УДК 519.8

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ГІДРОРЕСУРСІВ У ЗРОШУВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ МЕРЕЖЕВОЇ СТРУКТУРИ

О.Є. КІРІК, В.В. ОСТАПЕНКО

Створено математичну модель транспортування та розподілу ресурсів із узагальненим законом збереження. Для цієї оптимізаційної задачі утримання потоків у певних межах побудовано алгоритми, що базуються на ефективних методах нелінійного програмування. Запропоновано підхід, який дає можливість розв'язувати задачі розподілу потоків із різнотипними нелінійними цільовими функціями для мереж з довільною кількістю замкнених циклів.

Реалізація програм меліорації передбачає вирішення низки складних питань, передусім екологічних. Меліоративне будівництво вносить зміни в екологічний баланс великих природних водних систем. Наслідки таких змін для навколишнього середовища ще недостатньо добре прогнозуються, а тому домогтися найближчим часом радикальних позитивних змін водного балансу в сільському господарстві не вдається. Отже, найважливішим завданням у найближчі роки є економія води в цій галузі, її раціональне використання. В зрошувальному секторі не тільки найбільша потреба у воді, але й значні можливості для її економії — при умові введення ефективних систем управління.

У роботі розглядається задача розподілу гідроресурсів у зрошувальних системах мережевої конфігурації, які топологічно можуть бути представлені як графи із циклами. Питання задоволення всіх користувачів за умови обмеженої пропускної здатності каналів зрошувальної системи та необхідності утримання потоків зрошувальної води в певних межах призводить до побудови математичної моделі розподілу потоків з узагальненим законом збереження, що описується за допомогою системи лінійних нерівностей, структура яких задається відповідним графом.

Математична формалізація розподілу потоків із узагальненим принципом збереження виникла саме при розв'язанні задач керування рухом води в каналах зрошувальних систем. Вперше її було розглянуто в роботах [1–3], де запропоновано використовувати метод виключення невідомих із систем лінійних нерівностей. Загалом, задачі розподілу потоків із узагальненим принципом збереження найбільш повно досліджені у монографії [4].

У роботі задачу розподілу гідроресурсів представлено у вигляді екстремальної задачі на графі. Економне споживання води розглянуто в контексті доставки її споживачам найкоротшим шляхом з найменшими витратами. Вибір квадратичної цільової функції зумовлений тим, що на відміну від лінійної, вона гарантує протікання води вздовж усіх каналів зрошувальної системи, крім того дозволяє використовувати для розв'язання цієї задачі добре розроблений апарат квадратичного програмування.

Мета роботи — побудова нових моделей руху потоків у мережах та розробка алгоритмів знаходження оптимальних потоків на основі нелінійних методів оптимізації.

Нові моделі та методи орієнтовано на управління водорозподілом та раціональним використанням води при експлуатації зрошувальних систем.

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ПОТОКІВ ЗА ДОПОМОГОЮ УЗАГАЛЬНЕНОГО ЗАКОНУ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Головною системою обмежень для змінних у класичних задачах розподілу потоків у мережах є закон збереження. Згідно із цим законом необхідно, щоб у кожній вершині виконувалася умова матеріального балансу, тобто різниця кількості речовини, що втікає й витікає з вершини має дорівнювати споживанню у ній. Розглянемо моделі процесів, в яких ця різниця може належати деякому проміжку.

У задачі керування рухом води у каналах зрошувальної системи об'єктами керування є споруди, що перетинають та поділяють канали на окремі ділянки або б'єфи, насосні станції, які подають воду у канал та водозабірні споруди. Основне завдання полягає у виконанні замовлень споживачів при раціональному використанні води. Для розв'язання цього завдання необхідно утримувати рівень води у каналах у заданих межах. Будемо вважати, що основні споживачі розташовано в кінці ділянок, де також розміщено й вимірювальні прилади. Тому вивчатимемо задачу утримання рівнів води у вузлових точках системи, що сполучають б'єфи. Оскільки зрошувальні системи мають складну топологічну структуру і містять у собі велику кількість об'єктів, то для аналізу процесів, які відбуваються у цих системах, необхідно створювати прості, але ефективно працюючі моделі руху води у кожному б'єфі.

Розглянемо рух води в одному б'єфі. Введемо позначення: $h(x,t)$ — рівень води в точці x у момент t; l — довжина б'єфу; $x=0$ ($x=l$) — координата верхнього (нижнього) кінця б'єфу; $Q(t)$ ($-q(t)$) — витрати води, яка тече через верхню (нижню) гідротехнічну споруду.

Припустимо, що до моменту $t=0$ у б'єфі був рівномірний постійний рух води з рівнем H. Нехай у точках $x=0$ та $x=l$ розташовано джерело та стік води, які змінюють рівень води у цих точках (інші джерела не враховуються), відповідно до функцій $h^0(t)+H$ та $h^l(t)+H$.

Витрати води — це кількість води, що протікає в одиницю часу через будь-який переріз.

Рух води в каналі без урахування споруд, що перегороджують, описується рівняннями Сен-Венана [5]. Ці рівняння є квазілінійними і загалом не мають аналітичного розв'язку. Але, якщо довести, що хвилі, які передають витрати води ($Q(t)$ та $q(t)$) відносно малі, то застосовуючи теорію хвиль малої амплітуди [5], можна отримати розв'язок в аналітичному вигляді. Цей розв'язок дає значення швидкостей руху води вниз та вгору за течією. Позначимо ці швидкості відповідно ω_+ та ω_-. Тоді $\tau_0 = l/\omega_+$ — час проходження хвиль від верхнього до нижнього кінця б'єфу. Якщо знехтувати відбиттям хвиль біля споруд, що перегороджують, то рівень води у точці $x=l$ буде визначатися за формулою

$$h(l,t)=\alpha h^0(t-\tau_0)+h^l(t)+H, \tag{1}$$

де $t \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$ — коефіцієнт згасання хвилі, яка пройшла шлях від $x = 0$ до $x = l$. Уточнюючи початкові умови, задамо

$$Q(t) = 0, \quad t \leq -\tau_0, \quad q(t) = 0, \quad t \leq 0. \tag{2}$$

У цьому випадку $h(l,0) = H$.

Будемо вважати, що споживачі розташовані у точці $x = l$. Випадок зі споживачами, які розосередженi по всьому б'єфу, розглянутий у роботі [6], і зводиться до випадку зі споживачами, які зосереджені у кінці б'єфу.

Будемо керувати рухом води, враховуючи її витрати, тоді головні обмеження будуть накладатися на рівні води. Тому опишемо модель, яка пов'язує витрати води і значення рівня води.

Припустимо, що $\dfrac{d}{dt}h^0(t) = c^1 Q(t) - k^1 h^0(t)$, $\dfrac{d}{dt}h^1(t) = -c^2 q(t) - k^2 h^1(t)$,

де c^i, k^i, $i = 1,2$ — додатні сталі. Умови (2) гарантують виконання умов $h^0(0) = 0$, $h^l(\tau_0) = 0$. Звідси випливає, що

$$h^0(t - \tau_0) = \int_0^t e^{-k^1(t-\tau)} c^1 Q(\tau - \tau_0) dt, \tag{3}$$

$$h^1(t - \tau_0) = -\int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} c^2 q(\tau) d\tau. \tag{4}$$

Надалі необхідно визначити відношення k^i / c^i. Зробимо це за допомогою наступних міркувань. Витрати води, що втікає у б'єф, мають дорівнювати витратам води, що переноситься сформованою хвилею:

$$Q(t) = \omega_+ h^0(t) b, \tag{5}$$

де b — ширина каналу. Оскільки рівність (5) має виконуватися за умови $Q(t) = \text{const}$, то

$$\omega_+ b c^1 \int_0^t e^{-k^1(t-\tau)} d\tau = 1 \quad \text{або} \quad \frac{k^1}{c^1} = \omega_+ b\left(1 + e^{-k^1 t}\right).$$

Звідси для великих t отримуємо $k^1 / c^1 \approx \omega_+ b$. Аналогічно $k^2 / c^2 \approx$ $\approx \omega\_b$.

Як правило, швидкість течії води відносно мала у порівнянні зі швидкістю переміщення хвиль. Тому спростимо модель, припускаючи, що $\omega_+ = \omega_-$. У цьому випадку також цілком природно припустити, що $c^1 = c^2 = c$, $k^1 = k^2 = k$. Звідси з формул (3), (4) отримуємо

$$h(l,t) = H + \int_0^t e^{-k(t-\tau)} c[Q(\tau - \tau_0) - q(\tau)] d\tau. \tag{6}$$

Розглянемо питання сполучення декількох б'єфів. Для початку візьмемо ланцюг, що складається з двох б'єфів. Нехай Q_1 — витрати води, яка подається у перший б'єф; Q_2 — витрати води, що перетікає із першого б'єфа у другий; q_i — величина споживання у i-му б'єфі. Нехай $h_i(l_i,t)$ — рівень води у кінці i-го б'єфу; H_i — рівень до початку керування; c_i та k_i — коефіцієнти, які зв'язують рівень і витрату води у i-му б'єфі; τ_i — час проходження хвилею i-го б'єфа; α_i — коефіцієнт згасання для i-го б'єфа.

З формули (6) випливає

$$h_1(l_1,t)=H_1+\int_0^t e^{-k_1(t-\tau)}c_1[\alpha_1 Q_1(\tau-\tau_1)-Q_2(\tau)-q_1(\tau)]d\tau,$$

$$h_2(l_2,t)=H_2+\int_0^t e^{-k_2(t-\tau)}c_2[\alpha_2 Q_2(\tau-\tau_2)-q_2(\tau)]d\tau.$$

Припустимо, що до першого б'єфу є суміжними не один, а два нижніх б'єфи, які позначимо номерами $i=2,3$. Вважаємо, що у кінці першого б'єфу розташовано дві споруди, що перегороджують, одна з яких пропускає витрати води Q_2 у другий б'єф, витрати Q_3 у третій б'єф. У цьому випадку з формули (6) випливає

$$h_1(l_1,t)=H_1+\int_0^t e^{-k_1(t-\tau)}c_1[\alpha_1 Q_1(\tau-\tau_1)-Q_2(\tau)-Q_3(\tau)-q_1(\tau)]d\tau,$$

$$h_i(l_i,t)=H_i+\int_0^t e^{-k_i(t-\tau)}c_i[\alpha_i Q_i(\tau-\tau_i)-q_i(\tau)]d\tau \quad (i=2,3).$$

Розглянемо випадок сполучення двох б'єфів. Витрати Q_i, $i=1,2$, які надходять до б'єфу, що їх сполучає, регулюються кожні своєю перегородкою, яка знаходиться вгорі б'єфу. Нижні кінці обох б'єфів збігаються, і в цьому місці розташовано споживача із витратами (стоком) q. Нехай $\bar{h}(t)$ — рівень води у точці сполучення цих об'єктів, H — початковий рівень. У цьому випадку формула (6) змінюється таким чином:

$$\bar{h}(t)=H+\int_0^t e^{-k(t-\tau)}c[\alpha_1 Q_1(\tau-\tau_1)+\alpha_2 Q_2(\tau-\tau_2)-q(\tau)]d\tau. \qquad (7)$$

За допомогою формул (6)–(7) опишемо рух води у зрошувальній системі, структура якої задається направленим графом $G=(N,V)$. Тут N — множина вершин, V — множина дуг. Споруди, що перегороджують та насосні станції, які подають воду до системи, інтерпретуватимемо як вершини графа, а б'єфи — як дуги графа. Дуги направлено від верхнього кінця б'єфу до нижнього.

Кожній вершині $i \in N$ припишемо коефіцієнти c_i та k_i, які описують зв'язок між витратами води та рівнями. Нехай $h_i(t)$ — поточний; H_i — початковий рівні перед i-ою перегородкою; q_i — витрати споживача, який розташовано перед i-ою перегородкою. Будемо вважати, що вздовж дуг (j,i) проходять потоки Q_{ji}. Нехай α_{ji} — коефіцієнт згасання хвилі при проходженні дуги (j,i), а τ_{ji} — час проходження дуги (j,i).

Для кожної вершини $i \in N$ визначимо множини $N^+(i) = \{i \in N : (i, j) \in \in V\}$, $N^-(i) = \{i \in N : (j,i) \in V\}$.

Множина $N^+(i)$ описує всі початкові вершини дуг, які виходять із вершини i; множина $N^-(i)$ описує всі вершини дуг, які входять у вершину i. Узагальнимо формули (6)–(7):

$$h_i(t) = H_i + \int_0^t e^{-k_i(t-\tau)} c_i \left[\sum_{j \in N^-(i)} \alpha_{ji} Q_{ji}(\tau - \tau_{ji}) - \sum_{k \in N^+(i)} Q_{ik}(\tau) - q_i(\tau) \right] d\tau, \quad i \in V. \quad (8)$$

Зазначимо, що крім (8), величини Q_{ji} мають задовольняти обмеженням вигляду

$$0 \le Q_{ji} \le Q_{ji}^{\max}, \quad (9)$$

де $Q_{ji}^{\max}$ — деякі сталі.

Розглянемо питання утримання рівнів $h_i(t)$ у заданих межах

$$H_i^- \le h_i(t) \le H_i^+, \quad i \in V, \quad (10)$$

де H_i^-, H_i^+ — деякі сталі.

Сформулюємо задачу. На заданому проміжку часу $[0, T]$ необхідно вибрати величини потоків $Q_{ji}(t)$, які задовольнятимуть обмеженням (9) так, щоб на цьому проміжку виконувались нерівності (10).

Припустимо, що $H_i \in [H_i^-, H_i^+]$. Тоді з [4] випливає, що умови (10) виконуються, якщо для будь-якого $t \in [0, T]$ виконуються нерівності

$$H_i^- - H_i \le c_i \int_0^T e^{-k_i(T-\tau)} d\tau \left[\sum_{j \in N^-(i)} \alpha_{ji} Q_{ji}(t - \tau_{ji}) - \sum_{k \in N^+(i)} Q_{ik}(t) - q_i(t) \right] \le$$

$$\le H_i^+ - H_i, \quad i \in V. \quad (11)$$

Система нерівностей (11) залежить від T. Оскільки $k_i > 0$, то безпосередньою перевіркою можна показати, що (11) випливає із системи

$$\frac{k_i}{c_i}\left[H_i^- - H_i\right] \le \sum_{j \in N^-(i)} \alpha_{ji} Q_{ji}(t - \tau_{ji}) -$$

$$- \sum_{k \in N^+(i)} Q_{ik}(t) - q_i(t) \le \frac{k_i}{c_i}\left[H_i^+ - H_i\right], \quad i \in V. \quad (12)$$

Система нерівностей (12) становить узагальнений закон збереження. Розв'язуючи (12) разом із обмеженнями (9), одержуємо розв'язок задачі утримання (10).

Узагальнимо задачу (12), (9). Розглянемо потоки, які описуються системою лінійних нерівностей:

$$\sum_{j\in N^-(i)}\alpha_{ji}x_{ji}\left(t-\tau_{ji}\right)-\sum_{k\in N^+(i)}\beta_{ik}x_{ik}\left(t\right)\in A_i,\quad i\in V, \tag{13}$$

$$x_{ji}\left(t\right)\in B_{ji}\left(t\right),\quad \left(j,i\right)\in E,\quad t\in\left[0,\infty\right]. \tag{14}$$

Тут $A_i(t)$, $B_{ji}(t)$ — задані проміжки, залежні від часу; $\alpha_{ji}>0$ і $\beta_{ik}>0$ — сталі; τ_{ji} — час, за який течія $x_{ji}(t)$ проходить дугою $\left(j,i\right)$. Перехід від системи (12), (9) до системи (13), (14) здійснюється за формулами

$$x_{ji}\left(t\right)=Q_{ji}\left(t\right),\ \beta_{ik}=1,\ B_{ji}\left(t\right)=\left[0,Q_{ji}^{\max}\right],$$

$$A_i\left(t\right)=\left[\frac{k_i}{c_i}\left(H_i^- -H_i\right),\frac{k_i}{c_i}\left(H_i^+ -H_i\right)\right]+q_i\left(t\right).$$

Якщо не враховувати час добігання хвилі, тобто надати значення $\tau_{ji}=0$, то у кожний момент t формули (13) та (14) будуть утворювати систему лінійних нерівностей. Якщо систему (13), (14) розглядати за $t\in(0,\infty)$ і при цьому $A_i(t)\equiv\text{const}$ та $B_{ij}(t)\equiv\text{const}$ для всіх $i\in N$, $(i,j)\in V$, то можна обрати $x_{ij}(t)\equiv\text{const}$ і система (13), (14) знову стає системою лінійних нерівностей. Фізично цей випадок означає пошук течій при постійному режимі.

Отже, задача моделювання руху води за допомогою узагальненого закону збереження без урахування часу добігання зводиться до розв’язання систем лінійних алгебраїчних нерівностей із спеціальною структурою, що визначається за допомогою відповідних графів.

ОПТИМІЗАЦІЙНА ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ ПОТОКІВ ІЗ УТРИМАННЯМ РІВНІВ ВОДИ У ЗАДАНИХ МЕЖАХ

Нехай водорозподільчу мережу представлено у вигляді скінченого зв’язного плоского орієнтовного графа $G(N,V)$, де N та V відповідно множини його вершин і дуг, причому кожній дузі $(i,j)\in V$ поставлено у відповідність вершини $i,j\in N$, що є її початком та кінцем. Знаючи потреби споживачів у воді у вершинах графа, необхідно розподілити потоки води таким чином, аби доставити воду споживачам оптимальним шляхом.

Сформулюємо оптимізаційну задачу так:

$$F=\frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in V}l_{ij}x_{ij}^2\to\min, \tag{15}$$

$$d_i^-\le\sum_{j\in N^+(i)}\alpha_{ij}x_{ij}-\sum_{j\in N^-(i)}\alpha_{ji}x_{ji}\le d_i^+,\ i\in N, \tag{16}$$

$$r_{ij}^-\le x_{ij}\le r_{ij}^+,\quad \left(i.j\right)\in V. \tag{17}$$

Якщо дуга $(i, j) \in V$ відображає певну ділянку (б'єф) водорозподільчої мережі довжиною l_{ij}, то $x_{ij} = -x_{ji}$ — величина потоку вздовж цієї дуги, а $\alpha_{ij} > 0$ — коефіцієнт, що характеризує втрати води при її проходженні вздовж цієї ділянки.

Узагальнений закон збереження (16) відображає той факт, що витрати води у кожній вершині (різниця потоків, які витікають із вершини та втікають у неї) залишаються у певних межах, що гарантують задоволення споживачів. Величина потоків обмежується пропускною здатністю мережі (17).

Цільова функція (15) задачі є сепарабельною і, з огляду на фізичний зміст коефіцієнтів l_{ij}, $(i, j) \in V$, додатньовизначеною. Таким чином, задача (15)–(17) — це задача квадратичного програмування і її розв'язок, за умови сумісності обмежень, завжди існує [7]. Виведемо необхідні умови екстремуму для цієї задачі.

Представимо обмеження (16) у вигляді системи односторонніх нерівностей

$$\sum_{j \in N^+(i)} \alpha_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in N^-(i)} \alpha_{ji} x_{ji} \le d_i^+ , \tag{18}$$

$$-\sum_{j \in N^+(i)} \alpha_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N^-(i)} \alpha_{ji} x_{ji} \le -d_i^- , \tag{19}$$

і побудуємо для задачі (15), (17), (18), (19) функцію Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in V} l_{ij} x_{ij}^2 + \sum_{i \in N} \left[\left(p_i^+ - p_i^- \right) \sum_{j \in N^+(i)} \alpha_{ij} x_{ij} - \left(p_i^+ - p_i^- \right) \sum_{j \in N^-(i)} \alpha_{ji} x_{ji} \right] -$$

$$- \sum_{i \in N} \left(p_i^+ d_i^+ - p_i^- d_i^- \right) =$$

$$= \sum_{(i.j) \in V} \left\{ \frac{1}{2} l_{ij} x_{ij}^2 + x_{ij} \left[\left(p_i^+ - p_i^- \right) \alpha_{ij} - \left(p_j^+ - p_j^- \right) \alpha_{ji} \right] \right\} - \sum_{i \in N} \left(p_i^+ d_i^+ - p_i^- d_i^- \right). \tag{20}$$

Тут p_i^+, p_i^- $i \in N$ — множники Лагранжа, що відповідають обмеженням (18), (19).

Якщо точка $\{\tilde{x}_{ij}, \tilde{p}_i^+, \tilde{p}_i^-\}$, де $r_{ij}^- \le \tilde{x}_{ij} \le r_{ij}^+$, $(i, j) \in V$, $\tilde{p}_i^+ \ge 0$, $\tilde{p}_i^- \ge 0$, $i \in N$ є сідловою точкою функції Лагранжа (20), то $\tilde{x}_{ij}$ є розв'язком вихідної задачі [7].

Перш ніж перейти до побудови двоїстої задачі, розглянемо властивості функції $h(x,u) = \frac{1}{2} l x^2 + u x$, де $l > 0$. Функція $h(x,u)$ є опуклою при довільному u, а її похідна $h_x(x,u) = lx + u$ є монотонно зростаючою функцією.

Розв'язок одновимірної задачі квадратичного програмування

$$\min_{r^- \le x \le r^+} h(x,u) \tag{21}$$

завжди існує.

Оскільки похідна цільової функції цієї задачі — монотонно зростаюча функція, то при $lr^- + u \ge 0$ мінімальне значення досягається на нижній границі допустимого інтервалу $x(u) = r^-$. Якщо $lr^+ + u \le 0$, то з огляду на від'ємність похідної, функція h спадає і її мінімальне значення досягається на верхній межі інтервалу $x(u) = r^+$. При $lr^- + u < 0$, $lr^+ + u > 0$ існує єдиний корінь всередині інтервалу $x \in \left(r^-, r^+\right)$, який знаходиться з умови $lx + u = 0$.

Таким чином, точка мінімуму задачі (21) або приймає постійні значення, що співпадають із r^- чи r^+, або всередині інтервалу допустимості, залежить від u.

Позначимо $\widetilde{h}(u)$ — мінімальне значення функції $\widetilde{h}(x,u)$ для $x \in (r^-, r^+)$. Тоді, згідно з теоремою про похідну від функції мінімуму [7], функція $\widetilde{h}(u)$ є диференційованою по u і її похідна дорівнюватиме значенню похідної від $h(x,y)$ по u, взятій у точці мінімуму $x(u)$: $h'_u(u) = x(u)$.

Враховуючи сказане вище, випишемо необхідні умови екстремуму для одновимірної задачі

$$\min_{r_{ij}^- \le x_{ij} \le r_{ij}^+} \left\{ \frac{1}{2} l_{ij} x_{ij}^2 + x_{ij} \left[\left(p_i^+ - p_i^-\right)\alpha_{ij} - \left(p_j^+ - p_j^-\right)\alpha_{ji} \right] \right\}. \tag{22}$$

Теорема 1. Якщо $x_{ij} = r_{ij}^-$, то похідна цільової функції задачі (22) має бути невід'ємною: $l_{ij} x_{ij} \ge (p_j^+ - p_j^-)\alpha_{ji} - (p_i^+ - p_i^-)\alpha_{ij}$. Якщо $x_{ij} = r_{ij}^+$, то похідна цільової функції задачі (22) має бути недодатньою: $l_{ij} x_{ij} \le$ $\le (p_j^+ - p_j^-)\alpha_{ji} - (p_i^+ - p_i^-)\alpha_{ij}$. Якщо x_{ij} знаходиться всередині інтервалу, то похідна має дорівнювати нулю $l_{ij} x_{ij} = (p_j^+ - p_j^-)\alpha_{ji} - (p_i^+ - p_i^-)\alpha_{ij}$.

Позначимо $p_{ij} = (p_j^+ - p_j^-)\alpha_{ji} - (p_i^+ - p_i^-)\alpha_{ij}$. З необхідних умов екстремуму отримуємо, що мінімум L з врахуванням простих обмежень $x_{ij} \in [r_{ij}^-, r_{ij}^+]$ досягається в точці

$$x_{ij} = \begin{cases} r_{ij}^-, & \text{якщо} \quad p_{ij} \le r_{ij}^- l_{ij}, \\ -\dfrac{p_{ij}}{l_{ij}}, & \text{якщо} \quad r_{ij}^- l_{ij} \le p_{ij} \le r_{ij}^+ l_{ij}, \\ r_{ij}^+, & \text{якщо} \quad p_{ij} \ge r_{ij}^+ c_{ij}. \end{cases} \tag{23}$$

Згідно із теорією двоїстості [7], розв'язок задачі (14), (17), (18), (19) еквівалентний максимізації вгнутої неперервно-диференційованої функції $\Phi = \min_{r_{ij}^- \le x_{ij} \le r_{ij}^+} L$.

Знаючи оптимальні значення $\tilde{p}_i^+ \geq 0,\ \tilde{p}_i^- \geq 0$, $i \in N$ і використовуючи формули (23), можемо повернутися до вихідних змінних $\tilde{x}_{ij}$, $(i.j) \in V$, що і дає розподіл потоків, що мінімізує витрати під час транспортування води.

Використовуючи (23), конкретизуємо вигляд функції Φ:

$$\Phi = \sum_{(i.j)\in V} \varphi_{ij}\left(p_{ij}\right) - \sum_{i\in N} \psi_i\left(p_i\right), \tag{24}$$

де

$$\varphi_{ij}\left(p_{ij}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} l_{ij}(b_{ij}^-)^2 + p_{ij} r_{ij}^-, & \text{якщо} \quad p_{ij} \leq r_{ij}^- l_{ij}, \\ -\frac{1}{2}\frac{p_{ij}^2}{l_{ij}}, & \text{якщо} \quad r_{ij}^- l_{ij} \leq p_{ij} \leq r_{ij}^+ l_{ij}, \\ \frac{1}{2} l_{ij}(r_{ij}^+)^2 + p_{ij} r_{ij}^+, & \text{якщо} \quad p_{ij} \geq r_{ij}^+ l_{ij}, \end{cases}$$

$$\psi_i\left(p_i\right) = p_i^+ d_i^+ - p_i^- d_i^- .$$

Враховуючи сказане вище, $\varphi_{ij}'(p_{ij}) = x_{ij}(p_{ij})$.

Остаточно, похідні цільової функції двоїстої задачі дорівнюють

$$\frac{d\Phi}{dp_i^+} = \sum_{j\in N}\left(\alpha_{ij} - \alpha_{ji}\right)x_{ij} - \sum_{j\in N}\left(\alpha_{ji} - \alpha_{ij}\right)x_{ji} + d_i^+,$$

$$\frac{d\Phi}{dp_i^-} = \sum_{j\in N}\left(\alpha_{ji} - \alpha_{ij}\right)x_{ij} - \sum_{j\in N}\left(\alpha_{ij} - \alpha_{ji}\right)x_{ji} - d_i^- .$$

Таким чином, ми перейшли від вихідної задачі до двоїстої задачі з простими обмеженнями

$$\max \Phi, \tag{25}$$

$$p_i^+ \geq 0,\ p_i^- \geq 0,\ i \in N . \tag{26}$$

Цільова функція двоїстої задачі (25), (26) має неперервні похідні і ці похідні ми можемо обчислити. Отже, маємо можливість застосувати довільний метод оптимізації, модифікований із врахуванням простих обмежень (26). Зокрема це може бути метод спряжених градієнтів.

Позначимо $p^+ = \{p_1^+,..., p_N^+\}$, $p^- = \{p_1^-,..., p_N^-\}$. Тоді $p = \{p^+, p^-\}$, $p \in R^{2N}$ — вектор двоїстих змінних. Введемо позначення також для множини індексів двоїстих змінних $J = \{1, 2, \ldots, 2N\}$.

Загальна ідея розв'язання задачі (25), (26) полягає в упорядкованому переборі граней допустимої множини. Задаємо довільну точку, що задовольняє нерівностям (26). Виділяємо серед обмежень ті, що задовольняються як рівності. Ці обмеження визначають деяку грань багатогранної множини. Знаходимо максимум $\Phi(p)$ на цій грані, застосовуючи метод спряжених градієнтів. Отримуємо точку, яка є розв'язком поставленої задачі, інакше можна вказати перехід на деяку нову грань, після чого процедура повторюється. Ця нова грань утворюється у випадку, якщо одне або декілька обмежень-нерівностей обертаються у рівності, тобто приєднуються до активного набору.

Опишемо дії на одній зовнішній ітерації процесу розв'язання задачі (25), (26), беручи до уваги, що внутрішніми ітераціями будуть кроки алгоритму спряжених градієнтів для вгнутих функцій

$$p^{s+1} = p^s + \beta_s z^s , \tag{27}$$

де

$$z^0 = \Phi\left(p^0\right),\ z^s = \Phi'\left(p^s\right) + \frac{\left\langle \Phi'\left(p^s\right), \Phi'\left(p^s\right) - \Phi'\left(p^{s-1}\right)\right\rangle}{\left\langle \Phi'\left(p^{s-1}\right), z^s\right\rangle} z^{s-1},\ s > 0 ,$$

а вибір множника β_s, на кожному s кроці здійснюється з вимоги $\Phi(p^s + \beta_s z^s) = \max\limits_{\beta \ge 0} \Phi(p^s + \beta z^s)$. $s = 0,1,2,\dots$.

Нагадаємо, що необхідні та достатні умови того, аби точка p^* була розв'язком задачі (25, 26) описуються співвідношеннями:

$$\left(\Phi'\left(p^*\right)\right)_k = 0 \text{, якщо } p_k^* > 0,\ k \in J , \tag{28}$$

$$\left(\Phi'\left(p^*\right)\right)_k \le 0 \text{, якщо } p_k^* = 0,\ k \in J ,$$

де $(\Phi'(p))_k$ — k - та компонента вектора $\Phi'(p)$.

Покладемо $J(p) = \{k : p_k = 0,\ k \in J\}$. Починаємо з довільної точки p^0, що задовольняє обмеженням $p_k^0 \ge 0$, $k \in J$. Знайдемо множину $J(p^0)$. Якщо $(\Phi'(p^0))_k = 0$, $i \notin J(p^0)$, то це означає, що точка p^0 є точкою мінімуму $\Phi(p)$ за обмежень $p_i = 0$, $i \in J(p^0)$. Якщо до того ж $(\Phi'(p^0))_k \le 0$ для $k \in J(p^0)$, то p^0 є розв'язком задачі (25), (26), оскільки в цій точці виконано необхідні й достатні умови максимуму (28).

Якщо $(\Phi'(p^0))_k > 0$ для деяких $k \in J(p^0)$, то покладемо $J' =$ $= \{i \in J(p^0) : (\Phi'(p^0))_k \le 0\}$ і будемо застосовувати метод спряжених градієнтів для максимізації $\Phi(p)$, беручи за змінні тільки p_k, $k \notin J'$ і залишаючи всі p_k рівними нулю для $k \in J'$. Якщо ж існують такі індекси k, що $(\Phi'(p^0))_k \ne 0$, $i \notin J(u^0)$, то в цьому випадку покладаємо $J' = J(p^0)$.

При цьому ми весь час маємо контролювати виконання обмежень $p_k > 0$, $k \in J \setminus J'$. Якщо крок методу спряжених градієнтів призводить до від'ємності однієї з цих змінних, то довжина кроку обмежується таким чином, аби в точності обернути цю змінну в нуль. Для цього при обчисленнях за методом спряжених градієнтів весь час додатково обчислюємо величину $\overline{\beta}_s$:

$$\overline{\beta}_s = \min_k \left(-\frac{p_k^s}{z_k^s} \right), \qquad (29)$$

де мінімум береться по всіх $k \in J \setminus J'$, для яких $z_k^s < 0$, і порівнюємо цю величину з β_s.

Якщо $\beta_s < \overline{\beta}_s$, то

$$p_k^{s+1} = p_k^s + \beta_s z_k^s,\ k \notin J',\ p_k^{s+1} = p_k^s = 0,\ k \in J'. \qquad (30)$$

Якщо $\beta_s \ge \overline{\beta}_s$, то

$$p_k^{s+1} = p_k^s + \overline{\beta}_s z_k^s,\ k \notin J',\ p_k^{s+1} = p_k^s = 0,\ k \in J'. \qquad (31)$$

Процес обчислень перерветься за скінчене число кроків. При цьому або буде знайдено точку p^{s+1} таку, що в ній $\Phi(p)$ досягає мінімуму при умовах $p_k = 0$, $k \in J'$, або таку, де $\beta_s \ge \overline{\beta}_s$, тобто якесь із неактивних обмежень порушується. В останньому випадку $J(p_k^{s+1}) \supset J'$, причому існують $k \in J(p_k^{s+1})$, такі що $k \notin J'$. В обох випадках точка p_k^{s+1}, отримана за процедурою (30) або (31) вважається за початкову і процес повторюється.

Метод спряжених градієнтів будує послідовність точок, в яких цільова функція монотонно зростає. Саме це гарантує, що число граней є скінченим, тому що активні набори не можуть повторюватися.

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ

Як показано вище, запропонований у попередньому розділі алгоритм здійснює пошук розв'язку шляхом перебору скінченої кількості граней. Це означає, що збіжність процесу в цілому залежить від збіжності методу спряжених градієнтів при максимізації на відповідній грані. Функція (24) є кусково-квадратичною. Отже, є справедливою

Теорема 2. Якщо точка максимуму p^* кусково-квадратичної функції (24) двоїстої задачі (25), (26) належить квадратичній складовій, то метод збігається за скінчене число кроків. Якщо ж точка p^* є місцем поєднання декількох квадратичних функцій, то процес збігається зі швидкістю методу спряжених градієнтів для вгнутих функцій.

ВИСНОВКИ

Формулювання проблеми розподілу ресурсів у вигляді оптимізаційної задачі дозволяє не тільки вирішити питання задоволення споживачів, але й мінімізувати витрати на транспортування. Крім того, перевагою такої математичної моделі є незалежність методу розв'язання задачі від структури графа, що дає можливість описувати зрошувальні системи складної структури, з довільною кількістю замкнених циклів.

Відмітимо, що запропоновану теорію можна застосовувати до широкого кола розподільчих мереж. Так, у випадку транспортування газу в магістральних трубопроводах виникає задача утримання (10), де $h_i(t)$ — тиск газу в певній точці трубопроводу; H_i — початковий тиск перед i-ю станцією підкачки; $h_i(l_i, t)$ — тиск газу у кінці i-го проміжку трубопроводу; c_i та k_i — коефіцієнти, які зв'язують тиск і витрати газу у i-му проміжку трубопроводу q_i; τ_i — час проходження хвилею i-го проміжку трубопроводу; α_i — коефіцієнт згасання для i-го проміжку трубопроводу.

Моделювання процесу розподілу потоків здійснюється за допомогою задачі квадратичного програмування. За наявності більш складної нелінійної функції цілі можна замінити вихідну задачу послідовністю задач квадратичного програмування, що будуть апроксимувати, у певному сенсі, вихідну задачу, як це робиться для потокових задач з класичним законом збереження [8, 9].

ЛІТЕРАТУРА

1. *Остапенко В.В., Павлыгин А.И.* Динамические потоки в сетях для обобщенного закона Кирхгофа // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 96–102.
2. *Остапенко В.В., Павлыгин А.И.* Линейные неравенства для обобщения закона Кирхгофа // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 3. — С. 130–148.
3. *Остапенко В.В., Финин Г.С.* Моделирование движения воды с обобщенным законом Кирхгофа // Проблемы управления и автоматики. — 1999. — № 4. — С. 86–90.
4. *Остапенко В.В., Скопецький В.В., Фінін Г.С.* Розподіл ресурсів у просторі та часі. — Київ: Наук. думка, 2003. — 322 с.
5. *Картвелишвили Н.А.* Потоки в недеформируемых руслах. — Л.: Гидрометеоиздат, 1978. — 279 с.
6. *Данильченко В.Е., Остапенко В.В., Яковлева А.П.* Математические вопросы моделирования и управления в задачах водораспределения. — Киев, 1989. — 18 с. (Препр. / АН УССР. Ин–т кибернетики им. В.М. Глушкова; 89-14).
7. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
8. *Кірік О.Є.* Алгоритми лінеаризації та спряжених градієнтів для нелінійних задач розподілу потоків // Наук. вісті НТУУ «КПІ», 2007. — № 3. — С. 67–73.
9. *Кірік О.Є.* Алгоритми ітераційного квадратичного програмування для задач оптимального розподілу потоків // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 1. — С. 101–113.

Надійшла 18.03.2010