виконується. Припустимо, що існують $\bar{x}_0 \in G_0$ та $0 \le \bar{k} \le N$ такі, що $V_{\bar{k}}(x(\bar{k}, \bar{x}_0) \le 1$, але $x(\bar{k}, \bar{x}_0) \notin \Phi_{\bar{k}}$. Тоді $V_{\bar{k}}(x(\bar{k}, \bar{x}_0)) = \alpha(\varphi_{\bar{k}}(x)) = \alpha(\bar{x}_0) \le 1$. За означенням визначальної функції $\bar{x}_0 \in G_*$, а отже $x(k, \bar{x}_0) \in \Phi_k$, $k = 0,1,\dots,N$. Це суперечить припущенню. Отже, умова (3) виконується. Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо фазові обмеження Φ_k, $k = 0,1,\dots,N$ — компакти, то для дослідження $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$-стійкості можна використовувати функцію Ляпунова у вигляді:

$$V_k(x) = \begin{cases} 1 + \min\limits_{y \in \partial G_0} \|\varphi_k(x) - y\|, & x \in \{z : \varphi_k(z) \in D \setminus G_*\}, \\ 1 - \min\limits_{y \in \partial G_0} \|\varphi_k(x) - y\|, & x \in \{z : \varphi_k(z) \in G_*\}. \end{cases}$$

УМОВИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ ФАЗОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ У ФОРМІ МНОГОКУТНИКА

Розглянемо лінійну однорідну систему

$$x(k+1) = A_k x(k), \quad k = 0,1,\dots,N-1, \tag{5}$$

де A_k — невироджені матриці розмірності $n \times n$. Нехай множина початкових даних обирається з класу

$$W_1 = \{K_r(0) : r \ge 0\}, \tag{6}$$

де $K_r(0)$ — круг радіуса r із центром у початку координат. Фазові обмеження задаються у формі многокутника

$$\Phi_k = \bigcap_{s=1}^{n} \{x \in R^n : |\langle l_{sk}, x\rangle| \le 1\}, \quad k = 0,1,\dots,N, \tag{7}$$

де $\{l_{sk}\}_{s=1}^{n}$ — системи лінійно незалежних векторів, $k = 0,1,\dots,N$. Розв'язок системи (5) можна записати у вигляді $x(k) = Q_k x(0)$, $Q_k = A_{k-1}\dots A_0$, $k = 1,\dots,N$. Позначимо $Q_0 = I$, де I — одинична матриця. Оскільки матриці A_k, $k = 0,1,\dots,N$ — невироджені, то покладемо $\varphi_k(x) = Q_k^{-1}x$, $k = 0,1,\dots,N$. Згідно з наслідком до теореми 1 функцію Ляпунова можна вибирати у вигляді:

$$V_k(x) = \begin{cases} 1 + \min\limits_{y \in \{x : \|x\| = r\}} \left\| Q_k^{-1}x - y \right\|, & x \in \{z : Q_k^{-1}z \in R^n \setminus G_*\}; \\ 1 - \min\limits_{y \in \{x : \|x\| = r\}} \left\| Q_k^{-1}x - y \right\|, & x \in \left\{z : Q_k^{-1}z \in G_*\right\}. \end{cases}$$

Оскільки для $k = 0,1,\dots,N$ виконується

$$\min_{y \in \{x : \|x\| = r\}} \left\| Q_k^{-1}x - y \right\| = \left\| Q_k^{-1}x - \frac{Q_k^{-1}x}{\left\| Q_k^{-1}x \right\|} r \right\| = \left| \left\| Q_k^{-1}x \right\| - r \right| =$$

$$= \begin{cases} \left\| Q_k^{-1}x \right\| - r, x \in \{z : Q_k^{-1}z \in R^n \setminus G_*\}, \\ r - \left\| Q_k^{-1}x \right\| - r, x \in \{z : Q_k^{-1}z \in G_*\}, \end{cases}$$

то функція Ляпунова записується так

$$V_k(x) = 1 - r + \left\| Q_k^{-1}x \right\|, \ k = 0,1,\dots,N. \tag{8}$$

Знайдемо оптимальні оцінки для множини початкових даних, використовуючи (8) та теорему 1. Для цього визначимо параметр r так, щоб траєкторії системи задовольняли фазові обмеження $\left| \langle l_{sk}, x \rangle \right| \le 1$, $s = 1,2,\dots,n$, $k = 0,1,\dots,N$, при $V_k(x) \le 1$, $k = 0,1,\dots,N$. З $V_k(x) \le 1$ випливає $\left\| Q_k^{-1}x \right\| \le r$, $k = 0,1,\dots,N$. Звідси

$$\left| \langle l_{sk}, x \rangle \right| = \left| \langle l_{sk}, Q_k Q_k^{-1}x \rangle \right| = \left| \langle Q_k^T l_{sk}, Q_k^{-1}x \rangle \right| \le r \left\| Q_k^T l_{sk} \right\| =$$

$$= r\sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}, \quad s = 1,2,\dots,n, \ k = 0,1,\dots,N. \tag{9}$$

Для того, щоб система була $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$-стійкою достатньо, необхідно виконання такої нерівності $r\sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle} \le 1$, де $k = 0,1,\dots,N$, $s = 1,2,\dots,n$, тобто $r \le \min\limits_{k=0,1,\dots N} \min\limits_{s=1,2,\dots n} \dfrac{1}{\sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}}$.

Таким чином має місце твердження.

Теорема 2. Оптимальна оцінка множини практичної стійкості системи (5) у класі (6) при фазових обмеженнях (7) має вигляд

$$r^* = \min_{k=0,1,...N} \min_{s=1,2,...n} \frac{1}{\sqrt{\left\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \right\rangle}},$$

де $Q_k = A_{k-1}...A_0$, $k = 1,2,...,N$, $Q_0 = I$.

Нехай множина початкових даних обирається в класі еліпсоїдів

$$W_2 = \left\{E_r(0,B) : r \ge 0\right\}, \tag{10}$$

де $E_r(0,B) = \{z : \left\langle Bz, z\right\rangle \le r^2\}$, B — додатно визначена симетрична матриця розмірності $n \times n$. Тоді функція Ляпунова записується у вигляді:

$$V_k(x) = \begin{cases} 1 + \min\limits_{y \in \{x: \langle Bx,x\rangle = r^2\}} \left\| B^{\frac{1}{2}} (Q_k^{-1} x - y) \right\|, & x \in \{x : Q_k^{-1} x \in R^n \setminus G_*\}, \\ 1 - \min\limits_{y \in \{x: \langle Bx,x\rangle = r^2\}} \left\| B^{\frac{1}{2}} (Q_k^{-1} x - y) \right\|, & x \in \{x : Q_k^{-1} x \in G_*\}. \end{cases} =$$

$$= 1 - r + \left\| B^{\frac{1}{2}} Q_k^{-1} x \right\|,$$

$k = 0,1,...,N$. Оптимальна оцінка множини практичної стійкості в цьому випадку має вигляд

$$r^* = \min_{k=0,1,...N} \min_{s=1,2,...n} \frac{1}{\sqrt{\left\langle Q_k B^{-1} Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \right\rangle}}.$$

Розглянемо лінійну неоднорідну систему

$$x(k+1) = A_k x(k) + b_k, \; k = 0,1,...,N-1, \tag{11}$$

де A_k — невироджені матриці $n \times n$, b_k — вектор із R^n, $k = 0,1,...,N-1$ при фазових обмеженнях (7). Знайдемо оптимальні оцінки для множини початкових даних у класі (6).

Розв'язок системи (11) можна записати у вигляді:

$$x(k) = Q_k x(0) + g_k, \; k = 1,2,...,N,$$

де $Q_k = A_{k-1}...A_0$, $g_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} A_{k-1} A_{k-2} ... A_j b_{j-1} + b_k$, $k = 1,2,...,N$.

Позначимо $Q_0 = I$, $g_0 = 0$. Оскільки $0 \in \operatorname{int} \Phi_k$, то $\left|\left\langle l_{sk}, g_k \right\rangle\right| < 1$, $s = 1,2,...,n$, $k = 0,1,...,N$, і функцію Ляпунова можна вибирати у вигляді:

$$V_k(x) = 1 - r + \left\| Q_k^{-1}(x - g_k) \right\|, \; k = 0,1,...,N.$$

Таким чином отримаємо твердження.

Теорема 3. Оптимальна оцінка множини практичної стійкості системи (11) в класі (6) при фазових обмеженнях (7) має вигляд:

$$r^* = \min_{k=0,1,...N} \min_{s=1,2,...n} \frac{1 - \left|\left\langle l_{sk}, g_k \right\rangle\right|}{\sqrt{\left\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \right\rangle}},$$

де $Q_k = A_{k-1}...A_0$, $g_k = \sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1}A_{k-2}...A_j b_{j-1} + b_k$, $k = 1,2,...,N$, $Q_0 = I$, $g_0 = 0$.

Зауважимо, що якщо для системи (11) множина початкових даних обирається в класі (10), то функція Ляпунова записується у вигляді:

$$V_k(x) = 1 - r + \left\| B^{1/2} Q_k^{-1}(x - g_k) \right\|, \ \ k = 0,1,...,N.$$

Оптимальна оцінка множини початкових умов у цьому випадку записується так

$$r^* = \min_{k=0,1,...N} \min_{s=1,2,...n} \frac{1 - \left|\left\langle l_{sk}, g_k \right\rangle\right|}{\sqrt{\left\langle Q_k B^{-1} Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \right\rangle}}.$$

ОПУКЛІ ФАЗОВІ ОБМЕЖЕННЯ

Розглянемо випадок, коли фазові обмеження задаються опуклими компактними множинами $\Phi_k \subset R^n$, $k = 0,1,...,N$. Тоді фазові обмеження можна подати у вигляді:

$$\Phi_k = \bigcap_{\psi \in S_1(0)} \left\{ x \in R^n : \left\langle x, \psi \right\rangle \le c(\Phi_k, \psi) \right\}, \ \ k = 0,1,...,N, \tag{12}$$

де $S_1(0)$ — одинична сфера з центром в початку координат, $c(\Phi_k, \psi)$ — опорна функція множини Φ_k, $k = 0,1,...,N$ [7]. Оскільки $0 \in \operatorname{int} \Phi_k$, то $c(\Phi_k, \psi) > 0$, $k = 0,1,...,N$ для всіх $\psi \in S_1(0)$, тому фазові обмеження можна записати у вигляді:

$$\Phi_k = \bigcap_{\psi \in S_1(0)} \left\{ x \in R^n : \left\langle x, \frac{\psi}{c(\Phi_k, \psi)} \right\rangle \le 1 \right\}, \ \ k = 0,1,...,N.$$

Тоді, аналогічно до теорем 2, 3, одержуємо такі твердження.

Теорема 4. Оптимальна оцінка множини практичної стійкості системи (5) у класі (6) при фазових обмеженнях (12) має вигляд:

$$r^* = \min_{k=0,1,...N} \min_{\psi \in S_1(0)} \frac{c(\Phi_k, \psi)}{\sqrt{\left\langle Q_k Q_k^T \psi, \psi \right\rangle}},$$

де $Q_k = A_{k-1}...A_0$, $k = 1,2,...,N$, $Q_0 = I$.

Теорема 5. Оптимальна оцінка множини практичної стійкості системи (11) у класі (6) при фазових обмеженнях (12) має вигляд:

$$r^* = \min_{k=0,1,...N} \min_{\psi \in S_1(0)} \frac{c(\Phi_k, \psi) - \left|\langle \psi, g_k \rangle\right|}{\sqrt{\langle Q_k Q_k^T \psi, \psi \rangle}},$$

де $Q_k = A_{k-1}...A_0$, $g_k = \sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1} A_{k-2} ... A_j b_{j-1} + b_k$, $k = 1,2,...,N$, $Q_0 = I$, $g_0 = 0$.

Якщо для систем (5) та (11) множина початкових даних вибирається в класі (10), то оптимальні оцінки множини практичної стійкості мають вигляд:

$$r^* = \min_{k=0,1,...N} \min_{\psi \in S_1(0)} \frac{c(\Phi_k, \psi)}{\sqrt{\langle Q_k B^{-1} Q_k^T \psi, \psi \rangle}}$$

та

$$r^* = \min_{k=0,1,...N} \min_{\psi \in S_1(0)} \frac{c(\Phi_k, \psi) - \left|\langle \psi, g_k \rangle\right|}{\sqrt{\langle Q_k B^{-1} Q_k^T \psi, \psi \rangle}}$$

відповідно.

ОЦІНКА ФАЗОВИХ ОБМЕЖЕНЬ

Розглянемо лінійну дискретну систему (5). Множина початкових даних має вигляд:

$$G_0 = K_r(0). \tag{13}$$

Фазові обмеження належать класу

$$W_3 = \{\Phi_k(p) : p \ge 0,\ k = 0,1,...,N\}, \tag{14}$$

де $\Phi_k(p) = \bigcap_{s=1}^{n} \{x \in R^n : \left|\langle l_{sk}, x \rangle\right| \le p\}$, $k = 0,1,...,N$. Необхідно знайти мінімальне значення параметра p таке, щоб траєкторії системи, які виходять із множини початкових даних (13), задовольняли фазовим обмеженням з класу W_3.

Розглянемо функції Ляпунова (8) і визначимо параметр p так, щоб $\left|\langle l_{sk}, x \rangle\right| \le p$, $s = 1,2,...,n$, $k = 0,1,...,N$ при $V_k(x) \le 1$, $k = 0,1,...,N$. З нерівності (9) випливає, що для $\{G_0, \Phi_k, 0, N\}$-стійкості системи (5) достатньо, щоб $r\sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle} \le p$, $k = 0,1,...,N$, $s = 1,2,...,n$. Отже, справедливе таке твердження.

Теорема 6. Оптимальна оцінка множин фазових обмежень системи (5) з множиною початкових даних (13) у класі (14) має вигляд $p^* = \max_{k=0,1,...,N} \max_{s=1,2,...,n} r\sqrt{\langle Q_k Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \rangle}$, де $Q_k = A_{k-1}...A_0$, $k = 1,2,...,N$, $Q_0 = I$.

Якщо множина початкових даних вибирається в класі (10), то оптимальна оцінка множин фазових обмежень системи (5) має вигляд

$$p^* = \max_{k=0,1,\ldots N} \max_{s=1,2,\ldots n} r\sqrt{\left\langle Q_k B^{-1} Q_k^T l_{sk}, l_{sk} \right\rangle}.$$

Нехай опорні функції множин фазових обмежень задовольняють умові поділу $c(\Phi_k(p),\psi) = p\, m_k(\psi)$, $m_k : R^n \to R$ — неперервні функції, $k = 1,2,\ldots, N$, $p \ge 0$. Тоді справджується рівність

$$\Phi_k(p) = \bigcap_{\psi \in S_1(0)} \{x \in R^n : \langle x, \psi \rangle \le c(\Phi_k(p), \psi)\} =$$

$$= \bigcap_{\psi \in S_1(0)} \{x \in R^n : \langle x, \psi \rangle \le p\, m_k(\psi)\} =$$

$$= \bigcap_{\psi \in S_1(0)} \left\{ x \in R^n : \left\langle x, \frac{\psi}{m_k(\psi)} \right\rangle \le p \right\},\ k = 1,2,\ldots, N.$$

Якщо для лінійної дискретної системи (11) множина початкових даних обирається в класі (10), то оптимальна оцінка множин фазових обмежень має вигляд

$$p^* = \max_{k=0,1,\ldots N} \max_{\psi \in S_1(0)} r \frac{\sqrt{\left\langle Q_k B^{-1} Q_k^T \psi, \psi \right\rangle}}{m_k(\psi) - \left|\left\langle \psi, g_k \right\rangle\right|}.$$

ВИСНОВКИ

У роботі отримано необхідні та достатні умови практичної стійкості дискретних систем із використанням функції Ляпунова. Вони мають конструктивний характер і дозволяють вказати шлях до знаходження оптимальної функції Ляпунова. На основі отриманих умов для задачі практичної стійкості лінійних дискретних систем за опуклих фазових обмежень отримано оптимальні оцінки множини початкових умов у вигляді кулі та еліпсоїда. При цьому знайдено оптимальні функції Ляпунова в аналітичній формі. Розроблений підхід застосовано до задачі оцінки фазових обмежень за умови, що початкова множина вибирається у формі кулі або еліпсоїда, а фазові обмеження є опуклими компактами, що неперервно залежить від параметра і задовольняють умову поділу. Одержані результати мають алгоритмічну спрямованість.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Dash A.T., Cressma R.* Polygamy in human and animal species // Mathematical Biosciences. — 1988. — **88**, № 1. — P. 49–456.
2. *Hsieh Y.* The phnomenon of unstable oscillation in population models // Mathematical and computer Modelling. — 1988. — **10**, № 6. — P. 429–435.
3. *Rondoni L.* Autocatalytic reactions as dynamical systems on the interval // Journal of Mathematical Physics. — 1993. — **34**, № 11. — P. 5238–5251.

4. *Sedaghat H.*A class of Nonlinear second order difference equations from macroeconomics // Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications. — 1997. — **29**, № 5. — P. 593–603.
5. *Simonovits A.* Chaotic dynamics of economic systems // Szigma. — 1985. — **18**. — P. 267–277.
6. *Tchuente M., Tindo G.* Suites generees par une equation neuronale a memoire // Comptes rendus de l'Academie des Sciences. — 1993. — **317**, № 6. — P. 625–630.
7. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. — М.: Высш. шк., 2001. — 239 с.
8. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.
9. *Гаращенко Ф.Г., Куценко И.А.* Практическая устойчивость дискретных процесов, оценки и их оптимизация // Проблемы управления и информации. — 1997. — № 5. — С. 50–61.
10. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 309 с.
11. *Antsaklis P., Michel A.* Linear Systems. — Boston: Birkhäuser, 2006. — 670 p.
12. *Basson M., Fogarty M.J.* Harvesting in discrete-time predator-prey systems // Mathematical Biosciences. — 1997. — **141**, № 1. — P. 41–47.
13. *Galor O.* Discrete Dynamical Systems. — Berlin: Springer, 2007. — 158 p.
14. *Hespanha J., Liberzon D., Teel A.* Lyapunov conditions for input-to-state stability of impulsive systems // Automatica. — 2008. — **44**, Issue 11. — P. 2735–2744.
15. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A.* Practical stability of nonlinear systems. — Singapore: World Scientific, 1990. — 207 p.
16. *Martynyuk A.A.* Stability analysis of discrete systems // International Applied Mechanics. — 2000. — **36**, № 7. — P. 3–34.
17. *Martynyuk A.A.* Stability by Lyapunov's matrix function method with applications. — NY: Marcel Dekker, 1998. — 276 p.
18. *Michel A., Hou L., Liu D.* Stability of dynamical systems. — Boston: Birkhäuser, 2008. — 515 p.
19. *Michel A., Miller R.* Qualitative analysis of large scale dynamical systems. — AP, 1977. — 307 p.
20. *Potzsche C.* Geometric theory of discrete Nonautonomous dynamical systems. — Berlin: Springer, 2010. — 430 p.
21. *Xiushan C., Xiaodong W., Ganyun L.* Stabilization of discrete Nonlinear systems based on control Lyapunov functions // Journal of Systems Engineering and Electronics. — 2008. — **19**, Issue 1. — P. 131–133.
22. *Zhong L., Lin H.* Some problems of second method of Lyapunov. In discrete systems // Applied Mathematics and Mechanics. — 1988. — **9**. — P. 1175–1181.
23. *Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Практична стійкість, оцінки та оптимізація. — К.: Київський ун-т, 2008. — 383 с.
24. *Гаращенко Ф.Г., Башняков А.Н.* Анализ сходимости итерационных процедур на основе методов практической устойчивости // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 2. — С. 15–25.
25. *Мартинюк А.А.* Практическая устойчивость движения. — К.: Наук. думка, 1983. — 248 с.

Надійшла 21.10.2010