УДК 519.766.4

ВИЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ РИЗИКУ VAR НА ОСНОВІ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ

П.І. БІДЮК, М.М. КОНОВАЛЮК

Для опису динаміки умовної дисперсії запропоновано модель стохастичної волатильності, структура якої відповідає фактичним змінам дисперсії фінансових гетероскедастичних процесів. Оцінки параметрів моделі стохастичної волатильності обчислюються за методом Монте-Карло для марковських ланцюгів у середовищі OpenBUGS. Для підвищення швидкості обчислень створено належну специфікацію цієї моделі. Оцінки змінної в часі умовної дисперсії, отримані за методом Монте-Карло, використано для прогнозування значення величини можливих втрат *VaR* для вибраних біржових фінансових процесів, поданих статистичними методами. При цьому досягнуто високу точність прогнозів, яку застосовують для прийняття рішень під час виконання торговельних операцій.

ВСТУП

Актуальною задачею фінансового аналізу даних є розвиток методів керування різноманітними фінансовими ризиками, які ґрунтуються на застосуванні математичного апарату. Відомо, що фінансові активи характеризують очікувану дохідність та ризик. Із математичної точки зору, очікувану дохідність описує математичне сподівання, а ризик описує дисперсія або волатильність дохідності протягом часового періоду володіння активами. Волатильність характеризує амплітуду коливань дохідності активу щодо очікуваного значення. Велика невизначеність щодо дохідності активу відображається у високій волатильності.

У фінансовій сфері постають задачі аналізу ринкових та кредитних ризиків, задачі оцінювання банками розміру резервного капіталу для покриття ризику активних операцій. Для розв’язання цих задач застосовують різні моделі волатильності з використанням підходу Value-at-Risk (*VaR*).

Сучасному валютному та фондовому ринку притаманна неоднорідність волатильності, яку враховують економетричні моделі умовної гетероскедастичності (неоднорідності за дисперсією) типу Узагальненої авторегресії зумовною гетероскедастичністю [1]. Практика застосування таких моделей свідчить про те, що не всі ефекти реальних даних можуть бути враховані в цих моделях. На точніше врахування ефектів реальних даних спрямовані сучасні альтернативні підходи до моделювання волатильності.

Змінна в часі волатильність, яка майже завжди наявна у фінансових даних, спричиняє зростання інтересу до моделей часових рядів зі змінною дисперсією. Поведінка фінансових часових рядів може бути подана моделлю, яка описує природу змінної волатильності доходів таким чином:

$$y_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t, \ \ \varepsilon_t \sim N(0,1), \ \ t = 1,2,\ldots,T,$$

де y_t — дохід активів. Це представлення відоме як модель авторегресії з умовною гетероскедастичністю (АРУГ). Вказана модель широко застосовується в прикладних дослідженнях [2, 3, 4].

Волатильність також може бути змодельована як неспостережувана компонента деякого прихованого стохастичного процесу. Такі моделі називають моделями стохастичної волатильності (МСВ), і останніми роками зосереджена значна увага щодо їхнього дослідження [5, 6, 7]. Ці моделі мають дві основні переваги над моделями АРУГ. Перша перевага МСВ полягає в тому, що є належна теоретична основа, оскільки вони можуть інтерпретуватись як дискретні версії неперервних моделей стохастичної волатильності, яка пропонується сучасною теорією фінансів [8]. Другою перевагою цих моделей є можливість узагальнити одновимірні ряди до багатовимірних у більш природній спосіб. З іншого боку, моделі СВ складніші для оцінювання, ніж моделі АРУГ, тому що не просто отримати їх точні функції правдоподібності. Для вирішення проблеми оцінювання моделі СВ запропоновано декілька методів [3, 4].

Кількісною мірою ринкового ризику є характеристика *VaR* [9]. *VaR* застосовується в задачах оцінювання та прогнозування фінансових ризиків, наприклад, для оцінювання мінімального розміру резервного капіталу з урахуванням ризику. Достатньо загальне формулювання цієї кількісної міри ризику дало можливість поширити її також на інші види ризику, зокрема, на операційний, кредитний тощо.

Мета роботи — отримати значення *VaR* за відомих значень волатильності фінансового процесу, який поданий статистичними даними щоденних обмінних курсів валют (долар/гривня) за вибраний часовий період.

МОДЕЛІ ЗІ ЗМІННОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ

Моделі зі змінною волатильністю можна поділити на два типи: спостережувані та параметричні [7, 10]. У загальному випадку обидва типи моделей можна подати таким чином:

$$y_t \mid z_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2).$$

У спостережуваних моделях z_t — функція запізнення величини y_t.

Найпростішим прикладом моделей подібного типу є моделі АРУГ, які запропоновано в роботі [11]. Вони описують дисперсію як лінійну функцію квадратів минулих спостережень:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 y_{t-1}^2 + \ldots + a_p y_{t-p}^2,$$

тобто модель визначається щільністю умовного розподілу:

$$y_t \mid Y_{t-1} \sim N(0,\sigma_t^2),$$

де Y_{t-1} — множина спостережень до часу $t-1$. Це дає можливість виразити дисперсію у певний момент часу через спостереження, що отримані в минулі моменти часу. Тому лише один тип шуму (збурення) впливає безпосередньо і на ряд, і на волатильність.

Розглянемо особливості використання моделей, що описують прогноз на один крок вперед. Під час здійснення оцінювання та тестування моделі за відносно простим алгоритмом можна отримати ймовірнісний вираз завдяки поєднанню щільностей. Щільність умовного розподілу передбачає використання умовних моментів, які мають широке застосування у фінансовій теорії. Спостережувані моделі аналогічні авторегресійним моделям із ковзними середніми, які зазвичай застосовують для моделювання зміни в часі середніх значень досліджуваних процесів.

Розглянемо другий тип моделей зі змінною волатильністю — параметричні моделі. У параметричних моделях z_t є функцією неспостережуваної або прихованої компоненти. Лог-нормальна модель стохастичної волатильності, яку запропонував Тейлор [12], є самим простим та відомим прикладом:

$$y_t \mid h_t \sim N(0,\exp(h_t)),$$

$$h_t = \alpha + \beta h_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0,\sigma_\eta^2), \tag{1}$$

де h_t — лог-волатильність, яка є не спостережуваною, але може бути оцінена під час використання спостережуваних даних. На відміну від попередніх, у цих моделях використовується два типи шумів (збурень), один із яких впливає на волатильність. Ці моделі аналогічні гаусівським у просторі станів.

Загальним недоліком параметричних моделей волатильності є те, що у них недостатньо точний аналітичний прогноз щільностей $y_t \mid Y_{t-1}$ на один крок уперед на відміну від моделей середнього, які вписуються у форму гаусівського простору станів. Тому під час використання цих моделей необхідно застосовувати апроксимаційні або чисельні методи для оцінювання параметрів.

Моделі стохастичної волатильності, з одного боку, є статистично важкими (зокрема, для оцінювання параметрів), а з іншого — їх властивості є простішими для розуміння. Також ці моделі мають аналог представлення у неперервному часі.

МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ

Волатильність залежить від неспостережуваних компонентів. Відомо дві інтерпретації прихованої волатильності θ_t.

Першою є подання її як випадкового та нерівномірного потоку нової інформації, складного для моделювання на фінансових ринках [13]. Найбільш популярну параметричну модель стохастичної волатильності запропонував Тейлор [12]:

$$y_t = u_t \exp(\theta_t / 2),$$

$$\theta_t = \mu + \varphi\theta_{t-1} + \upsilon_t,$$

де u_t та υ_t — два незалежні гаусівські процеси білого шуму з дисперсією 1 та σ_η^2, відповідно. Ця модель має назву лог-нормальної моделі стохастичної волатильності.

Оскільки υ_t — гаусівський процес, то θ_t також описується стандартною гаусівською авторегресією. Вона буде стаціонарною, якщо $|\phi|<1$ та:

$$\mu_\theta = E(\theta_t) = \frac{\mu}{1-\phi},$$

$$\sigma_\theta^2 = VaR(\theta_t) = \frac{\sigma_\upsilon^2}{1-\phi^2}.$$

Оскільки u_t завжди стаціонарний, то y_t буде стаціонарним тоді і тільки тоді, коли θ_t — стаціонарний. Процес y_t, що є добутком двох стаціонарних процесів, є стаціонарним. Використовуючи властивості лог-нормального розподілу, можна показати, що всі моменти існують тоді, коли θ_t стаціонарний, а ексцес

$$\frac{E(y_t^4)}{(E(y_t^2))^2} = 3\exp(\sigma_h^2) \geq 3,$$

показує, що МСВ має товщі «хвости», ніж у відповідному нормальному розподілі, при цьому непарні моменти дорівнюють нулю.

У цілому оцінювання зазначеної моделі дещо важче, ніж у відповідних моделях АРУГ. Властивості цієї моделі розглянуто в роботах [5, 7, 12].

Другою інтерпретацією волатильності θ_t є подання її як дискретної змінної величини, що описує режим, в якому працює фінансовий ринок. Марковські перехідні моделі, розглянуті Гамільтоном [14] — найпопулярніший підхід до моделювання змін режиму фінансового ринку:

$$y_t = u_t \exp(\theta_t / 2),$$

$$\theta_t = \mu + \varphi s_t,$$

де s_t — ланцюг Маркова першого порядку з двома можливими станами, який може бути рівним 0 або 1 та незалежний від u_t. Значення часового ряду s_t для всіх t залежать тільки від останнього значення s_{t-1}, а саме для $i, j = 0,1$:

$$P(s_t = j \mid s_{t-1} = i, s_{t-2} = i, \dots) = P(s_t = j \mid s_{t-1} = i) = p_{ij}.$$

Імовірності $(p_{ij})_{i,j=0,1}$ називають імовірностями переходу з одного стану в інший.

Ланцюг Маркова описується матрицею переходу:

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_{01} & p_{01} \\ 1 - p_{11} & p_{11} \end{pmatrix},$$

де $p_{00} + p_{01} = p_{10} + p_{11} = 1$.

КІЛЬКІСНА МІРА РИЗИКУ VALUE-AT-RISK

Величина *VaR* — це така оцінка величини втрат за деякою фінансовою позицією, яка із заданою ймовірністю $1 - p$ не перевищить втрати, обумовленні певними факторами ризику прогягом заданого часового горизонту. Іншими словами, *VaR* — це максимально ймовірна втрата.

VaR метод може бути застосований до різних типів вимірювання ризиків: ринкового, кредитного, операційного та товарного [15]. Невизначеність щодо майбутніх цін та доходностей фінансових активів обумовлена волатильністю курсів фінансових активів. Ця невизначеність — основний вид фінансового ризику, а саме — ринковий ризик, для оцінки якого використовується ринкова *VaR*.

Ринковий ризик означає ймовірність того, що неочікуване відхилення ринкових факторів (відсоткових ставок, валютного курсу) спричинено зростанням або зменшенням обсягу складових активів фінансового портфеля. *VaR* у цьому контексті є максимально очікуваною втратою ринкових фінансових інструментів портфеля активів, який може бути відомий за визначений часовий період та з визначеним рівнем довіри $(1 - p)$.

Динамічні моделі дають можливість враховувати залежність волатильності від часу та типові особливості часових рядів дохідностей, таких як умовна гетероскедастичність та «важкі хвости» кривих щільностей розподілу дохідностей. Але ці моделі не можуть повністю враховувати аномалії на хвостах розподілів дохідностей, які зумовленні різкими стрибками курсів фінансових активів та великими значеннями волатильності у випадкові моменти часу.

Поширені два варіанти вимірювання величини *VaR*: у грошовому вираженні та за відсотковою ставкою. Під час моделювання використовують величину *VaR*, виражену ставкою відсотка. Розглянемо ринкову *VaR*. Нехай P_t — ціна активу у момент часу t, а $P_{t+\tau}$ — ціна активу в момент часу $t + \tau$, y_t — дохідність активу в момент часу t. Логарифмована дохідність активу визначається за формулою:

$$y_t = y_t(\tau) = \ln \frac{P_{t+\tau}}{P_t}.$$

Відношення $\frac{P_{t+\tau}}{P_t}$ показує поведінку ціни щодо двох моментів часу. Це відношення буде більшим за одиницю під час зростання ціни активу та меншим за 1 при зменшенні ціни. Відповідно, логарифм цього співвідношення показує дохідність із врахуванням знаку. Якщо значення $y_t > 0$, то інвестор отримує прибуток ($P_{t+\tau} - P_t > 0$). Якщо значення $y_t < 0$, то інвестор несе втрати ($P_{t+\tau} - P_t < 0$). Розрахувати ціну активу в кінці періоду за заданою дохідністю за цей період можна таким чином:

$$P_{t+\tau} = P_t e^{y_t}.$$

При врахуванні середнього значення формула набуде вигляду:

$$y_t = \ln \frac{P_{t+\tau}}{P_t} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{P_i}{P_{i-1}}.$$

Значення ринкової VaR для часового горизонту τ із імовірністю p визначається умовою:

$$P(y_t(\tau) < VaR_t(\tau)) = p. \tag{2}$$

Оскільки інвестор зазнає втрати, якщо $y_t(\tau) < 0$, то вважається, що для малих значень p величина $VaR_t(\tau)$ в (2) набуває від'ємного значення.

На практиці значення ймовірності p беруть рівним 0,05 (методологія RiskMetrics [9]) або 0,01 (Базельский спостережний комітет [16]); $\tau = 1{,}10$, для інтервалу спостережень зазвичай використовують щоденні дані.

Під час розрахунку VaR проблемою є оцінювання розподілу доходностей активів. Розповсюджені два методи розрахунку VaR: дельта-нормальний метод та метод історичного моделювання. Розглянемо коротко дельта-нормальний метод.

ДЕЛЬТА-НОРМАЛЬНИЙ МЕТОД

Основним припущенням дельта-нормального методу є нормальність розподілу дохідностей та незмінність волатильності, які, як правило, не виконуються на практиці.

Нехай доходності активів $y_t(\tau)$ мають нормальний закон розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ із щільністю розподілу $n_N(x \mid \mu, \sigma^2)$ і взаємно некорельовані, тобто описуються гаусівським процесом білого шуму. Математичне сподівання $\mu = \mu(\tau) = E\{y_t(\tau)\}$ — очікувана дохідність активу, а дисперсія розподілу $\sigma^2 = \sigma^2(\tau) = D\{r_t(\tau)\}$ — дисперсія дохідності за період τ. Дисперсія σ^2 та середньоквадратичне відхилення дохідності σ характеризують ризик або волатильність дохідності активу.

Застосувавши перетворення $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ до формули (2) ринкового визначення VaR, отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{VaR_t} n_N(x \mid \mu, \sigma^2) dx = \int_{-\infty}^{X} \phi(z) dz = \Phi(X) = \Phi\left(\frac{VaR_t - \mu}{\sigma} \right) = p, \tag{3}$$

де $\phi(z)$ — щільність та $\Phi(X)$ — функція стандартного нормального розподілу.

Звідси отримуємо:

$$VaR_{t,p} = \mu + \Phi^{-1}(p)\sigma , \tag{4}$$

де $\Phi^{-1}(p)$ — квантиль розподілу з функцією $\Phi(X)$ рівня p.

При $\mu = 0$ отримаємо:

$$VaR_{t,p} = \Phi^{-1}(p)\sigma = -\Phi^{-1}(1-p)\sigma. \tag{5}$$

При $p = 0{,}05;\ 0{,}01$ формула (5) має вигляд:

$$VaR_{t,95\%} = -1{,}645\sigma,$$

$$VaR_{t,99\%} = -2{,}326\sigma. \tag{6}$$

На практиці параметри μ, σ можуть не бути сталими.

Можна також припустити, що випадковий процес дохідності $y_t(\tau)$ є умовно гауссівським, тоді

$$VaR_{t,p} = \Phi^{-1}(p)\sigma_t = -\Phi^{-1}(1-p)\sigma_t .$$

Таким чином, для розрахунку величини VaR із рівнями довіри 95 % та 99 % достатньо знати величину волатильності σ_t :

$$VaR_{t,95\%} = -1{,}645\sigma_t , \tag{7}$$

$$VaR_{t,99\%} = -2{,}326\sigma_t . \tag{8}$$

ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ *VAR*

У більшості наукових праць модель стохастичної волатильності, яку запропонував Тейлор, має такі дві форми:

$$\begin{cases} y_t \mid \theta_t = e^{\frac{1}{2}\theta_t} u_t , & u_t \sim N(0,1), \\ \theta_t \mid \theta_{t-1}, \mu, \phi, \tau^2 = \mu + \phi(\theta_{t-1} - \mu) + \upsilon_t , & \upsilon_t \sim N(0,\tau^2), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} y_t = \sigma_t u_t , & u_t \sim N(0,1), \\ \ln\sigma^2 = \mu + \phi\ln\sigma^2 + \upsilon_t , & \upsilon_t \sim N(0,\sigma^2). \end{cases}$$

У цих моделях по-різному представлена волатильність, тобто:

$$\sigma_t = e^{\frac{1}{2}\theta_t} .$$

Тепер формули (7) та (8) можна записати у вигляді:

$$VaR_{t,95} = -1{,}645 e^{\frac{1}{2}\theta_t} , \tag{9}$$

$$VaR_{t,99} = -2{,}326 e^{\frac{1}{2}\theta_t} . \qquad (10)$$

Формули (9) та (10) можна застосувати для розрахунку величини *VaR* для курсів обміну валют (наприклад, долар/гривня).

ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕННЯ VAR У СЕРЕДОВИЩІ OPENBUGS

Аналіз статистичних даних щоденних курсів обміну валют (долар/гривня) за період із 24.10.2006 по 15.04.2011 виконано в [17]. Для отримання значень *VaR* використаємо оцінки волатильності обмінних курсів (долар/гривня), які отримані з відповідної моделі стохастичної волатильності. У [17] надано специфікацію моделі для отримання значень волатильності у визначені моменти часу, її необхідно доповнити для отримання значень *VaR*. Специфікація моделі у середовищі OpenBUGS має такий вигляд:

```
model{
mu ~ dnorm(0, 0.1)
phistar ~ dbeta(20, 1.5)
ntau ~ dgamma(2.5, 0.025)
phi<- 2*phistar-1

theta0 ~ dnorm(mu, ntau)
meantheta[1] <- mu + phi*(theta0 - mu)
theta[1] ~ dnorm(meantheta[1] , ntau)

for (i in 2 : N){
meantheta[i] <- mu + phi * (theta[i-1] - mu)
theta[i] ~ dnorm(meantheta[i], ntau)
   }

for (j in 1 : N){
meany[j] <- 1/exp(theta[j])
y[j] ~ dnorm(0, meany[j])
    }

for (k in 1 : N){
VaR[k]<- -1.645*exp(theta[k]/2)
}
}
```

Вхідні та початкові данні залишаються незмінними. Детально послідовність виконання операцій у середовищі OpenBUGS розглянуто в [17]. Після виконання необхідних обчислень за програмою отримано значення *VaR* обмінних курсів (долар/гривня) за період з 24.10.2006 по 15.04.2011. Результати імітаційного моделювання подано в таблиці.

Таблиця. Результати розрахунків *VaR* для курсів обміну валют (долар/гривня) за період з 24.10.2006 по 15.04.2011

Значення *VaR*	Середнє значення	Середньо-квадратичне відхилення	Значення похибки	2,5 % медіани	Медіана	97,5 % медіани	Початкова ітерація	Кількість ітерацій
VaR[1]	−0,5726	0,9672	0,06845	–2,602	−0,005706	−0,001611	1	20000
VaR[2]	−0,2781	0,5392	0,03693	−1,869	−0,005694	−0,001727	1	20000
VaR[3]	−0,1665	0,3774	0,02576	−1,375	−0,006195	−0,002164	1	20000
VaR[4]	−0,1145	0,2899	0,01986	−1,034	−0,007977	−0,003824	1	20000
VaR[5]	−0,08515	0,237	0,01621	−0,8219	−0,007047	−0,003401	1	20000
VaR[6]	−0,06661	0,2032	0,01387	−0,6842	−0,005114	−0,001958	1	20000
VaR[7]	−0,05539	0,1817	0,01243	−0,5654	−0,00421	−0,001599	1	20000
VaR[8]	−0,04943	0,1754	0,012	−0,5139	−0,003662	−0,001256	1	20000
VaR[9]	−0,04534	0,1729	0,01175	−0,4752	−0,003642	−0,001302	1	20000
VaR[10]	−0,04312	0,1717	0,01168	−0,4482	−0,003772	−0,001647	1	20000
VaR[11]	−0,04157	0,1727	0,0116	−0,4326	−0,004109	−0,001806	1	20000
VaR[12]	−0,04074	0,1727	0,01158	−0,4131	−0,004372	−0,00198	1	20000
…	…	…	…	…	…	…	…	…

ВИСНОВКИ

Прогнозування значень стохастичної волатильності потребує побудови адекватних моделей для опису динаміки умовної дисперсії. Незважаючи на значні успіхи в моделюванні гетероскедастичних процесів, під час розв'язання багатьох практичних задач точність оцінок прогнозів стандартного відхилення може бути незадовільною. Як правило, прийнятні результати щодо обчислення оцінок прогнозів можна досягти за допомогою сучасних моделей умовної дисперсії, у яких волатильність розглядається як випадковий процес. Зокрема, до моделей такого класу відноситься і модель стохастичної волатильності. У роботі використано оцінки параметрів МСВ, які отримані авторами раніше [17] за методом Монте-Карло для марковських ланцюгів. Для розрахунку кількісної величини ризику в середовищі OpenBUGS модифіковано специфікацію моделі стохастичної волатильності в середовищі OpenBUGS.

Беручи за основу модель стохастичної волатильності для опису змінної в часі дисперсії, запропонований підхід дозволить прогнозувати значення величини *VaR* фінансових процесів, які представлені статистичними даними. При цьому досягається висока точність прогнозів, придатна для прийняття рішень під час виконання фінансових операцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Bollerslev T.* General autoregressive conditional heteroscedasticity // Journal of Econometrics. — 1986. — **31**. — P. 518–537.
2. *Bollerslev T., Chow R., Kroner K.* ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence // Journal of Econometrics. — 1992. — **52**. — P. 5–59.
3. *Bollerslev T., Engle R.F., Nelson D.* ARCH models. Handbook of Econometrics. — Amsterdam: North-Holland, 1993. — **4**. — 1078 p.

4. *Bera A., Higgins M.* ARCH models: properties, estimation and testing // Journal of Economic Surveys. — 1993. — № 7. — P. 305–366.
5. *Taylor S.J.* Modelling stochastic volatility: a review and comparative study // Mathematical Finance. — 1994. — № 4. — P. 183–204.
6. *Ghysels E., Harvey A. and Renault E.* Stochastic volatility. Statistical methods in finance. — Amsterdam: North-Holland, 1996. — P. 733.
7. *Shephard N.* Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility. Time series models with econometric, finance and other applications. — London: Chapman & Hall. — 1996. — 677 p.
8. *Hull J. and White A.* The pricing of options on assets with stochastic volatilities // Journal of Finance. — 1987. — № 42. — P. 281–300.
9. *Risk* Management: A Practical. — GuideBoston: risk metrics group, 1999. — 139 p.
10. *Cox D.R.* Statistical analysis of time series: some recent developments // Scandinavian Journal of Statistics. — 1981. — № 8. — P. 93–115.
11. *Engle R.F.* Autoregressive conditional heteroskedasticiy with estimates of the variance of the United Kingdom inflation // Econometrica. — 1982. — **50**. — P. 987–1007.
12. *Taylor S.J.* Modelling financial time series. — Chichester: John Wiley, 1986. — 268 p.
13. *Clark P.K.* A subordinated stochastic process model with fixed variance for speculative prices // Econometrica. — 1973. — № 41. — P. 135–156.
14. *Hamilton J.D.* A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle // Econometrica. — 1989. — № 57/2. — P. 357–384.
15. *Alexander C.* The handbook of risk management and analysis. — NY: John Wiley & Sons, 1996. — 293 p.
16. *International* convergence of capital measurement and capital standards: Revised Framework. — Basel Committee on Banking Supervision, 2004. — 62 p.
17. *Коновалюк М.М.* Байєсівський аналіз моделі стохастичної волатильності в середовищі OpenBUGS // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2011. — № 2. — С. 77–84.

Надійшла 29.09.2011