УДК 519.81

К НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СХЕМАХ СИТУАЦИЙ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

В.И. ИВАНЕНКО, В.М. МИХАЛЕВИЧ

Рассмотрен достаточно широкий класс параметрических задач принятия решений, рассматриваемых с позиции получения критерия оптимальности — отношения предпочтений на решениях, можно разделить на два подкласса: задачи с неопределенностью (неоднозначностью указанного решения) и задачи без неопределенности (т.н. детерминистические задачи). Для такой классификации необходимы критерии существования неопределенности, которые и предлагаются в данной работе.

ВВЕДЕНИЕ

Анализируется ситуация в системе принятия решений, представляющей собой пару: того, кто принимает решение (ТПР) и ситуацию принятия решения (СПР) [1, 2]. Предлагаемая работа является продолжением работы [3] и совместно с ней уточнением и обобщением работы [4].

При этом задачи принятия решений (они преимущественно расматриваются как оптимизационные) можно разделить на два подкласса: задачи без неопределенности (т.н. детерминистические задачи) и задачи с неопределенностью, т.к. неопределенность значений ненаблюдаемого параметра часто порождает неопределенность при выборе оптимального решения в заданной ситуации, т.е. задаваемой схемой, или, коротко говоря, неопределенность схемы ситуации. Для такой классификации необходимы критерии наличия неопределенности в этих задачах. Поэтому возникает задача получения критериев неопределенности схем ситуаций.

Цель работы — решение указанной задачи для параметрических ситуаций, т.к. согласно [3], анализируя ситуации, можно ограничиться параметрическими. Для этого используются результаты работы [4].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Параметрической схемой ситуации задачи решения (ССЗР) называется упорядоченная четверка вида (X,Θ,U,g), где g является отображением из $\Theta\times U$ в X для произвольных непустых множеств X,Θ,U. Класс всех ССЗР обозначим $\mathbb{Z}$.

При этом множество X называется множеством последствий, Θ — множеством значений ненаблюдаемого параметра, U — множеством решений, а g — отображением последствий ССЗР (X,Θ,U,g).

Под основной задачей принятия решения для ТПР в заданной ситуации или, коротко, задачей решения (ЗР) понимается задание этим ТПР

© *В.И. Иваненко, В.М. Михалевич,* 2012

отношения предпочтения на последствиях — первая ЗР и решениях — вторая ЗР.

Определение 2. ССЗР $(X',\Theta',U',g')\in\mathbb{Z}$ называется подсхемой ССЗР $(X,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}$, если $X'\subseteq X$, $\Theta'\subseteq\Theta$, $U'\subseteq U$, и $g':=g|_{\Theta'\times U'}$.

Подсхему (X',Θ',U',g') ССЗР $Z:=(X,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}$ будем обозначать $Z|_{X',\Theta',U'}$.

Определение 3. Две ССЗР (X_1,Θ_1,U_1,g_1), $(X_2,\Theta_2,U_2,g_2)\in\mathbb{Z}$ называются изоморфными, что будем обозначать $(X_1,\Theta_1,U_1,g_1)\simeq$ $\simeq(X_2,\Theta_2,U_2,g_2)$, если существуют такие биекции $i:X_1\to X_2$, $j:U_1\to$ $\to U_2$, $k:\Theta_1\to\Theta_2$, что для любых $\theta\in\Theta_1, u\in U_1$ имеет место

$$g_2(k(\theta),j(u))=i(g_1(\theta,u)).$$

Рассмотрим класс $\mathbf{Z}$ ССЗР, у которых на множествах последствий задано отношение предпочтения. Каждой ССЗР этого класса соответствует четверка вида $\mathcal{Z}:=((X,\succcurlyeq),\Theta,U,g)$. Тогда $\mathbf{Z}((X,\succcurlyeq),\Theta):=\{((X,\succcurlyeq),\Theta,\cdot,\cdot)\in$ $\in\mathbf{Z}\}$.

Определение 4. Две ССЗР $((X_1,\succcurlyeq_1),\Theta_1,U_1,g_1)$, $((X_2,\succcurlyeq_2),\Theta_2,U_2,g_2)\in$ $\in\mathbf{Z}$ называются изоморфными, что будем обозначать $((X_1,\succcurlyeq_1),\Theta_1,U_1,g_1)\simeq$ $\simeq((X_2,\succcurlyeq_2),\Theta_2,U_2,g_2)$, если $(X_1,\Theta_1,U_1,g_1)\simeq(X_2,\Theta_2,U_2,g_2)$ и при этом ($\simeq$) переводит отношение предпочтений $(X_1,\succcurlyeq_1)$ в отношение предпочтений $(X_2,\succcurlyeq_2)$.

Определение 5. Подсхемой ССЗР $((X,\succcurlyeq),\Theta,U,g)\in\mathbf{Z}$ называется ССЗР $((X',\succcurlyeq'),\Theta',U',g')\in\mathbf{Z}$, где ССЗР $(X',\Theta',U',g')\in\mathbb{Z}$ является подсхемой ССЗР $(X,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}$, а $(\succcurlyeq')=(\succcurlyeq|_{X'})$.

Подсхему $((X',\succcurlyeq'),\Theta',U',g')$ ССЗР $\mathcal{Z}:=((X,\succcurlyeq),\Theta,U,g)\in\mathbf{Z}$ будем обозначать $\mathcal{Z}|_{X',\Theta',U'}$.

Определение 6. Правилом выбора предпочтений (ПВП) для ЗР в классе ССЗР $\mathbb{Z}'\subseteq\mathbb{Z}$ (кратко ПВП в $\mathbb{Z}'\subseteq\mathbb{Z}$) будем называть всякое отображение $\pi=(\pi_1,\pi_2)$, определенное на $\mathbb{Z}'$ и сопоставляющее каждой $Z=$ $=(X,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'$ некоторую пару соответствий $(X,\succcurlyeq_Z)$ и $(U,\overset{*}{\succcurlyeq}_Z)$, т.е. $\pi=(\pi_1,\pi_2)\in(2^{(X^2)}\times2^{(U^2)})^{\mathbb{Z}'}$, что будем обозначать также $\pi_Z=(\pi_{1Z},\pi_{2Z})=$ $=((X,\succcurlyeq_Z),(U,\overset{*}{\succcurlyeq}_Z))$. Класс всех ПВП в $\mathbb{Z}'\subseteq\mathbb{Z}$ будем обозначать через $\Pi(\mathbb{Z}')$.

Замечание. Каждый ТПР имеет определенное (свое) ПВП для класса $\mathbb{Z}'$, которое является моделью ТПР-а относительно решения им ЗР в классе $\mathbb{Z}'$. Зная ПВП для $\mathbb{Z}'\subseteq\mathbb{Z}$ произвольного ТПР, мы можем узнать его (этого ТПР-а) решение основной ЗР для $Z\in\mathbb{Z}'\subseteq\mathbb{Z}$.

Определение 7. ПВП в $\mathbf{Z}'\subseteq\mathbf{Z}$ будем называть всякое отображение п, определенное на $\mathbf{Z}'$ и сопоставляющее каждой $\mathcal{Z}=((X,\succcurlyeq),\Theta,U,g)\in\mathbf{Z}'$

некоторое соответствие $(U, \succcurlyeq_{\mathcal{Z}}^{*})$, т.е. $\text{п} \in [2^{(U^2)}]^{\mathbf{Z}'}$, что будем обозначать также $\text{п}_{\mathcal{Z}} = (U, \succcurlyeq_{\mathcal{Z}}^{*})$. Класс всех ПВП в $\mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$ будем обозначать через $\Pi(\mathbf{Z}')$.

Определение 8. Будем говорить, что ССЗР Z класса $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ ($\mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$) с неопределенностью в классе ПВП $\Pi'(\mathbb{Z}')$ ($\Pi'(\mathbf{Z}')$), если либо $\Pi'(\mathbb{Z}') = \varnothing$ ($\Pi'(\mathbf{Z}') = \varnothing$), либо найдутся такие ПВП $\pi', \pi'' \in \Pi'(\mathbb{Z}')(\Pi'(\mathbf{Z}'))$, что $\pi'_{1Z} = \pi''_{1Z}$,а $\pi'_{2Z} \neq \pi''_{2Z}$ ($\text{п}'_Z \neq \text{п}''_Z$).

Для всякого нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ введем в рассмотрение его продолженние (расширение) на множестве отображений X^{Θ}, обозначая это расширение тем же символом $(\succcurlyeq)$, таким образом, что для любых $u_1, u_2 \in X^{\Theta}$ имеет место, по определению, соотношение

$$u_1 \succcurlyeq u_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u_1(\theta) \succcurlyeq u_2(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta, \tag{1}$$

т.е введенное предпочтение на отображениях является «покоординатным» предпочтением отображений, которое будем называть доминированием.

Ясно, что при этом соответствие $(X^{\Theta}, \succ)$ будет транзитивным и нерефлексивным, а значит строгим частичным порядком.

Лемма 1. Если отношение предпочтения $(X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок, то u_1, u_2 будет парой несвязных отношением $(\succcurlyeq)$ отображений из множества X^{Θ}, т.е. $u_i \overline{\succcurlyeq} u_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{1,2\}$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, что для любых неравных $i, j \in \{1,2\}$ имеет место соотношение

$$u_i(\theta_i) \succ u_j(\theta_i). \tag{2}$$

Доказательство. Условия $u_1 \overline{\succcurlyeq} u_2$, $u_2 \overline{\succcurlyeq} u_1$, в силу соотношения (1), равносильны тому, что найдутся соответственно такие $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, для которых $u_1(\theta_1) \overline{\succcurlyeq} u_2(\theta_1)$, $u_1(\theta_2) \overline{\succcurlyeq} u_2(\theta_2)$. Но последнии соотношения, в силу того, что $(X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок, равносильны условиям $u_1(\theta_1) \succ u_2(\theta_1)$, $u_2(\theta_2) \succ u_1(\theta_2)$, которые, в свою очередь, равносильны соотношению (2).

Лемма доказана.

Определение 9. Для произвольных непустых множеств A, Θ и отношения предпочтения $(A, \succcurlyeq)$ отображения $f_1, f_2 \in A^{\Theta}$ называются *комонотонными* относительно $(\succcurlyeq)$, если ни для каких $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ не выполняется $f_1(\theta_1) \succ f_1(\theta_2)$ и $f_2(\theta_2) \succ f_2(\theta_1)$. Здесь $(\succ)$, как обычно, обозначает асимметричную часть $(\succcurlyeq)$.

Лемма 2. Если отношение предпочтения $(X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок, то для любого отображения $g : \Theta \times U \to X$ семейство отображений $(g(\theta, \cdot) \in$

$\in X^U,\ \theta \in \Theta)$ попарно комонотонно относительно $(X, \succcurlyeq)$ тогда и только тогда, когда семейство отображений $(g(\theta,\cdot) \in X^\Theta,\ u \in U)$ попарно связно соответствием доминирования $(X^\Theta, \succcurlyeq)$.

Доказательство. В силу определения 9, $\forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta$ $g(\theta_1,\cdot)$ и $g(\theta_2,\cdot)$ будет некомонотонной парой отображений из X^U относительно $(X, \succcurlyeq)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $u_1, u_2 \in U$, что $g(\theta_1, u_1) \succ$ $\succ g(\theta_1, u_2)$ и $g(\theta_2, u_2) \succ g(\theta_2, u_1)$, а это согласно леммы 1 будет тогда и только тогда, когда $g(\cdot, u_1), g(\cdot, u_2) \in X^\Theta$ будет парой не связных соответствием доминирования $(X^\Theta, \succcurlyeq)$ отображений.

Лемма доказана.

Через $\mathbf{Z}_0$ обозначим подкласс таких ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq_{\mathcal{Z}}), \Theta, U, g)$ класса $\mathbf{Z}$, у которых $(X, \succcurlyeq_{\mathcal{Z}})$ является нестрогим порядком.

Для любого подкласса ССЗР $\mathbf{Z}'$ класса $\mathbf{Z}$ через $\Pi_1(\mathbf{Z}')$ обозначим все такие ПВП класса Z', что для любой ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}'$ выполняются следующие условия:

У1. $(U, \succcurlyeq^*)$ — нестрогий порядок.

У2. Для любых $u_1, u_2 \in U$:

если $g(\cdot, u_1) \succ g(\cdot, u_2)$, то $u_1 \succ^* u_2$;

если $g(\cdot, u_1) \sim g(\cdot, u_2)$, то $u_1 :^* u_2$.

Из рассуждений аналогичных использованным в [4] при обосновании непустоты $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ следует, что $\Pi_1(\mathbf{Z}_0) \neq \varnothing$.

Если имеем ССЗР $\mathcal{Z} = ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g)$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}')$, то в силу определений 9 из [4] и 8 понятно, что ССЗР $\hat{\Pi p}(\mathcal{Z}) = ((X, \succcurlyeq), U, \{(u, g(\theta, u)) : u \in U, \theta \in \Theta\})$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\hat{\Pi p}(\Pi_1(\mathbf{Z}'))$, а так как $\hat{\Pi p}(\Pi_1(\mathbf{Z}')) = \Pi_1(\hat{\Pi p}(\mathbf{Z}'))$, то $\hat{\Pi p}(\mathcal{Z})$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\Pi p}(\mathbf{Z}'))$. Также понятно, что обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Этот и некоторые другие результаты легко получить, используя критерии неопределенности ССЗР в соответствующих классах ПВП, полученные ниже.

Рассмотрим следующую совокупность ССЗР класса $\mathbf{Z}$:

- $((\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\},$ $\{g(\theta_2, u_2 = x_2, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_1, u_2) = x_1, g(\theta_1, u_1) = x_2\})$;
- $((\{x_1, y, x_2\}, \{(x_1, x_1), (x_1, y), (y, x_1), (y, y), (x_2, x_1), (x_2, y), (x_2, x_2)\}),$ $\{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, \{g(\theta_2, u_2) = x_2, g(\theta_1, u_2) = y, g(\theta_2, u_1) = x_1, g(\theta_1, u_1) = x_2\})$;
- $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}),$

$\{\theta_1,\theta_2\}, \{u_1,u_2\},\{g(\theta_2,u_2)=x_3,\ g(\theta_1,u_2)=x_2, g(\theta_2,u_1)=x_1,\ g(\theta_1,u_1)=x_3\})$;

- $((\{x_1,y_1,x_2,y_2\},\{(x_1,x_1),(x_1,y_1),(y_1,x_1),(y_1,y_1),(x_2,x_1),$ $(x_2,y_1),(x_2,x_2),(x_2,y_2),(y_2,x_1),(y_2,y_1),(y_2,x_2),\ (y_2,y_2)\}),\{\theta_1,\theta_2\},\ \{u_1,u_2\},$ $\{g(\theta_1,u_1)=y_2, g(\theta_1,u_2)=y_1, g(\theta_2,u_1)=x_1, g(\theta_2,u_2)=x_2\})$
- $((\{x_1,x_2,x_3,y\},\{(x_1,x_1),(x_2,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_1),(x_3,x_2),(x_3,x_3),$ $(x_3,y),(y,x_1),(y,x_2),(y,x_3),(y,y)\}),\{\theta_1,\theta_2\},\ \{u_1,u_2\},\{g(\theta_1,u_1)=y,$ $g(\theta_1,u_2)=x_2, g(\theta_2,u_1)=x_1, g(\theta_2,u_2)=x_3\})$;
- $((\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{(x_1,x_1),(x_2,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_1),(x_3,x_2),(x_3,x_3),$ $(x_4,x_1),(x_4,x_2),(x_4,x_3),(x_4,x_4)\}),\ \{\theta_1,\theta_2\},\{u_1,u_2\},\ \{g(\theta_1,u_1)=$ $=x_3, g(\theta_1,u_2)=x_2,\ g(\theta_2,u_1)=x_1, g(\theta_2,u_2)=x_4\})$;
- $((\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{(x_1,x_1),(x_2,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_1),(x_3,x_2),(x_3,x_3),$ $(x_4,x_1),(x_4,x_2),(x_4,x_3),(x_4,x_4)\}),\ \{\theta_1,\theta_2\},\{u_1,u_2\},\ \{g(\theta_1,u_1)=$ $=x_4, g(\theta_1,u_2)=x_2,\ g(\theta_2,u_1)=x_1, g(\theta_2,u_2)=x_3\})$;
- $((\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{(x_1,x_1),(x_2,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_1),(x_3,x_2),(x_3,x_3),$ $(x_4,x_1),(x_4,x_2),(x_4,x_3),(x_4,x_4)\}),\ \{\theta_1,\theta_2\},\{u_1,u_2\},\ \{g(\theta_1,u_1)=$ $=x_4, g(\theta_1,u_2)=x_3,\ g(\theta_2,u_1)=x_1, g(\theta_2,u_2)=x_2\})$;
- $((\{x_1,x_2,x_3\},\{(x_1,x_1),(x_2,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_1),(x_3,x_2),(x_3,x_3)\}),$ $\{\theta_1,\theta_2\},\ \{u_1,u_2\},\{g(\theta_1,u_1)=x_3,\ g(\theta_2,u_2)=x_2, g(\theta_2,u_1)=x_1,\ g(\theta_1,u_2)=x_2\})$;
- $((\{x_1,x_2,y,x_3\},\{(x_1,x_1),(x_2,x_1),(x_2,x_2),(x_2,y),(y,x_1),(y,x_2),(y,y),$ $(x_3,x_1),(x_3,x_2),(x_3,y),(x_3,x_3)\}),\{\theta_1,\theta_2\},\ \{u_1,u_2\},\{g(\theta_1,u_1)=$ $=x_3,\ g(\theta_1,u_2)=y, g(\theta_2,u_1)=x_1, g(\theta_2,u_2)=x_2\})$.

ССЗР, изоморфные этим схемам в порядке написания, будем называть соответственно схемами типа $\mathrm{I}-\mathrm{X}$ класса $\mathbf{Z}$. При этом путаницы со схемами типа $\mathrm{I}-\mathrm{VIII}$ класса $\hat{\mathbf{Z}}$ не будет, т.к. из контекста всегда ясна форма ССЗР.

Лемма 3. Если ССЗР $\mathcal{Z}=((X,\succcurlyeq),\Theta,U,g)\in\mathbf{Z}'_0\subseteq\mathbf{Z}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$, то найдутся $u_1,u_2\in U$, для которых отображения $g(\cdot,u_1), g(\cdot,u_2)\in X^{\Theta}$ не связны соответствием $(X^{\Theta},\succcurlyeq)$.

Доказательство. Из определения неопределенности ССЗР $\mathcal{Z}:=$ $:=((X,\succcurlyeq),\Theta,U,g)\in\mathbf{Z}'_0$ следует, что найдутся такие ПВП $\pi',\pi''\in\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$, для которых имеет место соотношение $(U,\succcurlyeq^*):=\pi'_{\mathcal{Z}}\neq\pi''_{\mathcal{Z}}=:(U,\succcurlyeq^{**})$. А это означает, что найдутся неравные $u_1,u_2\in U$, для которых $u_1\succcurlyeq^* u_2$, а $u_1\overline{\succcurlyeq}^{**}u_2$. Тогда, в силу условия У1, имеем

$$u_1 \not\succcurlyeq^* u_2, u_2 \succ^{**} u_1. \qquad (3)$$

Рассмотрим отображения $g(\cdot,u_1), g(\cdot,u_2) \in X^\Theta$. Предположим, что эти отображения связны отношением $(X^\Theta, \succcurlyeq)$. Тогда, если $g(\cdot,u_1) \succ g(\cdot,u_2)$, то, в силу условия У2, $u_1 \succ^* u_2$ и $u_1 \succ^{**} u_2$, что противоречит соотношению (3). Если $g(\cdot,u_2) \succ g(\cdot,u_1)$, то, в силу условия У2, $u_2 \succ^* u_1$ и $u_2 \succ^{**} u_1$, что также противоречит соотношению (3). Наконец, если $g(\cdot,u_1) \sim g(\cdot,u_2)$, то, в силу услови У2, $u_1 \sim^* u_2$ и $u_1 \sim^{**} u_2$, что снова противоречит соотношению (3).

Значит отображение $g(\cdot,u_1)$ и $g(\cdot,u_2)$ не связны отношением $(X^\Theta, \succcurlyeq)$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Если для ССЗР $\mathcal{Z} = ((X,\succcurlyeq),\Theta,U,g) \in \mathbf{Z}_0' \subseteq \mathbf{Z}_0$ найдутся $u_1,u_2 \in U$, для которых отображения $g(\cdot,u_1), g(\cdot,u_2) \in X^\Theta$ не связны соответствием $(X^\Theta, \succcurlyeq)$, то ССЗР $\mathcal{Z}$ включает подсхему, являющуюся одной из схем типа $\mathrm{I}-\mathrm{X}$ класса $\mathbf{Z}_0$.

Доказательство. Пусть для $u_1,u_2 \in U$ отображения $g(\cdot,u_1), g(\cdot,u_2)$ не связны соответствием $(X^\Theta, \succcurlyeq)$. Тогда, в силу леммы 1, найдутся такие $\theta_1,\theta_2 \in \Theta$, что для любых неравных $i,j \in \{1,2\}$ имеет место соотношение (2), т.е.

$$g(\theta_1,u_1) \succ g(\theta_1,u_2) \text{ и } g(\theta_2,u_2) \succ g(\theta_2,u_1). \qquad (4)$$

Рассмотрим подсхему $\overline{\mathcal{Z}} := \mathcal{Z}|_{\{\theta_1,\theta_2\},\{u_1,u_2\}}$. Без уменьшения общности можем считать, что

$$g(\theta_1,u_2) \succcurlyeq g(\theta_2,u_1), \qquad (5)$$

т.к. в противном случае вместо $\overline{\mathcal{Z}}$ мы можем рассматривать изоморфную ей в классе $\mathbf{Z}$, полученную из $\overline{\mathcal{Z}}$ заменой θ_i на θ_j, u_i на u_j, где $i \neq j$, $i,j \in \{1,2\}$. Вместе с соотношением (2) условие (5) дает соотношение:

$$g(\theta_i,u_j) \succcurlyeq g(\theta_2,u_1) \ \ \forall i,j \in \{1,2\}. \qquad (6)$$

Тогда, в зависимости от того, какой из элементов множества $\{g(\theta_i,u_j) \mid i,j \in \{1,2\}\}$ максимальный, получим все возможные, с точностью до изоморфизма в классе $\mathbf{Z}$, подсхемы ССЗР $\mathcal{Z}$. А именно:

Если $g(\theta_2,u_2) \succcurlyeq g(\theta_i,u_j)$, где $i,j \in \{1,2\}$, то могут возникнуть лишь следующие варианты:

1. $g(\theta_2,u_2) = g(\theta_1,u_1), g(\theta_1,u_2) = g(\theta_2,u_1)$.
2. $g(\theta_2,u_2) = g(\theta_1,u_1), g(\theta_1,u_2) \neq g(\theta_2,u_1), \ g(\theta_1,u_2) \sim g(\theta_2,u_1)$.
3. $g(\theta_2,u_2) = g(\theta_1,u_1), g(\theta_1,u_2) \succ g(\theta_2,u_1)$.

4. $g(\theta_2,u_2)\neq g(\theta_1,u_1), g(\theta_2,u_2)\sim g(\theta_1,u_1),\ g(\theta_1,u_2)=g(\theta_2,u_1).$

5. $g(\theta_2,u_2)\neq g(\theta_1,u_1), g(\theta_2,u_2)\sim g(\theta_1,u_1), g(\theta_1,u_2)\neq$
$\neq g(\theta_2,u_1), g(\theta_1,u_2)\sim g(\theta_2,u_1).$

6. $g(\theta_2,u_2)\neq g(\theta_1,u_1), g(\theta_2,u_2)\sim g(\theta_1,u_1), g(\theta_1,u_2)\succ g(\theta_2,u_1).$

7. $g(\theta_2,u_2)\succ g(\theta_1,u_1), g(\theta_1,u_2)=g(\theta_2,u_1).$

8. $g(\theta_2,u_2)\succ g(\theta_1,u_1), g(\theta_1,u_2)\neq g(\theta_2,u_1),\ g(\theta_1,u_2)\sim g(\theta_2,u_1).$

9. $g(\theta_2,u_2)\succ g(\theta_1,u_1), g(\theta_1,u_2)\succ g(\theta_2,u_1).$

Если $g(\theta_1,u_1)\succcurlyeq g(\theta_i,u_j)$, где $i,j\in\{1,2\}$, то без учета уже рассмотренных вариантов 1–6, могут возникнуть еще лишь следующие варианты:

10. $g(\theta_1,u_1)\succ g(\theta_2,u_2), g(\theta_2,u_2)\succ g(\theta_1,u_2).$

11. $g(\theta_1,u_2)\succ g(\theta_2,u_2).$

12. $g(\theta_1,u_2)=g(\theta_2,u_2).$

13. $g(\theta_1,u_2)\neq g(\theta_2,u_2), g(\theta_1,u_2)\sim g(\theta_2,u_2).$

Наконец, предположив, что $g(\theta_1,u_2)\succcurlyeq g(\theta_i,u_j)$, где $i,j\in\{1,2\}$, получим противоречие соотношению (4).

Таким образом, варианты 1–13 исчерпывают все возможные. При этом варианту 1 соответствуют схема типа I класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1),\ x_2:=g(\theta_2,u_2)$; варианту 2 соответствует схема типа II класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1), y:=g(\theta_1,u_2), x_2:=g(\theta_2,u_2)$; варианту 3 соответствует схема типа III класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1)$, $x_2:=g(\theta_1,u_2),\ x_3:=g(\theta_2,u_2)$; варианту 4 соответствует ССЗР изоморфная схеме типа II класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1),\ \ y:=g(\theta_1,u_1), x_2:=$ $:=g(\theta_2,u_2)$; варианту 5 соответствует схема типа IV класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1), y_1:=g(\theta_1,u_2), x_2:=g(\theta_2,u_2),\ \ y_2:=g(\theta_1,u_1)$; варианту 6 соответствует схема типа V класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1), x_2:=g(\theta_1,u_2), x_3:=g(\theta_2,u_2), y:=g(\theta_1,u_1)$; варианту 7 соответствует ССЗР изоморфная схеме типа III класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1), x_2:=g(\theta_1,u_1), x_3:=g(\theta_2,u_2)$; варианту 8 соответствует ССЗР изоморфная схеме типа V класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1)$, $x_2:=g(\theta_1,u_1), x_3:=g(\theta_2,u_2), y:=g(\theta_2,u_2)$; варианту 9 соответствует схема типа VI класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1),\ \ x_2:=g(\theta_1,u_2)$, $x_3:=g(\theta_1,u_1),\ \ x_4:=g(\theta_2,u_2)$; варианту 10 соответствует схема типа VII класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1),\ \ x_2:=g(\theta_1,u_2),\ \ x_3:=g(\theta_2,u_2)$, $x_4:=g(\theta_1,u_1)$; варианту 11 соответствует схема типа VIII класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1),\ \ x_2:=g(\theta_2,u_2),\ \ x_3:=g(\theta_1,u_2),\ \ x_4:=g(\theta_1,u_1)$; варианту 12 соответствует схема типа IX класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1:=g(\theta_2,u_1), x_2:=g(\theta_2,u_2), x_3:=g(\theta_1,u_1)$; варианту 13 соответствует схема типа X класса $\mathbf{Z}$, если положить $x_1 := g(\theta_2, u_1)$, $x_2 := g(\theta_2, u_2)$, $y := g(\theta_1, u_2)$, $x_3 := g(\theta_1, u_1)$.

Лемма доказана.

Теорема 1. Любая ССЗР класса $\mathbf{Z}'_0 \subseteq \mathbf{Z}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$ содержит подсхему являющуюся какой-то из схем типа $\mathrm{I} - \mathrm{X}$ класса $\mathbf{Z}_0$.

Доказательство непосредственно следует из лемм 2 и 3.

Теорема доказана.

Определение 10. ССЗР класса $\mathbf{Z}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$ называется *элементарной схемой* для $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$, если ее любая подсхема будет без неопределенности в классе $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$.

Лемма 5. Схемы типов $\mathrm{I} - \mathrm{X}$ и только они будут элементарными схемами для $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$.

Доказательство. Любая подсхема ССЗР класса $\mathbf{Z}_0$ с множеством решений и множеством ненаблюдаемого параметра, состоящих из двух элементов будет без неопределенности в классе $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$. Это следует из того, что всякая ССЗР класса $\mathbf{Z}_0$, у которой множество решений или множество ненаблюдаемого параментра состоит из одного элемента, не будет с неопределенностью в классе $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$.

Доказательсво неопределенности схем типа $\mathrm{I} - \mathrm{X}$ в классе $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$ аналогично доказательству неопределенности схем типа $\mathrm{I} - \mathrm{VIII}$ в классе $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ и основывается на том, что для любой схемы типа $\mathrm{I} - \mathrm{X}$ $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}_0$ в качестве отношения предпочтения на множестве решений $U = \{u_1, u_2\}$, в силу не связности элементов $g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2)$ соответствием $(X^{\Theta}, \succcurlyeq)$, можно, не нарушая условие У2, выбрать любой нестрогий порядок. А их будет несколько.

То, что любая подсхема этих ССЗР будет без неопределенности в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$ легко проверить непосредственно, опираясь на условия У1 и У2.

Лемма доказана в одну сторону. В другую сторону утверждение леммы следует из теоремы 1.

Лемма доказана.

Определение 11. Систему элементарных схем для $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$ будем называть *полной*, если любая элементарная схема для $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$ изоморфна какому-то представителю этой системы.

Теорема 2. Полная система элементарных схем для $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$ состоит из схем типов $\mathrm{I} - \mathrm{X}$ класса $\mathbf{Z}_0$.

Доказательство. Оно следует из леммы 5.

Теорема доказана.

Теорема 3. Если ССЗР класса $\mathbf{Z}_0' \subseteq \mathbf{Z}_0$ содержит подсхему вида схемы одного из типов $\mathrm{I}-\mathrm{X}$, то эта ССЗР с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0')$.

Доказательство. Пусть ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}_0'$ содержит подсхему одного из типов $\mathrm{I}-\mathrm{X}$ и $\{u_1, u_2\}$, где $u_1, u_2 \in U$, является множеством решений этой подсхемы. Тогда отображения $g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2)$ не связны соответствием $(X, \succcurlyeq)$, расширенным на множество X^Θ, что следует из соотношения (1). Тогда $g(\cdot, u_1) \overline{\succcurlyeq} g(\cdot, u_2)$ и $g(\cdot, u_2) \overline{\succcurlyeq} g(\cdot, u_1)$. При этом, как отмечалось ранее, асимметричная составляющая этого расширения, т.е. $(X^\Theta, \succ)$, является строгим частичным порядком.

Определим пару соответствий $(X^\Theta, \succ')$ и $(X^\Theta, \succ'')$ следующим образом. Для любых отображений $u, v \in X^\Theta$ положим:

$$u \succ' v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \succ v \text{ либо } (u \succcurlyeq g(\cdot, u_1) \text{ и } g(\cdot, u_2) \succcurlyeq v), \tag{7}$$

$$u \succ'' v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \succ v \text{ либо } (u \succcurlyeq g(\cdot, u_2) \text{ и } g(\cdot, u_1) \succcurlyeq v). \tag{8}$$

При этом ясно, что $g(\cdot, u_1) \succ' g(\cdot, u_2)$ и $g(\cdot, u_2) \succ'' g(\cdot, u_1)$. Покажем, что соответствия $(X^\Theta, \succ')$ и $(X^\Theta, \succ'')$ являются строгими частичными порядками. Из соображений симметрии, доказательство достаточно провести, например, для соответсвия $(X^\Theta, \succ')$.

Сначала покажем нерефлексивность соответствия $(X^\Theta, \succ')$. Рассуждая от противного, предположим, что $u \succ' u$, где $u \in X^\Theta$. Тогда, в силу соотношения (7) $u \succcurlyeq g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2) \succcurlyeq u$. Следовательно, согласно транзитивности соответствия $(X^\Theta, \succcurlyeq)$, получим, что $g(\cdot, u_2) \succcurlyeq g(\cdot, u_1)$. А это противоречит не связности отображений $g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2)$ соотношением $(X^\Theta, \succcurlyeq)$.

Покажем теперь транзитивность соответствия $(X^\Theta, \succcurlyeq')$. Предположим, что $u \succ' v$ и $v \succ' h$, где отображения $u, v, h \in X^\Theta$. Тогда рассмотрим все возможные варианты:

- если $u \succ v$ и $v \succ h$, то $u \succ h$, в силу транзитивности соответствия $(X^\Theta, \succ)$. Значит, согласно соотношению (7), имеем, что $u \succ' h$;
- если $u \succ v, v \succcurlyeq g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2) \succcurlyeq h$, то, в силу транзитивности соответствия $(X^\Theta, \succcurlyeq)$, имеем, что $u \succ g(\cdot, u_1)$. Тогда, согласно соотношению (7), $u \succ' h$;
- если $u \succcurlyeq g(\cdot, u_1), g(\cdot, u_2) \succcurlyeq v$ и $v \succ h$, то, как и выше, $g(\cdot, u_2) \succ h$ и тогда, в силу соотношения (7), $u \succ' h$;

• наконец, оставшийся вариант — условие $u \succcurlyeq g(\cdot, u_1)$, $g(\cdot, u_2) \succcurlyeq v, v \succcurlyeq$ $\succcurlyeq g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2) \succcurlyeq h$, которые являются несовместными, т.к. из них следует (в силу транзитивности соответствия $(X^{\Theta}, \succcurlyeq)$), что $g(\cdot, u_2) \succcurlyeq$ $\succcurlyeq g(\cdot, u_1)$, а это противоречит не связаности отображений $g(\cdot, u_1)$ и $g(\cdot, u_2)$ соответствием $(X^{\Theta}, \succcurlyeq)$.

Далее, воспользовавшись теоремой Шпильрайна [5, с. 31], продолжим строгие частичные порядки $(X^{\Theta}, \succ')$ и $(X^{\Theta}, \succ'')$ до строгих порядков, которые обозначим $(X^{\Theta}, \succ'_0)$ и $(X^{\Theta}, \succ''_0)$. Тогда их сужения на множество $\{g(\cdot, u) : u \in U\}$ определяют линейные порядки, которые можем обозначить соответственно $(U, \succcurlyeq'_0)$ и $(U, \succcurlyeq''_0)$.

Определим ПВП $\text{п}', \text{п}'' \in \Pi(\mathbf{Z}'_0)$ таким образом, что для всех ССЗР $\mathcal{Z}' \in \mathbf{Z}'_0$, не совпадающих с ССЗР $\mathcal{Z}$, $\text{п}''_{\mathcal{Z}'} \overset{\text{def}}{=} \text{п}''_{\mathcal{Z}''} := (U, U^2)$. А для ССЗР $\mathcal{Z}$ $\text{п}'_{\mathcal{Z}} := (U, \succcurlyeq'_0)$, $\text{п}''_{\mathcal{Z}} := (U, \succcurlyeq''_0)$. Тогда, по построению, имеем, что $\text{п}', \text{п}'' \in$ $\in \Pi(\mathbf{Z}'_0)$ и $\text{п}'_{\mathcal{Z}} = \text{п}''_{\mathcal{Z}}$, т.е. ССЗР $\mathcal{Z}$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$.

Теорема доказана.

В качестве непосредственного следствия теорем 1 и 3 мы получаем *критерий неопределенности* ССЗР в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$ в терминах элементарных подсхем:

ССЗР любого класса $\mathbf{Z}'_0 \subseteq \mathbf{Z}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_0)$ тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну подсхему типа $\text{I} - \text{X}$ класса $\mathbf{Z}_0$.

Тогда критерий неопределенности ССЗР в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_1)$ очевидно будет иметь следующий вид:

ССЗР любого класса $\mathbf{Z}'_1 \subseteq \mathbf{Z}_1$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}'_1)$ тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну подсхему типа $\text{I}, \text{III}, \text{VI} - \text{IX}$ класса $\mathbf{Z}_0$.

Критерий неопределенности ССЗР в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)(\Pi_1(\mathbf{Z}_1))$ можно дать и в терминах сечений вдоль боковой «плоскости» графика этой схемы, в виде следующей теоремы.

Теорема 4. ССЗР $((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}_0(\mathbf{Z}_1)$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)(\Pi_1(\mathbf{Z}_1))$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $u_1, u_2 \in U$, для которых отображения $g(\cdot, u_1), g(\cdot, u_2) \in X^{\Theta}$ не связны соответствием $(X^{\Theta}, \succcurlyeq)$.

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы представляет содержание леммы 3, а его достаточность вытекает из леммы 4 и теоремы 3.

Теорема доказана.

Критерий неопределенности ССЗР в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$ $\Pi_1(\mathbf{Z}_1))$ можно, наконец, дать и в терминах сечений вдоль фронтальной «плоскости» графика этой схемы в виде следующей теоремы.

Теорема 5. ССЗР $((X,\succcurlyeq),\Theta,U,g)\in\mathbf{Z}_0(\mathbf{Z}_1)$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)(\Pi_1(\mathbf{Z}_1))$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $\theta_1,\theta_2\in\Theta$, что отображения $g(\theta_1,\cdot),g(\theta_2,\cdot)\in X^U$ не комонотонны относительно $(X,\succcurlyeq)$.

Доказательство следует из теоремы 4 и леммы 2.

Теорема доказана.

Определение 12. Система неизоморфных в классе $\mathbf{Z}$ элементарных схем для $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$ называется *базой неопределенности схем* для класса $\mathbf{Z}_0'\subseteq\mathbf{Z}_0$, если любая ССЗР класса $\mathbf{Z}_0'$ с неопределенности в $\Pi_1(\mathbf{Z}_0')$ содержит подсхему, изоморфную какому-то представителю этой системы.

Теорема 6. База неопределенности схем для любого класса $\mathbf{Z}_0'\subseteq\mathbf{Z}_0$ пустая, если этот класс не содержит ССЗР с неопределенностью в $\Pi_1(\mathbf{Z}_0')$ и состоит из элементов в количестве от одного до десяти в противоположном случае.

Доказательство. Следует из леммы 5 и теоремы 1.

Теорема доказана.

Далее для любого подкласса ССЗР $\mathbb{Z}'$ класса ССЗР $\mathbb{Z}$ через $\Pi_1(\mathbb{Z}')$ обозначим все такие ПВП класса $\mathbb{Z}'$, что для любой ССЗР $\mathrm{Z}:=(X,\Theta,U,g)\in$ $\in\mathbb{Z}'$ выполняются следующие условия:

УУ1. $(U,\succcurlyeq^*)$ — нестрогий порядок.

УУ2. Для любых $u_1,u_2\in U$:

если $g(\cdot,u_1)\succ g(\cdot,u_2)$, то $u_1\succ^* u_2$;

если $g(\cdot,u_1)\sim g(\cdot,u_2)$, то $u_1\sim^* u_2$.

УУ3. $(X,\succcurlyeq)$ — нестрогий порядок.

Рассмотрим следующую совокупность ССЗР класса $\mathbb{Z}$:

- $(\{x_1,x_2\},\ \{\theta_1,\theta_2\},\{u_1,u_2\},\ \{g(\theta_2,u_2)=x_2,g(\theta_2,u_1)=$ $=x_1,g(\theta_1,u_2)=x_1,g(\theta_1,u_1)=x_2\})$;
- $(\{x_1,x_2,x_3\},\ \{\theta_1,\theta_2\},\{u_1,u_2\},\ \{g(\theta_2,u_2)=x_3,g(\theta_1,u_2)=$ $=x_2,g(\theta_2,u_1)=x_1,g(\theta_1,u_1)=x_3\})$;
- $(\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\ \{\theta_1,\theta_2\},\{u_1,u_2\},\ \{g(\theta_1,u_1)=x_3,g(\theta_1,u_2)=$ $=x_2,g(\theta_2,u_1)=x_1,g(\theta_2,u_2)=x_4\})$;
- $(\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\ \{\theta_1,\theta_2\},\{u_1,u_2\},\ \{g(\theta_1,u_1)=x_4,g(\theta_1,u_2)=$ $=x_2,g(\theta_2,u_1)=x_1,g(\theta_2,u_2)=x_3\})$;
- $(\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\ \{\theta_1,\theta_2\},\{u_1,u_2\},\ \{g(\theta_1,u_1)=x_4,g(\theta_1,u_2)=$ $=x_3,g(\theta_2,u_1)=x_1,g(\theta_2,u_2)=x_2\})$;
- $(\{x_1,x_2,x_3\},\ \{\theta_1,\theta_2\},\{u_1,u_2\},\ \{g(\theta_1,u_1)=x_3,g(\theta_2,u_2)=$ $=x_2,g(\theta_2,u_1)=x_1,g(\theta_1,u_2)=x_2\})$.

ССЗР, изоморфные этим схемам в порядке написания, мы будем называть соответственно схемами типов $\mathrm{I}-\mathrm{VI}$ класса $\mathbb{Z}$.

Тогда критерий неопределенности ССЗР в классе $\Pi_1(\mathbb{Z})$ сформулируем в виде слудующей теоремы.

Теорема 7. Всякая ССЗР любого класса $\mathbb{Z}$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда эта ССЗР содержит подсхему вида схемы типов I–VI класса $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть ССЗР $Z:=(X,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z})$. Тогда найдутся такие $\pi',\pi''\in\Pi_1(\mathbb{Z})$, для которых $\pi'_{1Z}=\pi''_{1Z}:=(X,\succcurlyeq)$ — нестрогий порядок и $(U,\succcurlyeq^*):=\pi'_{2Z}=$ $=\pi''_{2Z}:=(U,\succcurlyeq^{**})$. А это означает, что ССЗР $\mathcal{Z}:=((X,\succcurlyeq),\Theta,U,g)\in\mathbf{Z}$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\{\mathcal{Z}\})$. Следовательно, в силу теоремы 1, ССЗР $\mathcal{Z}$ содержит подсхему вида какой-либо из схем типа I–X класса $\mathbf{Z}$. Но любая из этих подсхем определяет в ССЗР Z подсхему одного из типов I–VI класса $\mathbb{Z}$.

В обратную сторону. Если ССЗР $Z:=(X,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}$ содержит подсхему типа I класса $\mathbb{Z}$, то определим строгий частичный порядок $(X,\succ'):=(X,\{(x_2,x_1)\})$. Если ССЗР Z содержит подсхему типа II либо типа VI класса $\mathbb{Z}$, то определим строгий частичный порядок $(X,\succ''):=$ $:=(X,\{(x_2,x_1),(x_3,x_1),(x_3,x_2)\})$. Если же ССЗР Z содержит подсхему одного из типов III–V, то определим строгий частичный порядок $(X,\succ'''):=$ $:=(X,\{(x_2,x_1),(x_3,x_1),(x_3,x_2),(x_4,x_1),(x_4,x_2),(x_4,x_3)\})$. В силу теоремы Шпильрайна эти строгие частичные порядки мы можем продолжить до линейных порядков, которые обозначим соответственно $(X,\succ'_\circ)$, $(X,\succ''_\circ)$ и $(X,\succ'''_\circ)$. Тогда, в силу теоремы 3, либо ССЗР $((X,\succ'_\circ),\Theta,U,g)\in\mathbf{Z}_0$, либо ССЗР $((X,\succ''_\circ),\Theta,U,g)\in\mathbf{Z}_0$, либо ССЗР $((X,\succ'''_\circ),\Theta,U,g)\in\mathbf{Z}_0$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbf{Z}_0)$. Следовательно ССЗР $Z=$ $=(X,\Theta,U,g)$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z})$.

Теорема доказана.

Введем, аналогично как и в классе $\mathbf{Z}$, понятия элементарной схемы и полной системы элементарных схем для $\Pi_1(\mathbb{Z})$, а также базы неопределенности схем класса $\mathbb{Z}'\subseteq\mathbb{Z}$.

Определение 13. ССЗР класса $\mathbb{Z}$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z})$ называется **элементарной схемой** для $\Pi_1(\mathbb{Z})$, если любая подсхема этой ССЗР будет без неопределенности в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z})$.

Определение 14. Система элементарных схем для $\Pi_1(\mathbb{Z})$ называется **полной**, если любая элементарная схема для $\Pi_1(\mathbb{Z})$ изоморфна какому-то представителю этой системы.

Определение 15. Система неизоморфных элементарных схем для $\Pi_1(\mathbb{Z})$ называется **базой неопределенности схем** класса $\mathbb{Z}'\subseteq\mathbb{Z}$, если любая ССЗР класса $\mathbb{Z}'$ с неопределенностью в $\Pi_1(\mathbb{Z}')$ содержит подсхему, изоморфную какому-то представителю этой системы.

Воспользовавшись теоремой 7, мы получаем критерий полноты системы элементарных схем для $\Pi_1(\mathbb{Z})$ и классификацию неопределенности в $\Pi_1(\mathbb{Z}')$ любого подкласса $\mathbb{Z}'$ класса $\mathbb{Z}$ в виде следующих теорем.

Теорема 8. Полная система элементарных схем для $\Pi_1(\mathbb{Z})$ состоит из схем типов I–VI класса $\mathbb{Z}$.

Теорема 9. База неопределенности схем любого класса $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ пустая, если этот класс не содержит ССЗР с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\mathbb{Z}')$ и состоит в количестве от одного до шести элементов в противном случае.

ВЫВОДЫ

Предложенный подход к изучению неопределенности схем ситуаций помимо критериев, позволяющих проанализировать ситуацию на наличие указанной неопределенности в указанных классах ПВП, также дает возможность сужать эти классы ПВП, добавляя новые аксиомы и проверяя в схеме наличие указанной неопределенности, используя полученные ее критерии, вплоть до получения формализма модели критерия оптимальности решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — К.: Наук. думка, 1990. — 134 с.
2. *Ivanenko V.I.* Decision systems and non-stochastic randomness. — Berlin: Springer, 2010. — 272 p.
3. *Михалевич В.М.* К параметрической форме моделирования ситуации в общей задаче принятия решения // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 77–87.
4. *Михалевич В.М.* К неопределенности в непараметрических схемах ситуаций задач принятия решений // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 1. — С. 61–76.
5. *Фишборн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1972. — 352 с.

Поступила 24.01.2012