

УДК 532.59

УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В СЛОИСТЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

И. Т. СЕЛЕЗОВ*, О. В. АВРАМЕНКО**

* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

** Кировоградский государственный педуниверситет, Кировоград

Получено 22.08.2001

Исследуются нелинейные задачи о распространении волновых пакетов на поверхности контакта между двумя жидкостями различной плотности с учетом поверхностного натяжения. Рассмотрены две проблемы, первая для двух полупространств, вторая – для слоя над полупространством. Найдено условие устойчивости комплексной огибающей волновых пакетов на основе нелинейного уравнения Шредингера, полученного методом многомасштабных разложений до четвертого приближения. Численный и асимптотический анализ обнаруживает новую область неустойчивости гравитационных волн и новую область устойчивости капиллярных волн.

Досліджуються нелінійні задачі про поширення хвильових пакетів на поверхні контакту між двома рідинами різної густини з урахуванням поверхневого натягу. Розглянуто дві проблеми, одна для півпросторів, друга – для шару, розміщеного над півпростором. Знайдено умову стійкості комплексної обвідної хвильових пакетів на основі нелінійного рівняння Шредингера, отриманого методом багатомасштабних розвинень до четвертого порядку. Чисельний та асимптотичний аналіз виявили нову область нестійкості гравітаційних хвиль та нову область стійкості капілярних хвиль.

Nonlinear problems of wave-packet propagation on the interface between the two fluids of different densities with taking into account the surface tension are investigated. Two problems are considered, one for half-spaces, another for the layer over a half-space. The stability condition of complex envelope of wave-packet is derived on the basis of the nonlinear Schroedinger equation obtained by using the method of multiple scale expansions to fourth approximation. Asymptotic and numerical analysis discovers a new instability region for gravity waves and a new stability region of capillary waves.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ условий устойчивости внутренних волн в системах, состоящих из жидкостей разных плотностей, представляет большой интерес как в теоретическом, так и в практическом плане. Среди задач такого рода можно особо выделить класс задач, учитывающих поверхностное натяжение, которое существенно влияет на капиллярно-гравитационные волны, где важен вклад высоких гармоник в волновой процесс в целом. Как известно, исследование влияния высших гармоник существенно усложняет анализ громоздкостью преобразований и аналитических результатов, а также соответствующими проблемами численного анализа. В последнее время бурно развиваются компьютерные пакеты символьных вычислений, позволившие получить новые результаты по указанной проблеме, изложенные в настоящей статье.

Представим общее состояние проблемы распространения волн в слоистых гидродинамических системах. Достаточно полный анализ волновых движений содержит статья Найфэ [1], где методом многомасштабных разложений до третьего порядка выведено эволюционное уравнение для волно-

вых движений на поверхности контакта двух полубесконечных жидкостей с учетом поверхностного натяжения. Аналогичная задача о распространении волновых пакетов в системе "слой – полупространство" с учетом поверхностного натяжения изучалась в [2,3] также на основе метода многомасштабных разложений до третьего порядка.

Распространение внутренних уединенных волн в жидкой двухслойной среде, ограниченной сверху и снизу твердыми плоскостями, без учета поверхностного натяжения исследовалось в [4], где получено решение в форме обобщенных степенных рядов по параметру, зависящему от величины, обратной числу Фруда.

Многие современные исследования посвящены формированию, эволюции и устойчивости волн большой амплитуды [5,6]. Двухслойная система с верхней и нижней жидкостями конечной глубины на основе уравнений Эйлера в предположении, что толщина слоя является малой по сравнению с горизонтальным масштабом (длиной волны), рассмотрена в статье [7], решения найдены в виде разложений по малому параметру толщины. Представленные в статье [8] исследования внутренних волн редуцированным методом возмущений привели к уравнению КдВ (Кортевега-де Вриза) вместо

уравнения Шредингера.

На основе разложения искомых функций в ряд Фурье исследованы нелинейные внутренние волны на поверхности контакта двух жидких полуграниченных сред с различными плотностями в [9]. Исследованы основные характеристики волновых движений в некоторых предельных случаях, включая случай малой плотности верхней жидкости.

Из экспериментальных исследований, проведенных в последнее время, отметим эксперимент в однородном окружающем потоке трехслойной жидкости с тонким промежуточным слоем, содержащем источник, в ходе которого обнаружено образование уединенных волн [10]. Показано, что при некоторых значениях параметров генерируются уединенные волны, которые распространяются вверх по потоку. Проведенный анализ распространения волн в такой системе [11] основан на стоковом разложении, ведущем к нелинейному уравнению Шредингера.

Отметим также некоторые другие актуальные работы по изучению внутренних нелинейных волн [12 – 14], а также работы, опубликованные в последнее время, существенно дополняющие и развивающие проблему распространения волновых пакетов на поверхности раздела двух жидких сред [15 – 17].

В настоящей статье впервые проведено исследование устойчивости решения эволюционного уравнения в четвертом асимптотическом приближении для задачи о распространении внутренних волн в гидродинамической системе “слой – полупространство” методом многомасштабных разложений для случая волновых чисел, больших критического волнового числа. Аналогичная задача рассмотрена также для системы “полупространство – полупространство”. Сопоставление полученных результатов дало возможность исследовать влияние слоя конечной толщины на устойчивость волновых движений. Проведен также анализ влияния поверхностного натяжения на устойчивость волновых пакетов в обеих системах.

1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА “СЛОЙ – ПОЛУПРОСТРАНСТВО”

1.1. Эволюционное уравнение комплексной огибающей волнового пакета

Рассмотрим распространение волновых пакетов на поверхности контакта жидкого полупростран-

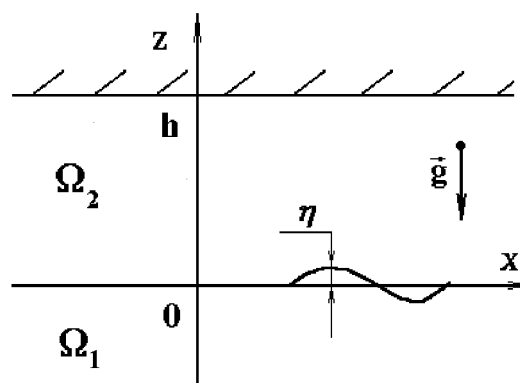


Рис. 1. Постановка задачи

ства $\Omega_1 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, z < 0\}$ и жидкого слоя над ним $\Omega_2 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, 0 \leq z < h\}$ с различными плотностями с учетом поверхностного натяжения (рис. 1).

Математическая постановка задачи [18] представляется в виде

$$\nabla^2 \varphi_j = 0 \quad \text{в } \Omega_j, \quad (1)$$

$$\eta_{,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{,x} \quad \text{на } z = \eta(x, t), \quad (2)$$

$$\varphi_{1,t} - \rho \varphi_{2,t} + (1 - \rho) \eta + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1)^2 - \frac{1}{2} \rho (\nabla \varphi_2)^2 -$$

$$-T (1 + \eta_{,x}^2)^{-3/2} \eta_{,xx} = 0 \quad \text{на } z = \eta(x, t), \quad (3)$$

$$|\nabla \varphi_1| \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, \quad (4)$$

$$\varphi_{2,z} = 0 \quad \text{на } z = h, \quad (5)$$

где $j = 1, 2$; $\rho = \rho_1 / \rho_2$ – отношение плотностей нижней и верхней жидкостей; $\eta(x, t)$ – отклонение поверхности контакта от невозмущенного состояния $z = 0$.

Безразмерные величины введены на основе характерной длины L , характерного времени $(L/g)^{1/2}$, плотности нижней жидкости ρ_1 , где g – ускорение свободного падения. Безразмерный коэффициент поверхностного натяжения имеет вид $T^* = T / (L^2 \rho g)$ (далее звездочка опущена).

Для построения приближенных решений задачи (1) – (5) для волн малых, но конечных амплитуд, применяется метод многомасштабных разложений до четвертого порядка: [19]

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^4 \varepsilon^n \eta_n(x_0, x_1, x_2, x_3, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\varepsilon^5), \quad (6)$$

$$\phi_j(x, z, t) = \quad (7)$$

$$= \sum_{n=1}^4 \varepsilon^n \phi_{jn}(x_0, x_1, x_2, x_3, z, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\varepsilon^5),$$

где ε – малый безразмерный параметр; $x_n = \varepsilon^n x$; $t_n = \varepsilon^n t$ – масштабные переменные. Подстановка выражений (6) – (7) в (1) – (5) с последующим приравнованием выражений при одинаковых степенях малого параметра ε приводит к четырём линейным задачам относительно неизвестных функций η_n и ϕ_{jn} ($n = \overline{1,4}$) – членам рядов (6) и (7).

Как известно, задача первого приближения имеет решения вида

$$\eta_1 = A \exp i\theta - \bar{A} \exp(-i\theta), \quad (8)$$

$$\phi_{11} = -i \frac{\omega}{k} (A \exp i\theta + \bar{A} \exp(-i\theta)) \exp kz, \quad (9)$$

$$\phi_{21} = i \frac{\omega}{k} (A \exp i\theta + \bar{A} \exp(-i\theta)) \frac{\operatorname{ch} k(h-z)}{\operatorname{sh} kh}, \quad (10)$$

где \bar{A} – сопряженная к комплексной огибающей волнового пакета A ; $\theta = kx_0 - \omega t_0$; k – волновое число; ω – частота центра волнового пакета. Задача первого приближения приводит к дисперсионному соотношению между волновым числом и частотой центра волнового пакета:

$$\omega^2 = \frac{k(1 - \rho + Tk^2)}{1 + \rho \operatorname{cth} kh}. \quad (11)$$

Каждая из трех последующих линейных задач имеет так называемые условия разрешимости (условия отсутствия секулярных членов). Не останавливаясь на подробном изложении громоздкого процесса получения указанных условий, выполненного в компьютерном пакете символьных вычислений, приведем их в виде системы

$$A_{,t_1} + \omega' A_{,x_1} = 0, \quad (12)$$

$$A_{,t_2} + \omega' A_{,x_2} - \frac{i\omega''}{2} A_{,x_1 x_1} = \frac{-ik}{\omega(1 + \rho \operatorname{cth} kh)} I A^2 \bar{A}, \quad (13)$$

$$A_{,t_3} + \omega' A_{,x_3} - i\omega'' A_{,x_1 x_2} - \frac{\omega'''}{6} \cdot A_{,x_1 x_1 x_1} = \frac{k}{\omega(1 + \rho \operatorname{cth} kh)} \left[JA \bar{A} A_{,x_1} - I \left(\frac{k}{\omega} \right)' (A^2 \bar{A})_{,x_1} \right], \quad (14)$$

где $\omega' = d\omega/dk$, $\omega'' = d^2\omega/dk^2$, $\omega''' = d^3\omega/dk^3$,

$$I = k^2 \frac{a_3 T^3 k^6 + a_2 T^2 k^4 + a_1 T k^2 + a_0}{b_1 T k^2 + b_0}, \quad (15)$$

причем

$$a_3 = 2\rho^2 \operatorname{sh} 2kh + 2\rho^3 \operatorname{sh}^2 kh + 6\rho^3,$$

$$a_2 = -17.5\rho^2(1 - \rho) \operatorname{sh} 2kh - 2\rho(5\rho^2 - 8\rho + 3) \operatorname{sh}^2 kh \operatorname{sh} 2kh +$$

$$+(\rho^3 + 3\rho^2 - 5\rho + 1) \operatorname{sh}^4 kh \operatorname{sh} 2kh - 2\rho(\rho^3 - 5\rho^2 + 3\rho + 1) \operatorname{sh}^6 kh - \rho(19\rho^3 - 39\rho^2 + 25\rho + 5) \operatorname{sh}^4 kh - 4\rho(11\rho^3 - 14\rho^2 + 5\rho - 2) \operatorname{sh}^2 kh - 33\rho^3(1 - \rho),$$

$$a_1 = 17\rho^2(1 - \rho) \operatorname{sh} 2kh + \rho(0.5\rho^3 - 13\rho^2 + 24.5\rho - 12) \operatorname{sh}^2 kh \operatorname{sh} 2kh + (-6.5\rho^4 + 5\rho^3 + 10\rho^2 - 9\rho + 0.5) \operatorname{sh}^4 kh \operatorname{sh} 2kh + \rho(\rho^4 - 18\rho^3 + 20\rho^2 + 10\rho - 13) \operatorname{sh}^6 kh + \rho(17\rho^4 - 74\rho^3 + 83\rho^2 - 12\rho - 14) \operatorname{sh}^4 kh + 2\rho(23\rho^4 - 58\rho^3 + 49\rho^2 - 32\rho + 4) \operatorname{sh}^2 kh + 36\rho^3(1 - \rho)^2,$$

$$a_0 = -1.5\rho^2(1 - \rho)^3 \operatorname{sh} 2kh - 2\rho(2\rho^4 - 9\rho^3 + 15\rho^2 - 11\rho + 3) \operatorname{sh}^2 kh \operatorname{sh} 2kh - (8\rho^5 - 28\rho^4 + 40\rho^3 - 32\rho^2 + 16\rho - 4) \operatorname{sh}^4 kh \operatorname{sh} 2kh - 4\rho(2\rho^5 - 8\rho^4 + 16\rho^3 - 20\rho^2 + 14\rho - 4) \operatorname{sh}^6 kh - 4\rho(5\rho^5 - 17\rho^4 + 29\rho^3 - 25\rho^2 + 11\rho - 2) \operatorname{sh}^4 kh + \rho(-15\rho^5 + 57\rho^4 - 77\rho^3 + 39\rho^2 - 4) \operatorname{sh}^2 kh + 9\rho^3(1 - \rho)^3,$$

$$b_1 = \operatorname{sh}^2 kh [16\rho^2(1 - \rho)^2 \operatorname{sh} 2kh + 4(3\rho^3 - 3\rho^2 + \rho - 1) \operatorname{sh}^2 kh \operatorname{sh} 2kh + 4\rho(5\rho^3 - 5\rho^2 + 7\rho - 7) \operatorname{sh}^2 kh - 8\rho(1 - \rho)^3 \operatorname{sh}^4 kh - 12\rho^3(1 - \rho)],$$

$$b_0 = \operatorname{sh}^2 kh [2\rho^2(1 - \rho)^2 \operatorname{sh} 2kh + 2(4\rho^4 - 6\rho^3 + 4\rho^2 - 2\rho + 1) \operatorname{sh}^2 kh \operatorname{sh} 2kh + 4\rho(\rho^4 - 2\rho^3 + 6\rho^2 - 8\rho + 4) \operatorname{sh}^2 kh + 4\rho(\rho^4 - 2\rho^3 + 4\rho^2 - 8\rho + 3) \operatorname{sh}^4 kh].$$

Из соотношения (15) виден вклад коэффициента поверхностного натяжения, представленный различными его степенями.

Анализ связи между коэффициентами в нелинейных частях условий разрешимости третьего и четвертого порядка I и J дает важное соотношение

$$J = -i\partial I / \partial k. \quad (16)$$

Домножая уравнения (12) – (14) на ε , ε^2 и ε^3 соответственно и складывая полученные соотношения, а затем переходя от масштабных переменных к основным, временной и пространственной, получаем уравнение с одной производной по временной

и тремя по пространственной координате:

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - \frac{i\omega''}{2!} \cdot A_{,xx} - \frac{\omega'''}{3!} \cdot A_{,xxx} = \frac{-\varepsilon^2}{1 + \rho \text{cth} kh} \times \\ \times \left\{ i \frac{k}{\omega} A \bar{A} [IA + I' A_{,x}] + \left(\frac{k}{\omega} \right)' I (A^2 \bar{A})_{,x} \right\}, \quad (17)$$

где $I' = \partial I / \partial k$. Таким образом, эволюционное уравнение представлено в виде нелинейного уравнения Шредингера высшего порядка.

Как и следовало ожидать, левая линейная часть уравнения (17) имеет вид, соответствующий ряду Тейлора, из которого несложно получить последующие слагаемые линейной части эволюционного уравнения в приближениях, выше четвертого. В то же время, соотношение (16) между коэффициентами I и J дало возможность представить правую нелинейную часть эволюционного уравнения (17) в четвертом приближении в форме, из которой видны дополнительные слагаемые от четвертого приближения – второе слагаемое в квадратных скобках и второе слагаемое в фигурных скобках. Такая форма записи нелинейной части приводит к идее о применении метода математической индукции для записи последующих слагаемых нелинейной части эволюционного уравнения в высших приближениях через один коэффициент I и его производные по волновому числу k .

1.2. Аналитическое исследование устойчивости решений эволюционного уравнения.

Уравнение (17) несколько преобразуем заменой переменных x и t новыми переменными

$$\xi = x - \omega' t, \quad \zeta = t,$$

что приводит к уравнению

$$A_{,t} + \frac{i\omega''}{2!} \cdot A_{,\xi\xi} - \frac{\omega'''}{3!} \cdot A_{,\xi\xi\xi} = \frac{-\varepsilon^2}{1 + \rho \text{cth} kh} \times \\ \times \left\{ i \frac{k}{\omega} A \bar{A} [IA + I' A_{,\xi}] + \left(\frac{k}{\omega} \right)' I (A^2 \bar{A})_{,\xi} \right\}. \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет решение, зависящее только от ζ :

$$A = a \exp \left(- \frac{i\varepsilon^2}{1 + \rho \text{cth} kh} \cdot \frac{k}{\omega} I a^2 \zeta \right), \quad (19)$$

где $a = \text{const}$.

Придадим амплитуде a возмущение $\alpha(\xi, \zeta)$, а аргументу экспоненты – возмущение $i\beta(\xi, \zeta)$. Полагаем, что α и β принимают только действительные

значения. Подставим возмущенное решение

$$A = (a + \alpha) \exp \left(- \frac{i\varepsilon^2}{1 + \rho \text{cth} kh} \cdot \frac{k}{\omega} I a^2 \zeta + i\beta \right) \quad (20)$$

в эволюционное уравнение (18), что приводит к системе дифференциальных уравнений относительно $\alpha(\xi, \zeta)$ и $\beta(\xi, \zeta)$. Затем, пренебрегая нелинейными членами, приходим к линейной системе уравнений вида

$$\alpha_{,\zeta} + \frac{1}{2} \omega'' a \beta_{,\xi\xi} - \frac{1}{6} \omega''' \alpha_{,\xi\xi\xi} = 0, \quad (21) \\ a \beta_{,\zeta} - \frac{1}{2} \omega'' \alpha_{,\xi\xi} - \frac{1}{6} \omega''' a \beta_{,\xi\xi\xi} - \\ - \alpha \frac{\varepsilon^2}{1 + \rho \text{cth} kh} \cdot \frac{k}{\omega} I a^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 + \rho \text{cth} kh} \frac{k}{\omega} I a^3.$$

Система (21) допускает решения вида

$$\alpha = \alpha_1 \exp i(k_1 \xi - \omega_1 \zeta) + \alpha_0, \quad (22) \\ \beta = \beta_1 \exp i(k_1 \xi - \omega_1 \zeta).$$

Подстановка уравнений (22) в (21) дает значение $\alpha_0 = -a$ и систему уравнений относительно амплитуд α_1 и β_1 :

$$i \left(-\omega_1 + \frac{1}{6} \omega''' k_1^3 \right) \alpha_1 - \frac{1}{2} a \omega'' k_1^2 \beta_1 = 0, \quad (23) \\ \left(\frac{1}{2} \omega'' k_1^2 - \frac{\varepsilon^2}{1 + \rho \text{cth} kh} \frac{k}{\omega} I a^2 \right) \alpha_1 + \\ + i a \left(-\omega_1 + \frac{1}{6} \omega''' k_1^3 \right) \beta_1 = 0.$$

Из системы (23) следует дисперсионное соотношение

$$\omega_1^2 - \frac{1}{3} \omega_1 \omega''' k_1^3 + \frac{1}{36} \omega'''' k_1^6 - \\ - \frac{1}{4} \omega''^2 k_1^4 + \frac{1}{2} \omega'' k_1^2 \frac{\varepsilon^2}{1 + \rho \text{cth} kh} \cdot \frac{k}{\omega} I a^2 = 0. \quad (24)$$

Из квадратного уравнения относительно ω_1 видно, что частота ω_1 принимает действительные значения для всех волновых чисел k_1 , если дискриминант уравнения (24) неотрицательный, откуда имеем

$$\omega''^2 \left(k_1^2 - 2 \frac{\varepsilon^2}{1 + \rho \text{cth} kh} \cdot \frac{k}{\omega \omega''} I a^2 \right) \geq 0. \quad (25)$$

Следовательно, условие устойчивости решения (19) эволюционного уравнения (18) с учетом $k > 0$, $\omega > 0$ и $1 + \rho \text{cth} kh > 0$ имеет вид

$$I \omega'' \leq 0. \quad (26)$$

Отметим, что аналогичные исследования эволюционного уравнения в низшем третьем приближении также приводят к неравенству (26).

Для всех фиксированных $h \neq 0$ в случае длинных гравитационных волн ($k \rightarrow 0$) имеем

$$I \rightarrow \frac{10(1-\rho)}{4} \frac{1-\rho}{h^2}, \quad \omega'' \rightarrow -k(1-\rho)^{1/2} \left(\frac{h}{\rho}\right)^{3/2}, \quad (27)$$

т.е. гравитационные волны в системе "слой – полупространство" устойчивы в случае $\rho < 1$, как нелинейно (27), так и линейно (11).

В то же время, для всех фиксированных $h \neq 0$ в случае коротких капиллярных волн ($k \rightarrow \infty$)

$$I \rightarrow \frac{-Tk^4(1-6\rho+\rho^2)}{4(1+\rho)^3}, \quad \omega'' \rightarrow \frac{3T^{1/2}}{4k^{1/2}(1+\rho)^{1/2}}, \quad (28)$$

при этом необходимо отметить также существование разрыва непрерывности у функции $I(k, \rho, h)$ при $\rho = 1$, поскольку

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} I(1-\rho) = \frac{-(1-\text{cth}^2 kh)^2}{2(1+\text{cthh})} k^6 T^2. \quad (29)$$

Таким образом, капиллярные волны неустойчивы, вообще говоря, если $(\sqrt{2}-1)^2 < \rho < (\sqrt{2}+1)^2$ за исключением некоторой левой окрестности $\rho = 1$: $\rho_0 < \rho < 1$.

2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА "ПОЛУПРОСТРАНСТВО – ПОЛУПРОСТРАНСТВО"

Рассмотрим еще одну гидродинамическую систему "полупространство – полупространство" $\Omega_1 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, z < 0\}$; $\Omega_2 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, z > 0\}$ в тех же предположениях и обозначениях, что и в предыдущей задаче. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\nabla^2 \varphi_j = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_j, \quad (30)$$

$$\eta_{,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{,x} \quad \text{на} \quad z = \eta(x, t), \quad (31)$$

$$\varphi_{1,t} - \rho \varphi_{2,t} + (1-\rho) \eta + 0.5 (\nabla \varphi_1)^2 - 0.5 \rho (\nabla \varphi_2)^2 - T(1+\eta_{,x}^2)^{-3/2} \eta_{,xx} = 0 \quad \text{на} \quad z = \eta(x, t), \quad (32)$$

$$|\nabla \varphi_j| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \mp \infty, \quad (33)$$

$j = 1, 2$.

Получены дисперсионное уравнение и условия разрешимости до четвертого порядка:

$$\omega^2 = \frac{k(1-\rho+Tk^2)}{1+\rho}, \quad (34)$$

$$A_{,t_1} + \omega' A_{,x_1} = 0, \quad (35)$$

$$A_{,t_2} + \omega' A_{,x_2} - \frac{i\omega''}{2} A_{,x_1 x_1} = \frac{-ik}{\omega(1+\rho)} I_0 A^2 \bar{A}, \quad (36)$$

$$A_{,t_3} + \omega' A_{,x_3} - i\omega'' A_{,x_1 x_2} - \frac{\omega'''}{6} A_{,x_1 x_1 x_1} = \frac{k}{\omega(1+\rho)} \left[J_0 A \bar{A} A_{,x_1} - I_0 \left(\frac{k}{\omega}\right)' (A^2 \bar{A})_{,x_1} \right], \quad (37)$$

где

$$I_0 = k^2 [(1-6\rho+\rho^2)k^4 T^2 + 0.5(1-31\rho+31\rho^2-\rho^3)k^2 T + 4(1-2\rho+2\rho^2-2\rho^3+\rho^4)], \quad (38)$$

$$: [2(1+\rho)^2(1-\rho-2Tk^2)], \quad (39)$$

причем коэффициенты I_0 та J_0 связаны зависимостью, аналогичной (16):

$$J_0 = -i\partial I_0 / \partial k.$$

Получено также эволюционное уравнение

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - \frac{i\omega''}{2!} A_{,xx} - \frac{\omega'''}{3!} A_{,xxx} = \frac{-\varepsilon^2}{1+\rho} \left\{ i \frac{k}{\omega} A \bar{A} [I A + I_0' A_{,x}] + \left(\frac{k}{\omega}\right)' I_0 (A^2 \bar{A})_{,x} \right\}, \quad (40)$$

где $I_0' = \partial I_0 / \partial k$.

Исследования устойчивости решения уравнения (39), аналогичные приведенным в разделе 1.2, приводят к неравенству

$$I_0 \omega'' \leq 0. \quad (41)$$

В случае гравитационных волн ($k \rightarrow 0$)

$$I_0 \rightarrow 2 \frac{k^2(1-\rho)(1+\rho^2)}{(1+\rho)^2}, \quad \omega'' \rightarrow -\frac{(1-\rho)^{1/2}}{4k^{3/2}(1+\rho)^{1/2}}, \quad (42)$$

т.е. гравитационные волны устойчивы при $\rho < 1$.

Для капиллярных волн ($k \rightarrow \infty$) выполняются соотношения

$$I_0 \rightarrow \frac{-Tk^4(1-6\rho+\rho^2)}{4(1+\rho)^3}, \quad \omega'' \rightarrow \frac{3T^{1/2}}{4k^{1/2}(1+\rho)^{1/2}}. \quad (43)$$

В системе "полупространство – полупространство" не существует особенностей при $\rho = 1$. Таким образом, капиллярные волны неустойчивы при $(\sqrt{2}-1)^2 < \rho < (\sqrt{2}+1)^2$.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

3.1. "Полупространство – полупространство"

Численный анализ устойчивости целесообразно начать с более простой задачи о распространении волн на поверхности раздела двух полупространств, которую, вообще говоря, можно рассматривать как предельный случай аналогичной задачи в системе, состоящей из полупространства и слоя конечной толщины над ним.

Диаграмма устойчивости получена на основе численного анализа неравенства (41) и представлена на рис. 2. Области устойчивости и неустойчивости разделяются кривыми, помеченными индексами "0" – "5": индекс "0" – кривая $\rho = 1 + Tk^2$ отделяет область линейной неустойчивости V_0 ; индексы "1" и "5" – кривые, вдоль которых вторая производная частоты по волновому числу равна нулю ($\omega'' = 0$); индексы "2" и "3" – кривые, соответствующие равенству нулю коэффициента $I_0 = 0$; индекс "4" – кривая, вдоль которой $I_0 \rightarrow \infty$.

Обнаружены три области нелинейной устойчивости V_6 , V_4 та V_2 , для двух из которых выполняется условие $\rho < 1$. Область V_6 ($k \rightarrow 0$) соответствует длинным гравитационным волнам, что подтверждает полученный выше вывод об устойчивости гравитационных волн при большей плотности нижней жидкости. Расположенная несколько выше, т. е. для более коротких волн, область неустойчивости V_3 возникает в результате баланса или конкуренции одного порядка гравитационной силы и силы поверхностного натяжения, имеющих, как известно, различную природу.

Еще одна область неустойчивости V_3 неограничена сверху и "зажата" между вертикальными асимптотами $\rho = (\sqrt{2} + 1)^2$ и $\rho = (\sqrt{2} - 1)^2$, что подтверждает вывод, полученный методами асимптотического анализа. Устойчивость капиллярных волн в случае $\rho < 1$ имеет место при $\rho < (\sqrt{2} - 1)^2$, или для достаточно малой плотности верхней жидкости относительно нижней. Увеличение плотности верхней жидкости приводит к дестабилизации волн малой длины.

Приведем также результаты анализа экзотического с точки зрения гидромеханики случая $\rho > 1$. Обнаружена область устойчивости V_2 , для больших k имеющая справа асимптоту $\rho = (\sqrt{2} + 1)^2$, и ниже область неустойчивости V_1 , граничащая с областью линейной неустойчивости V_0 .

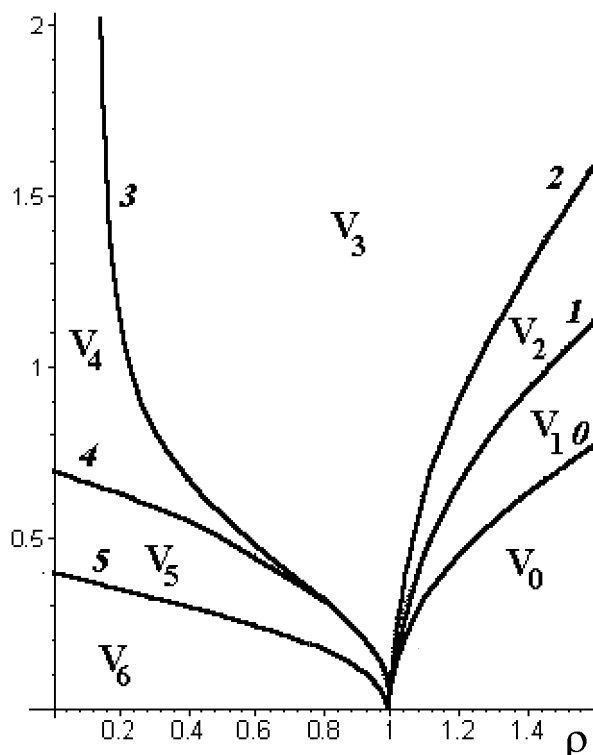


Рис. 2. Диаграмма устойчивости для системы "полупространство - полупространство". Области нелинейной устойчивости: V_2 , V_4 , V_6 ; неустойчивости: V_1 , V_3 , V_5 .

3.2. "Слой – полупространство"

Обратимся теперь к анализу устойчивости волновых пакетов в системе "слой – полупространство", исходя из неравенства (26). Диаграмма устойчивости для различных толщин слоя представлена на рис. 3, где области устойчивости и неустойчивости отделены друг от друга семью кривыми. Область линейной неустойчивости и в этой гидродинамической системе определяется кривой $\rho = 1 + Tk^2$ (индекс "0").

Индексами "1" и "6" помечены кривые, полученные из равенства нулю второй производной частоты по волновому числу $\omega'' = 0$. Численный анализ соотношения $I = 0$ приводит к выводу о существовании трех кривых (а не двух, как в системе "полупространство – полупространство") – индексы "2", "4" и "7". Так, кривая "2" исходит из точки (1,0) и имеет вертикальную асимптоту $\rho = (\sqrt{2} + 1)^2$; а кривая "4" имеет две вертикальные асимптоты $\rho = (\sqrt{2} - 1)^2$ и $\rho = 1$. Кривая "7" расположена в окрестности начала координат и

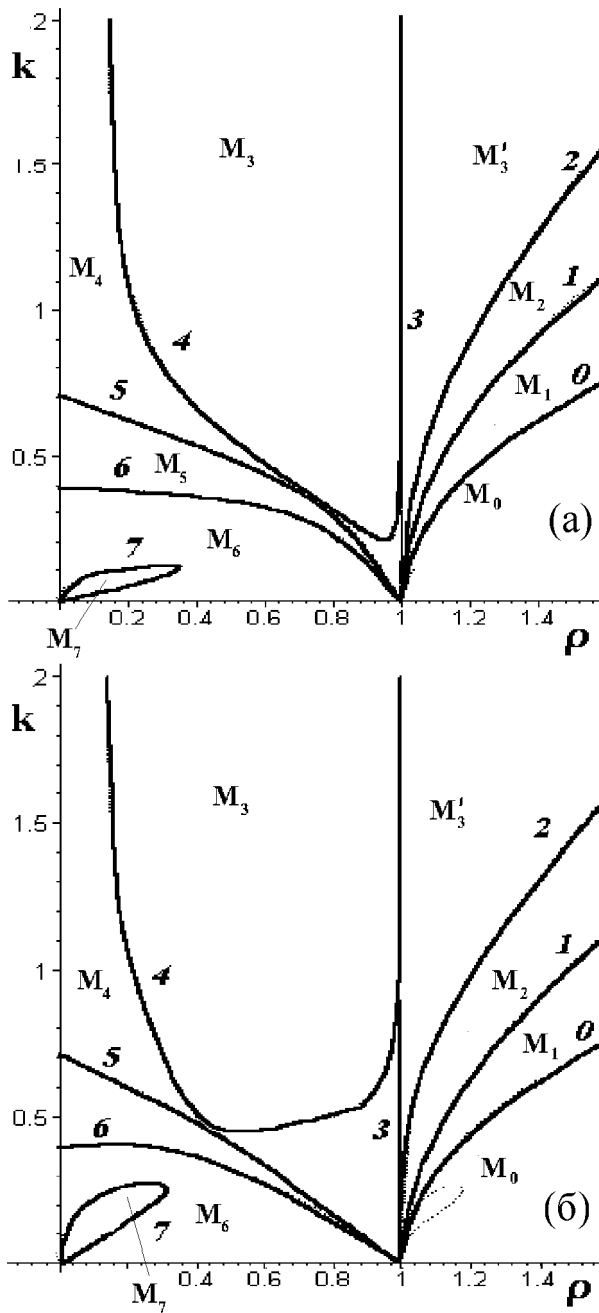


Рис. 3. Диаграмма устойчивости системы "слой – полупространство" при $T^* = 1$
(а) – $h^* = 5$ (б) – $h^* = 2$

имеет форму петли, которая с возрастанием толщины слоя поворачивается вокруг начала координат и вырождается в отрезок на горизонтальной оси $k = 0$ при $h \rightarrow \infty$. Условие $I \rightarrow \infty$ дает еще две кривые (а не одну, как в системе "слой – полупространство") на диаграмме устойчивости: вер-

тикальная прямая $\rho = 1$ (индекс 3) и кривая, аналогичная кривой "4" в системе "полупространство – полупространство", на рис. 3 имеет индекс "5".

Для достаточно больших толщин (например, $h = 5$ и $h = 2$, рис.3 а,б) наблюдается две области устойчивости M_6 и M_4 для $\rho < 1$ и одна M_2 для экзотического случая $\rho > 1$. Область устойчивости M_6 отвечает длинным гравитационным волнам. M_4 – охватывает капиллярные волны для малых отношений плотностей ρ , а также очень узкую, но для каждого волнового числа конечную область в окрестности $\rho = 1$ для $\rho < 1$. Это означает, что в системе "слой – полупространство" есть возможность существования устойчивых волн при условии близких плотностей жидких сред, что не было обнаружено для системы "полупространство – полупространство".

Область неустойчивости в системе "полупространство – полупространство" V_3 в более сложной системе "слой – полупространство" распадается на две неограниченные области неустойчивости M_3 и M'_3 , разделенные выше описанной узкой частью области устойчивости M_4 .

Область неустойчивости M_5 вызвана воздействием разных по своей природе сил гравитации и поверхностного натяжения. В этой области для $\rho = 0$ наличие поверхностного натяжения приводит к дестабилизации волн с безразмерными волновыми числами приблизительно между $0.393 \cdot T^{-1/2}$ и $0.707 \cdot T^{-1/2}$, как и в системе "полупространство – полупространство". Наличие слоя вместо полупространства приводит также к появлению новой области неустойчивости гравитационных волн M_7 , которая ограничена петлей "7".

Итак, в системе "слой – полупространство" у гравитационных волн появилась область неустойчивости в окрестности $\rho = 0$, в то время как в капиллярных – область устойчивости в узкой окрестности прямой $\rho = 1$.

Заметим, что уменьшение толщины слоя приводит к перераспределению областей устойчивости, как это показано для $h = 1$ (рис. 4). Видно, что кривая "7" в форме петли пересекается с кривой "6", в результате образуется своеобразная комбинация чередующихся областей устойчивости и неустойчивости. При дальнейшем уменьшении толщины слоя петля кривой "7" будет сужаться, прижимаясь к вертикальной оси, а кривая "4", будет подниматься вверх. Таким образом, при существенном уменьшении толщины слоя, накрытого твердой крышкой, области устойчивости расширяются, а области неустойчивости сужаются. Этот эффект можно объяснить стабилизирующим воздействием твердой крышки.

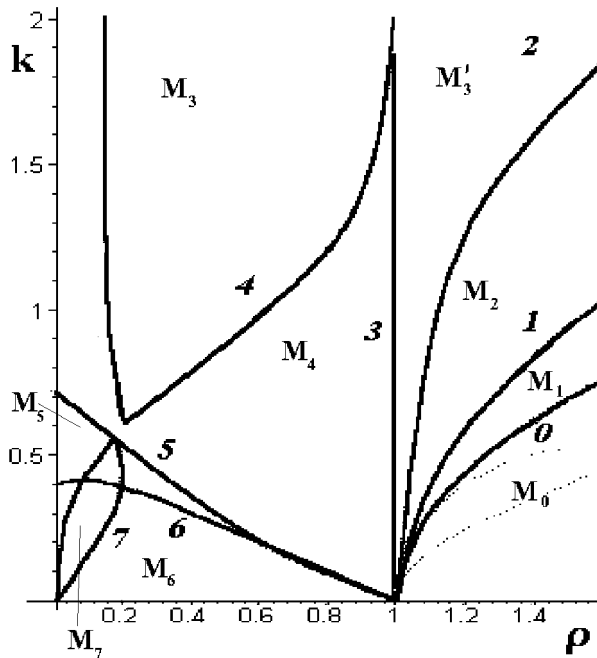


Рис. 4. Диаграмма устойчивости системы "слой – полупространство" при $T^* = 1$ и $h^* = 1$

Еще одна область, отмеченная пунктиром на рис. 3 и 4, соответствует области устойчивости огибающей при линейной неустойчивости огибаемой ею гармоники, и представляет исключительно теоретический интерес.

Следует отметить, что для других фиксированных значений коэффициента поверхностного натяжения будет иметь место аналогичная диаграмма устойчивости с другим масштабом по вертикальной оси k . При условии изменения T в q раз масштаб изменится в $q^{-1/2}$ раз, то есть 1 на вертикальной оси k рис. 2 - 4 следует заменить на $q^{-1/2}$. (Например, при $T = 4$ на рис. 2 - 4 значение по оси k , равное 1, заменяется на 0.5.) Это означает, что увеличение силы поверхностного натяжения приводит к увеличению верхних неограниченных областей неустойчивости M_3 и M'_3 и, соответственно, сужению области нелинейной устойчивости M_6 , прилегающей к горизонтальной оси $k = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты исследования методом многомасштабных приближений до четвертого порядка устойчивости огибающей

волнового пакета на поверхности контакта жидких сред типа "полупространство – полупространство" и "слой – полупространство". Получены аналитические соотношения, определяющие области нелинейной устойчивости и неустойчивости в обеих системах. На основе их асимптотического и численного анализа построены соответствующие диаграммы устойчивости. Анализ полученных результатов приводит к следующим заключениям:

- поверхностные гравитационные волны в предельном случае $k \rightarrow 0$ устойчивы при условии, что плотность верхней жидкости (слой конечной или бесконечной толщины) меньше плотности нижней полуограниченной жидкости $\rho < 1$;

- наличие над жидким полупространством слоя конечной толщины вместо второго бесконечного полупространства приводит для гравитационных волн к появлению области неустойчивости в форме петли в окрестности $\rho = 0$, в то время как для капиллярных – к появлению узкой области устойчивости в окрестности $\rho = 1$;

- в системе "слой – полупространство" для любой фиксированной толщины слоя существуют две области неустойчивости капиллярных волн $(\sqrt{2} - 1)^2 < \rho < \rho_0$ и $1 < \rho < (\sqrt{2} + 1)^2$, в то время как в системе "полупространство – полупространство" эти области сливаются в одну $(\sqrt{2} - 1)^2 < \rho < (\sqrt{2} + 1)^2$;

- в общем случае плоскость (ρ, k) разделяется на область линейной неустойчивости и область линейной устойчивости, которая в свою очередь разделяется на такие области: три области нелинейной устойчивости и пять областей нелинейной неустойчивости. Диаграмму устойчивости для каждого значения коэффициента поверхностного натяжения T можно получить из соответствующей диаграммы для $T = 1$ сжатием в $T^{1/2}$ раз вдоль оси k относительно оси ρ ;

- уменьшение толщины слоя h существенно сужает области нелинейной неустойчивости и расширяет области нелинейной устойчивости капиллярно-гравитационных волн;

- для случая отсутствия верхнего слоя ($\rho = 0$) поверхностное натяжение приводит к дестабилизации волн с безразмерными волновыми числами между $0.393 \cdot T^{-1/2}$ и $0.707 \cdot T^{-1/2}$.

Работа выполнена при поддержке INTAS (Грант N₀99-1637) и ГФФИ Украины (Грант N₀01.07/0079.5531).

1. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME J. Appl. Mech. – 1976. – Ser. E, 43, N4. – P. 584–588.

2. Avramenko O. V., Selezov I. T. Nonlinear wave propagation in a fluid layer based on semi-infinite fluid // Доповіді НАНУ.– 1997.– N10.– P. 61–66.
3. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Нелинейное распространение волновых пакетов при малых частотах // Теорет. и прикл. механика.– 2000.– Вып. 31.– С. 151–157.
4. Bourtos Y.Z., Abl-el-Malex M.B., Tewfick A.H. A format expansion procedure for the internal solitary wave problem in a two-fluid system of constant topography // Acta Mechanica.– 1991.– 88.– P. 172–197.
5. Ioualalen M., Kharif C., Roberts A.J. Stability regimes of finite depth short-crested water waves // J. Phys. Oceanography.– 1999.– 29.– P. 2318–2331.
6. Truisen K. Wave kinematics computed with the nonlinear Schroedinger method for deep water // Trans. ASME.– 1999.– 121.– P. 126–130.
7. Choi W. , Camassa R. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech.– 1996.– 313.– P. 83–103.
8. Kakutani T., Yamasaki N. Solitary waves on a two-layer fluid // J. Phis. Soc. Japan.– 1978.– 45, N2.– P. 674–679.
9. Holyer J.Y. Large amplitude progressive interfacial waves // J. Fluid Mech.– 1979.– 118 (3).– P. 433–448.
10. Selezov I.T, Huq P. Interfacial solitary waves in a three-fluid medium with a source // The 2nd European Fluid Mech. Conf. Poland, Warsaw.– 1994
11. Selezov I.T. Some nonlinear wave evolution equations derived by asymptotic-heuristic approach // Int. Conference "Nonlinear Differential Equations", Ukraine.– Kiev, 1995.– P. 151.
12. Baker G.R. Meiron D.I., Orszag S.A. Generalized vortex methods for free-surface flow problems // J. Fluid Mech.– 1982.– 123.– P. 477–501.
13. Chen Y., Liu P.L.-F. The unified Kadomtsev - Petviashvili equation for interfacial waves // J. Fluid Mech.– 1995.– 228.– P. 383–408.
14. Stamp A.P. , Jacka M. Deep-water internal solitary waves // J. Fluid Mech.– 1995.– 305.– P. 347–371.
15. Selezov I., Avramenko O. Some features of nonlinear wave trains propagating in two-layer fluid // Geophysical Research Abstracts, The 26th General Assembly of the European Geophys. Soc., (Nice, France, 25-30 March, 2001).– 2001.– 3.– P. 8102.
16. Selezov I., Avramenko O. Stability analysis of nonlinear wave trains propagating in two-fluid system. // Abstracts, Int. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation", (Kyiv, 2001, May 22-25).– Kyiv, 2001.– P. 356.
17. Selezov I., Avramenko O., Mironchuk M., Morozova L. On application of the potential theory in the problems of surface gravity waves // Ukrainian Math. Congress. Abstracts. Int. Conf. on Complex Analysis and Potential Theory, Ukraine, (Kyiv, 7-12 Aug. 2001).– Kyiv, 2001.– P. 50-51.
18. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах.– К.: Наук. думка, 1989.– 204 с.
19. Найфэ А. Методы возмущений.– М.: Мир, 1976.– 242 с.