СДІТ
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 622.248

ЗГАСАННЯ ЗВУКУ В МІЖТРУБНОМУ ПРОСТОРІ СВЕРДЛОВИН

В.Я. ДАНИЛОВ, І.Я. НАУМЕНКО, В.І. КИЗИМА, С.М. КЛИМЕНКО

Розглянуто найважливіший вид згасання звуку в міжтрубному просторі свердловин, обумовлений пограничним тертям середовища об стінки хвилевода типу «труба в трубі». Отримано аналітичний вираз для його розрахунку та експериментальні дані, необхідні для розробки електронного обладнання в галузі вимірювання рівня рідини у свердловинах акустичним дистанційним методом.

ВСТУП

Акустичний метод ехолокації здавна використовується для дослідження статичного та динамічного рівнів рідини в нафтових свердловинах і в цій галузі будь-якої серйозної альтернативи йому наразі не існує [1, 2]. Одним із чинників, що суттєво впливає на якісні характеристики ехолокації, є згасання звуку в міжтрубному просторі свердловин. Згідно з [2] це згасання розділяють на три основні складові: обумовлене поглинанням звуку в газовому середовищі; викликане відбиттями від з'єднувальних муфт або реперів, що знаходяться у міжтрубному просторі; обумовлене пограничним тертям середовища поширення звуку в між трубному просторі та нафтопідйомної колони. Наразі для моделі міжтрубного простору типу «труба в трубі» найбільш невивченим є третій вид згасання, який зазвичай у десятки разів перевищує інші за своєю величиною і часто є головною причиною обмеженої дальності дії свердловинних ехолокаторів. Саме цей вид згасання розглянуто в цій роботі.

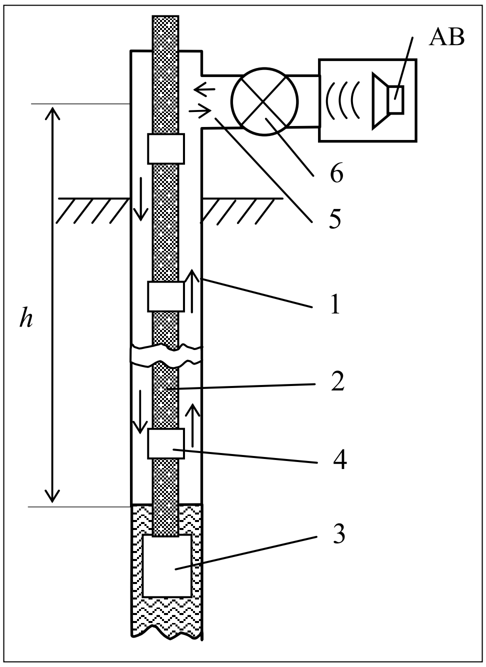

Рис. 1. Структура нафтової свердловини: 1 — обсадна труба; 2 — нафтопідйомна колона; 3 — глибинний насос; 4 — муфта; 5 — вхідний патрубок; 6 — вентель; AB — джерело звуку

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Структуру нафтової свердловини і шлях поширення акустичного сигналу під час зондування наведено на рис. 1. Зазвичай нафтова свердловина складається з обсадної труби 1, нафтопідйомної колони (внутрішньої труби) 2 та відповідного насосно-компресорного обладнання. Останнє складається з глибинного насоса 3 та електричних або механічних його приводів, а нафтопідйомна колона складається з нафтокомпресорних труб (НКТ), з’єднаних між собою муфтами 4. У міжтрубному просторі на глибині h знаходиться рідина (нафта або її суміш з водою), відстань до якої необхідно вимірювати в статичному й у динамічному режимах роботи свердловини. Введення звуку під час ехолокації свердловини здійснюється через короткий вхідний патрубок 5 та вентиль 6. В акустичному сенсі в більшості випадків нафтова свердловина є «вузькою трубою» або довгою акустичною лінією, в якій розповсюджується лише нульова мода акустичного сигналу (плоска хвиля) [1, 3]. Далі ми розглядатимемо хвилевід, в якому існують лише поздовжні коливання частинок середовища.

Мета роботи — вивчення згасання звуку в свердловині завдяки тертю рідини на границях міжтрубного простору.

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Для отримання числових даних необхідно створити математичну модель згасання звуку в міжтрубному просторі. З цією метою будемо користуватися методикою роботи [4], де подібне завдання вирішене для одинокої труби. Під час поширення звукових хвиль у міжтрубному просторі (рис. 1) внаслідок гальмівної дії нерухомих поверхонь обсадної та нафтопідйомної труб виникають в’язкі сили. Під час наближення до поверхні швидкість коливань частинок середовища зменшується і стає практично нульовою в зоні безпосереднього контакту. Таким чином наявність в’язких сил призводить до згасання плоскої звукової хвилі під час поширення вздовж звуководу. Сила в’язкості f діє в перпендикулярному до стінок звуководу напрямку [4] і характеризується коефіцієнтом в’язкості μ:

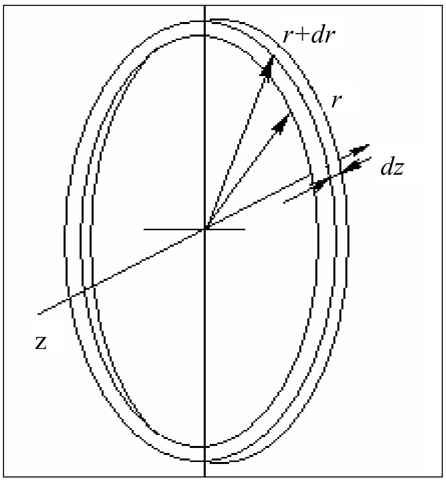

Рис. 2. Елементарний об’єм середовища в міжтрубному просторі: z — вертикальна координата; dz — приріст вертикальної координати; $r + dr$ — зміна товщини рідини; r — товщина рідини

$$f = -\mu \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r}, \tag{1}$$

де $\dot{\xi}$ — коливальна швидкість частинок середовища, ξ — зміщення частинок вздовж осі z (крапка над ξ тут і далі означає похідну від зміщення за часом), r — радіальна координата.

Рівняння руху газового середовища в міжтрубному просторі з урахуванням сил в'язкості для хвилеводу циліндричної форми отримаємо з умови рівноваги елемента, обмеженого площинами r та $r+dr$, а також z та $z+dz$ у циліндричній системі координат (рис. 2). Об'єм елемента $dV = 2\pi r dr dz$, площа бокових граней — $2\pi r dr$, площа внутрішньої поверхні — $2\pi r dz$, площа зовнішньої поверхні — $2\pi(r+dr)dz$. Сила, що збуджує коливання елемента dV, визначається різницею тисків при z та $z+dz$:

$$p 2\pi r dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) 2\pi r dr = -\frac{\partial p}{\partial z} 2\pi r dr dz \,. \tag{2}$$

Їй протидіє інерційна реакція $\rho_0 dV \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = \rho_0 2\pi r dr dz \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t}$. Окрім того, елемент знаходиться під дією двох в'язких сил: зсередини — прискорюючої, яку згідно з (1) можна записати у вигляді $2\pi r f_r dz$, а ззовні — гальмівної $2\pi(r+dr) f_{r+dr} dz$. Враховуючи це, умову рівноваги елемента dV запишемо таким чином:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} 2\pi r dr dz + 2\pi r f_r dz = \rho_0 2\pi r dr dz \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} + 2\pi \left(r + dr\right) f_{r+dr} dz \,.$$

Оскільки $\left(r+dr\right) f_{r+dr} - r f_r = -\mu d\left(r \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} \right) = -\mu r \left(\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} \right) dr$, то скоротивши всі члени на $2\pi r dz dr$, отримаємо рівняння

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_0 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} \right).$$

Для гармонічного збудження воно набуває вигляду [4]:

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} - \dot{\gamma}_r^2 \dot{\xi} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \,. \tag{3}$$

Тут $\dot{\gamma}_r = \sqrt{\frac{j \cdot \omega \rho_0}{\mu}} = \gamma_r \sqrt{j} = \sqrt{\frac{\omega \rho_0}{2\mu}} \left(1 + j\right)$ — стала розповсюдження; ω — кругова частота; ρ_0 — густина середовища; j — уявна одиниця. Крапка над γ тут і далі означає комплексне число. Для моделі типу «труба в трубі» нульова швидкість частинок середовища безпосередньо на стінках міжтрубного простору дає такі граничні умови:

$$\dot{\xi}\left(r\right)\Big|_{r=a} = \dot{\xi}\left(r\right)\Big|_{r=b} = 0 \,, \tag{4}$$

де a — радіус внутрішньої труби, b — радіус обсадної труби. Таким чином отримуємо крайову задачу для функцій Бесселя 0-го порядку:

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} - \dot{\gamma}_r^2 \dot{\xi} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \,, \; \dot{\xi}\left(r\right)\Big|_{r=a} = \dot{\xi}\left(r\right)\Big|_{r=b} = 0 \,. \tag{5}$$

Розв'язок отриманого рівняння шукатимемо так: $\dot{\xi}(r) = C_1 I_0(\dot{\gamma}_r r) + C_2 K_0(\dot{\gamma}_r r) + C_3$, де $I_0(\dot{\gamma}_r r)$ та $K_0(\dot{\gamma}_r r)$ — *модифіковані* функції Бесселя

1-го та 2-го роду [5]; C_1 та C_2 — константи; C_3 — частковий розв'язок неоднорідного рівняння $C_3 = \dfrac{j\dfrac{\partial p}{\partial z}}{\omega\rho_0}$; $\dot{\gamma}_r^2 = \dfrac{j\omega\rho_0}{\mu}$ — стала розповсюдження в'язких хвиль у радіальному напрямку. Константи C_1 та C_2 знайдемо розв'язавши систему рівнянь, яку отримаємо з граничних умов (4):

$$\begin{cases} \dot{\xi}(\dot{\gamma}_r a) = 0, \\ \dot{\xi}(\dot{\gamma}_r b) = 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} C_1 I_0(\dot{\gamma}_r a) + C_2 K_0(\dot{\gamma}_r a) + C_3 = 0, \\ C_1 I_0(\dot{\gamma}_r b) + C_2 K_0(\dot{\gamma}_r b) + C_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок її має такий вигляд:

$$C_1 = \frac{C_3\left(K_0(\dot{\gamma}_r a) - K_0(\dot{\gamma}_r b)\right)}{I_0(\dot{\gamma}_r a)K_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r b)K_0(\dot{\gamma}_r a)};$$

$$C_2 = \frac{C_3\left(I_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r a)\right)}{I_0(\dot{\gamma}_r a)K_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r b)K_0(\dot{\gamma}_r a)}. \tag{6}$$

Далі зробимо такі позначення:

$$C = C_3,\ C_1 = AC_3 = AC, \text{ де } A = \frac{K_0(\dot{\gamma}_r a) - K_0(\dot{\gamma}_r b)}{I_0(\dot{\gamma}_r a)K_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r b)K_0(\dot{\gamma}_r a)};$$

$$C_2 = BC_3 = BC, \text{ де } B = \frac{I_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r a)}{I_0(\dot{\gamma}_r a)K_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r b)K_0(\dot{\gamma}_r a)}.$$

Отже, радіальний розподіл швидкості коливань частинок середовища в міжтрубному просторі буде:

$$\dot{\xi}(r) = ACI_0(\dot{\gamma}_r r) + BCK_0(\dot{\gamma}_r r) + C = C\left(AI_0(\dot{\gamma}_r r) + BK_0(\dot{\gamma}_r r) + 1\right) =$$

$$= C\left(\frac{K_0(\dot{\gamma}_r a) - K_0(\dot{\gamma}_r b)}{I_0(\dot{\gamma}_r a)K_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r b)K_0(\dot{\gamma}_r a)} I_0(\dot{\gamma}_r r) + \right.$$

$$\left. + \frac{I_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r a)}{I_0(\dot{\gamma}_r a)K_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r b)K_0(\dot{\gamma}_r a)} K_0(\dot{\gamma}_r r) + 1\right) =$$

$$= \frac{j\dfrac{\partial p}{\partial z}}{\omega\rho_0}\left(\frac{K_0(\dot{\gamma}_r a) - K_0(\dot{\gamma}_r b)}{I_0(\dot{\gamma}_r a)K_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r b)K_0(\dot{\gamma}_r a)} I_0(\dot{\gamma}_r r) + \right.$$

$$\left. + \frac{I_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r a)}{I_0(\dot{\gamma}_r a)K_0(\dot{\gamma}_r b) - I_0(\dot{\gamma}_r b)K_0(\dot{\gamma}_r a)} K_0(\dot{\gamma}_r r) + 1\right). \tag{7}$$

Тепер визначимо питомий акустичний опір міжтрубного простору $\dot{z}_{\text{пит}}$ (крапка над $z_{\text{пит}}$ тут і далі означатиме комплексне число). Згідно з [4] введемо його таким чином:

$$\dot{z}_{\text{пит}} = -\frac{\partial p}{\partial z}\bigg/ < \dot{\xi} >, \tag{8}$$

де $<\dot{\xi}>$ — середня по перерізу швидкість коливань частинок середовища. Знайдемо її:

$$<\dot{\xi}>=\frac{1}{\pi\left(b^2-a^2\right)}\int_a^b \dot{\xi}(r)2\pi r dr=\frac{1}{\pi\left(b^2-a^2\right)}\int_a^b C\left(AI_0(\dot{\gamma}_r r)+BK_0(\dot{\gamma}_r r)+1\right)2\pi r dr=$$

$$=\frac{2\pi C}{\pi\left(b^2-a^2\right)}\int_a^b \left(AI_0(\dot{\gamma}_r r)+BK_0(\dot{\gamma}_r r)+1\right)r dr=$$

$$=\frac{2C}{\dot{\gamma}_r{}^2\left(b^2-a^2\right)}\int_a^b \left(AI_0(\dot{\gamma}_r r)+BK_0(\dot{\gamma}_r r)+1\right)(\dot{\gamma}_r r)d(\dot{\gamma}_r r).$$

Використовуючи рекурентне співвідношення для модифікованих функцій Бесселя [5] $\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^k\left\{y^\nu\Psi_\nu(y)\right\}=y^{\nu-k}\Psi_{\nu-k}(y)$, де через $\Psi_\nu(y)$ позначено $I_\nu(y)$, або $e^{\nu\cdot\pi\cdot j}K_\nu(y)$, при $k=1$, $\nu=1$ співвідношення запишуться як: $d(y\cdot I_1(y))=(y\cdot I_0(y))dy$, $d(y\cdot e^{\pi\cdot j}K_1(y))=(yK_0(y))\,dy$. Отже, для середньої швидкості отримаємо вираз:

$$<\dot{\xi}>=\frac{2C}{\dot{\gamma}_r{}^2\left(b^2-a^2\right)}\int_a^b \left(A\cdot I_0(\dot{\gamma}_r r)+B\cdot K_0(\dot{\gamma}_r r)+1\right)(\dot{\gamma}_r r)d(\dot{\gamma}_r r)=$$

$$=\frac{2C}{\dot{\gamma}_r{}^2\left(b^2-a^2\right)}\left(A(\dot{\gamma}_r r)I_1(\dot{\gamma}_r r)+B\cdot(\dot{\gamma}_r r)\cdot e^{\pi\cdot j}K_1(\dot{\gamma}_r r)+\frac{(\dot{\gamma}_r r)^2}{2}\right)\Bigg|_a^b=$$

$$=\frac{j\frac{\partial p}{\partial z}}{\omega\rho_0}\left(\frac{2}{\dot{\gamma}^2{}_r\left(b^2-a^2\right)}\left(A\left((\dot{\gamma}_r b)I_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)I_1(\dot{\gamma}_r a)\right)+Be^{\pi\cdot j}\left((\dot{\gamma}_r b)K_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)K_1(\dot{\gamma}_r a)\right)\right)+1\right)=$$

$$=\frac{j\frac{\partial p}{\partial z}}{\omega\rho_0}\left(\frac{2}{\dot{\gamma}^2{}_r\left(b^2-a^2\right)}\left(A\left((\dot{\gamma}_r b)I_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)I_1(\dot{\gamma}_r a)\right)-B\left((\dot{\gamma}_r b)K_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)K_1(\dot{\gamma}_r a)\right)\right)+1\right). \quad (9)$$

Тоді питомий акустичний опір хвилеводу типу «труба в трубі» буде

$$\dot{z}_{\text{пит}}=\frac{-\frac{\partial p}{\partial z}}{<\dot{\xi}>}=\frac{-\frac{\partial p}{\partial z}}{\frac{j\frac{\partial p}{\partial z}}{\omega\rho_0}\left(\frac{2}{\dot{\gamma}_r{}^2(b^2-a^2)}(A((\dot{\gamma}_r b)I_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)I_1(\dot{\gamma}_r a))-\right.}=$$

$$=\frac{}{\left.-B((\dot{\gamma}_r b)K_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)K_1(\dot{\gamma}_r a)))+1\right)}=$$

$$=\frac{j\omega\rho_0}{\frac{2}{\dot{\gamma}_r{}^2(b^2-a^2)}\left(A\left((\dot{\gamma}_r b)I_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)I_1(\dot{\gamma}_r a)\right)-B\left((\dot{\gamma}_r b)K_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)K_1(\dot{\gamma}_r a)\right)\right)+1}=$$

$$= r_{\text{num}} + j\omega\rho_{\text{еф}}\,, \tag{10}$$

де: r_{num} — активний питомий опір; $\rho_{\text{еф}}$ — ефективна густина. Оскільки аргументи функцій Бесселя комплексні, то і самі значення цих функцій будуть комплексними, а отже, активний питомий опір та ефективну густину для нашого звукопроводу отримаємо у вигляді:

$$r_{\text{num}} = \operatorname{Re}\dot{z}_{\text{num}} =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{j\omega\rho_0}{\frac{2}{\dot{\gamma}_r{}^2(b^2-a^2)}(A((\dot{\gamma}_r b)I_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)I_1(\dot{\gamma}_r a))-B((\dot{\gamma}_r b)K_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)K_1(\dot{\gamma}_r a)))+1}\right),$$

$$\rho_{\text{еф}} = \frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\dot{z}_{\text{num}} = \frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\left(\frac{j\omega\rho_0}{\frac{2}{\dot{\gamma}_r{}^2(b^2-a^2)}(A((\dot{\gamma}_r b)I_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)I_1(\dot{\gamma}_r a))-}\right.$$

$$\left.\overline{-B((\dot{\gamma}_r b)K_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)K_1(\dot{\gamma}_r a)))}\right).$$

В області значень $\gamma_r a > 10$, тобто для *широких* труб [4], якими є нафтові свердловини, використовуємо асимптотичні наближення для модифікованих функцій Бесселя [5]: $I_\nu(y) \approx \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}}$, $K_\nu(y) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2y}}e^{-y}$. Враховуючи їх, після перетворень у знаменнику (10) отримаємо:

$$A\big((\dot{\gamma}_r b)I_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)I_1(\dot{\gamma}_r a)\big)+B\big((\dot{\gamma}_r b)K_1(\dot{\gamma}_r b)-(\dot{\gamma}_r a)K_1(\dot{\gamma}_r a)\big)=$$

$$=-\dot{\gamma}_r(b+a)\operatorname{cth}\big(\dot{\gamma}_r(b-a)\big)+\frac{2\cdot\dot{\gamma}_r\sqrt{a\cdot b}}{sh\big(\dot{\gamma}_r(b-a)\big)}.$$

Якщо $\gamma_r(b-a) > 10$, то $-\dot{\gamma}_r(b+a)\operatorname{cth}(\dot{\gamma}_r(b-a))+\frac{2\dot{\gamma}_r\sqrt{ab}}{\operatorname{sh}(\dot{\gamma}_r(b-a))} \approx -\dot{\gamma}_r(b+a)$, тоді формула (8) набуде вигляду

$$\dot{z}_{\text{пит}} = \frac{j\omega\rho_0}{\left(\frac{2}{\dot{\gamma}_r{}^2\left(b^2-a^2\right)}\cdot\left(-\dot{\gamma}_r\left(b+a\right)\right)+1\right)} = \frac{j\omega\rho_0}{\left(-\frac{2}{\dot{\gamma}_r\left(b-a\right)}+1\right)} \approx$$

$$\approx j\omega\rho_0\left(1+\frac{2}{\dot{\gamma}_r(b-a)}\right). \quad (11)$$

Далі, враховуючи, що $\dot{\gamma}_r=\sqrt{\dfrac{j\omega\rho_0}{\mu}}$, отримуємо

$$\dot{z}_{\text{num}}=j\omega\rho_0\left(1+\frac{2}{(b-a)\sqrt{\dfrac{j\omega\rho_0}{\mu}}}\right)=\frac{\sqrt{2\,\omega\mu\rho_0}}{(b-a)}+j\omega\left(\rho_0+\frac{\sqrt{2\omega\mu\rho_0}}{\omega(b-a)}\right), \quad (12)$$

тобто

$$r_{\text{num}}=\frac{\sqrt{2\omega\mu\rho_0}}{(b-a)},\ \text{а}\ \ \rho_{\text{еф}}=\rho_0+\frac{\sqrt{2\,\omega\mu\rho_0}}{\omega(b-a)}. \quad (13)$$

Знайдемо згасання, обумовлене пограничним тертям. У відповідності з (3) рівняння руху для звуководу матиме вигляд:

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\dot{z}_{\text{num}}\dot{\xi}=r_{\text{num}}\dot{\xi}+j\omega\rho_{\text{еф}}\dot{\xi}, \quad (14)$$

де $\dot{\xi}$ — усереднена по перерізу хвилеводу швидкість коливань середовища. Для випадку синусоїдальних коливань, замінивши $j\omega$ на $\dfrac{\partial}{\partial t}$, отримаємо

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=r_{\text{num}}\dot{\xi}+\rho_{\text{еф}}\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial t}. \quad (15)$$

Для плоскої хвилі рівняння неперервності має вигляд [4]:

$$-\frac{\partial p}{\partial e}=E\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial z}. \quad (16)$$

Диференціюючи (15) по t, а (16) по z та прирівнявши праві частини отриманих співвідношень, маємо:

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial z\partial t}=r_{\text{num}}\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial t}+\rho_{\text{еф}}\frac{\partial^2\dot{\xi}}{\partial t^2};\ \ -\frac{\partial^2 p}{\partial z\partial t}=E\frac{\partial^2\dot{\xi}}{\partial z^2};\ \ \rho_{e\phi}\frac{\partial^2\dot{\xi}}{\partial t^2}+r_{\text{num}}\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial t}=E\frac{\partial^2\dot{\xi}}{\partial z^2},$$

або після ділення всіх членів на ρ_0:

$$\frac{\partial^2\dot{\xi}}{\partial t^2}+\frac{r_{\text{num}}}{\rho_{\text{еф}}}\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial t}=c_0'^2\frac{\partial^2\dot{\xi}}{\partial z^2},\ \text{де}\ \ c_0'=\sqrt{E/\rho_{\text{еф}}}=\sqrt{\frac{E}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho_{\text{еф}}}}=c_0\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{\text{еф}}}}. \quad (17)$$

Отримане рівняння описує поширення хвилі у звукопроводі з урахуванням пограничного тертя. Для гармонічного випадку маємо: $\dfrac{\partial}{\partial t}=j\omega$ та $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}=(j\omega)^2$, тоді

$$\frac{\partial^2\dot{\xi}}{\partial z^2}-\frac{1}{c_0'^2}\left(-\omega^2\dot{\xi}+\frac{r_{\text{num}}}{\rho_{\text{еф}}}j\omega\dot{\xi}\right)=\frac{\partial^2\dot{\xi}}{\partial z^2}-\left(-\frac{\omega^2}{c_0'^2}\left(1-j\frac{r_{\text{num}}}{\omega\rho_{\text{еф}}}\right)\right)\dot{\xi}=0$$

або

$$\frac{d^2\dot{\xi}}{dz^2} - \dot{\gamma}^2\dot{\xi} = 0. \qquad (18)$$

Тут $\dot{\gamma}$ — стала розповсюдження, що має вигляд:

$$\dot{\gamma} = j\frac{\omega}{c_0'}\sqrt{1 - j\frac{r_{\text{num}}}{\omega\rho_{\text{еф}}}} = j\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\frac{\rho_{еф}}{\rho_0}}\sqrt{1 - j\frac{r_{\text{num}}}{\omega\rho_{\text{еф}}}} = \alpha_m + jk, \qquad (19)$$

де α_m та k — дійсна та уявна частини сталої розповсюдження $\dot{\gamma}$, які називаються відповідно коефіцієнтом згасання та хвильовим числом. Обмежимося хвилями прямого напрямку та запишемо розв'язок рівняння (18) у вигляді:

$$\dot{\xi} = \text{const}\, e^{-\dot{\gamma}z} = \text{const}\, e^{-\alpha_m z} e^{-jkz}. \qquad (20)$$

Співвідношення (20) описує згасаючу звукову хвилю, ослаблення якої по осі z визначається членом $e^{-\alpha_m z}$.

При $\gamma_r(b-a) = \sqrt{\frac{\omega\rho_0}{\mu}}(b-a) \geq 10$ опір r_{num} виражається формулою (13), так що $r_{\text{num}} << \omega\rho_{\text{еф}}$, $\rho_{\text{еф}} \approx \rho_0$, $c_0' \approx c_0$ із (19) отримуємо:

$$\dot{\gamma} = \frac{r_{\text{num}}}{2\rho_0 c_0} + j\frac{\omega}{c_0}; \quad \alpha_m = \frac{r_{\text{num}}}{2\rho_0 c_0}; \quad k = \frac{\omega}{c_0}. \qquad (21)$$

З (19) та (21) отримуємо вираз для згасання, обумовленого пограничним тертям:

$$\alpha_m = \frac{1}{2\rho_0 c_0}\frac{\sqrt{2\omega\rho_0\mu}}{b-a} = \frac{1}{c_0(b-a)}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\rho_0}}. \qquad (22)$$

Зазначимо, що коефіцієнт згасання звуку в одинокій трубі згідно з [4] для $\gamma_r b > 10$ розраховується за формулою:

$$\alpha_m = \frac{r_{\text{num}}}{2\rho_0 c_0} = \frac{\sqrt{2\omega\rho_0\mu}/b}{2\rho_0 c_0} = \frac{1}{bc_0}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\rho_0}}, \qquad (23)$$

де b — внутрішній радіус труби. Умова $\gamma_r b > 10$ відповідає «широкій трубі», коли радіус дії в'язких сил біля її поверхні значно менший за радіус самої труби.

На рис. 3 наведено графіки згасання звуку в розглянутій двотрубній моделі хвилевода і в одинокій трубі, як було отримано теоретичним та експериментальними шляхами. Теоретичні залежності 1 і 3 обчислювались згідно з формулами (22) і (23), а експериментальні 2 і 4 — отримувались на фізичній моделі свердловини, за яку використовувались дві металеві труби діаметром 70 та 40 мм. Вимірювання відбувалося в режимі ехолокації на імпульсних сигналах у діапазоні частот 200–2000 Гц, а згасання оцінювалося за амплітудними значеннями серії отримуваних ехо-сигналів від протилежного кінця труби, закритого жорсткою кришкою. Як видно з рис. 3 фактичне згасання звуку в одинокій трубі майже в три рази перевищує його теоретичне значення, визначене в [4]. Для хвилеводу типу «труба в трубі» розбіжності між теоретичними та експериментальними даними ще більші (до 3,5 рази). Це, на нашу думку, обумовлено наявною шорсткістю стінок реального хвилеводу, яка не врахована у наведених вище співвідношеннях та неідеальністю властивостей хвилеводу, як жорсткої конструкції, а також похибками експерименту.

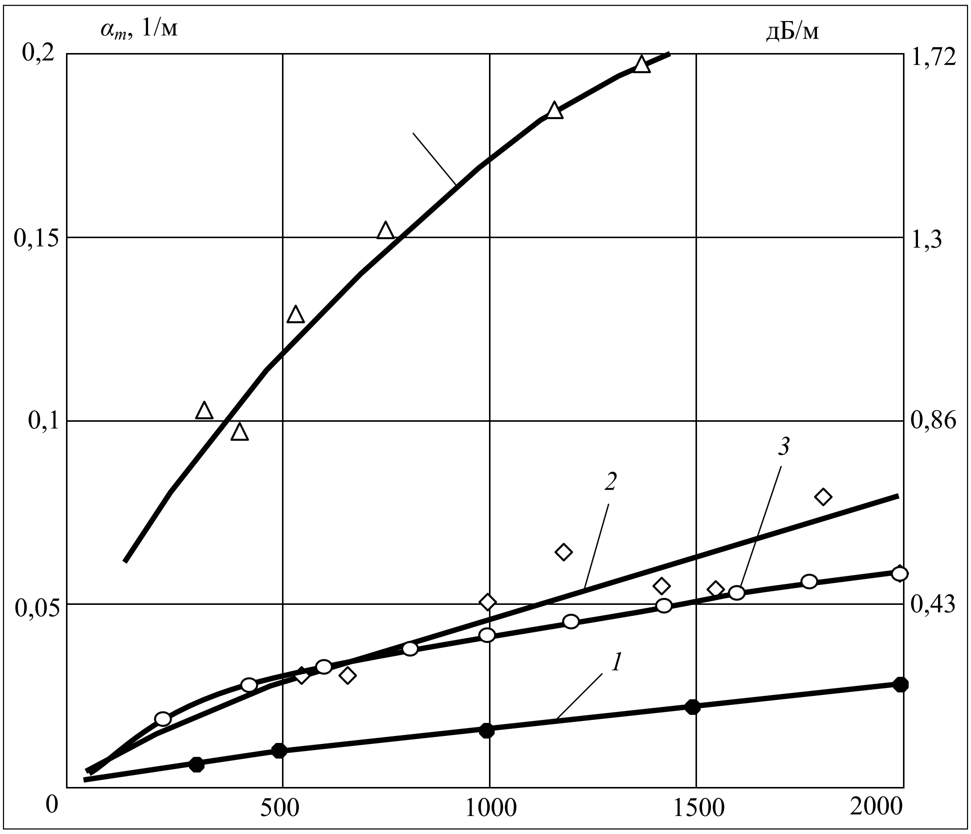

Рис. 3. Згасання звуку в трубному хвилеводі, обумовлене пограничним тертям: 1 — одинока труба $2b=70$ мм — теоретична крива: 2 — одинока труба $2b=70$ мм — крива отримана експериментальним шляхом; 3–4 — хвилевід типу «труба в трубі», $2b=70$ мм, $2a=40$ мм; 3 — теоретична крива; 4 — крива отримана експериментальним шляхом

ВИСНОВКИ

Як бачимо фактичне згасання звуку у хвилеводі типу «труба в трубі» в 3–3,5 рази більше, ніж в одинокій трубі. Зазначимо, що цей вид згасання для свердловинної ехолокації є головним і, зокрема, на частоті 250 Гц для вибраних в експерименті діаметрів труб складає значну величину — приблизно 0,7 дБ/м або 70 дБ на кожні 100 м. Для порівняння, згасання, яке зумовлене поглинанням, на тій же частоті згідно з [6] не перевищує 0,11 дБ на 100 м. Тому в нафтових свердловинах, глибини яких сягають кількох кілометрів, ехолокація рівня рідини ведеться в інфранизькочастотному діапазоні

(5−10 Гц), де згасання значно менше [1]. Отримані результати є важливим вихідним матеріалом для розрахунку фактичних можливостей акустичного методу ехолокації рівня рідини як у нафтових свердловинах, так і у свердловинах інших типів — газових, артезіанських, спостережних.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Данилов В.Я., Науменко І.Я., Кизима В.І.* Проблеми акустичного зондування свердловин та апаратний комплекс для їхнього вирішення // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. —№ 1. — С. 50–62.
2. *Науменко І.Я., Кизима В.І., Бульбас В.Н., Бершадська В.В.* Потенційна точність вимірювання рівня рідини в свердловинах акустичним методом із використанням з'єднувальних муфт // Нафтова і газова промисловість. — 2008. — № 4. — С. 37–39.
3. *Исакович М.А.* Общая акустика. — М.: Наука, 1973. — 496 с.
4. *Вахитов Я.Ш.* Теоретические основы электроакустики и электроакустическая аппаратура. — М.: Искусство, 1982. — 415 с.
5. *Справочник* по специальным функциям / Под. ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
6. *Горбатов А.А., Рудашевский Г.Е.* Акустические методы измерения расстояний и управления. — М.: Энергоиздат, 1981. — 208 с.

Надійшла 08.12.2009