УДК 519.24/.857.3

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОЇ ЗУПИНКИ

М.В. АНДРЄЄВ

Розглянуто правило оптимальних рішень виробника зі зростаючим запасом у даний період, коли задані поточна ціна та ймовірнісний розподіл цін наступного періоду. Побудовано моделі прийняття рішень у задачах оптимальної зупинки марковських послідовностей з детермінованою або випадковою переоцінкою. Наведено байєсову процедуру прийняття рішень у задачі перевірки статистичних гіпотез.

ВСТУП

Задача оптимальної зупинки полягає у виборі моменту зупинки, яка базується на послідовному спостереженні випадкових величин з метою отримання максимального очікуваного виграшу або мінімальних очікуваних втрат. Задачі такого типу мають місце в теорії статистичних рішень при мінімізації ризику від неправильно прийнятих рішень, при перевірці статистичних гіпотез або оцінюванні невідомих параметрів заданих ймовірнісних розподілів, у дослідженні операцій, коли рішенням може бути заміна устаткування, вибір секретаря, або регулювання рівня запасу для задоволення випадкового попиту тощо.

Історично, ця проблема виникла у послідовному аналізі статистичних спостережень у теорії Вальда [6], яка стосується послідовного критерію відношення ймовірностей для перевірки статистичних гіпотез та теорії статистичних рішень. Байєсів підхід до розв'язання проблем прийняття статистичних рішень в умовах стохастичної невизначеності вперше зустрічається у статті Арроу, Блекуелла та Гіршка [2]. Важливе місце у розвитку і застосуванні ідей статистичного послідовного аналізу належить Ширяєву [11]. Узагальнення послідовного аналізу на проблеми чистої зупинки без статистичної структури реалізовано Снеллом [5]. У монографії Чао, Роббінса та Сигмунда [10] підсумовується розвиток цих досліджень. У статтях автора [14–16] досліджено методи побудови оптимальних моментів зупинки для марковських послідовностей, процесів марковського відновлення та деяких задачах неполадки.

Мета роботи — визначити можливості застосувань методології теорії оптимальних рішень у задачах оптимальної зупинки деякої монотонної стохастичної послідовності, що описує динаміку зростання рівня «живого» запасу, оптимальної зупинки марковських послідовностей з детермінованою або випадковою переоцінкою та оптимальної зупинки процесу спостережень при побудові байєсової процедури перевірки двох простих статистичних гіпотез. Для цих різних задач проводиться системний аналіз побудови моделей прийняття рішень на базі теорії оптимальних рішень із використанням досліджень, проведених у роботах Гохмана [3], Абдель-Хаміда [1], Андрєєва, Губенка і Штатланда [13] та Чао і Роббінса [12].

ПРАВИЛА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ ЗУПИНКИ ЗРОСТАЮЧОГО РІВНЯ ЗАПАСУ

Розглядається задача керування рівнем запасу, що зростає за віком на поточному періоді часу, коли задані поточна ціна та ймовірнісний розподіл цін на наступний період. Базова концепція підходу, що розглядається, полягає у знаходженні оптимального правила зупинки у цій задачі. З'ясовується, що оптимальна стратегія передбачає знаходження урізаної цінової функції, яка не є зростаючою відносно рівня зростання за віком наявного запасу.

Зростаючим за віком рівнем запасу може бути «живий» товар (домашня рогата худоба, птиця, ділянка будівельного лісу, засіяне поле і т.д.), за заданими поточною ціною на цей період та ймовірнісним розподілом цін для наступного періоду. Особа, що приймає рішення (ОПР) (виробник чи фермер) має вирішити необхідність продажу свого товару у даний період, або притримати його до наступного періоду. Варто зазначити, що час тут виступає на двох рівнях: 1) товар, що розглядається у часі, описується зростаючим процесом і 2) процес прийняття рішень за своєю природою реалізується впродовж цього часу. Важливим є і те, що оскільки рішення стосуються діяльності у майбутньому часі і процес рішень здійснюється на конкретних відрізках часу, то при цьому обов'язково має місце поява ризику. Навіть припускаючи, що фізичний процес зростання рівня запасу може контролюватись ОПР, ризик все одно залишається через неуможливлення ОПР повною мірою регулювати ціни в ринкових умовах.

Ця задача сформульована Гохманом [3], повністю відображає загаловок проблем оптимальної зупинки, систематизовано представленої Чао, Робінсом та Сигмундом [10]. У розділі 5 цієї книги, автори досліджують проблему правил зупинки марковських процесів, зокрема, так звану проблему Елфвінга [4], для якої дана задача є її частковим випадком.

Оптимальна стратегія передбачає знаходження урізаної цінової функції, яка визначатиме для кожного рівня запасу наявного за віком товару його ціну, нижче якої фермер притримує свій товар на інший період, і вище якої — продає свій товар протягом поточного періоду. Для подальшого спрощення припустимо, що всі операції мають місце на початку періоду.

Стан системи визначається віком наявного товару. Наприклад, у випадку яловичини, за допомогою функції зростання встановлюється зв'язок ваги, якості і споживчого постачання за віком цього товару. Незважаючи на те, що поточні ринкові ціни відомо, а ціни для наступного періоду невідомо, можна припустити, що вони описуються випадковою величиною, яка має один і той же ймовірнісний розподіл упродовж усіх періодів. Ці ціни є незалежними від вікового рівня запасу товару, оскільки його вага «коригується» для змін якості за віком через функцію якості.

Нехай $f(x, p)$ буде максимально очікуваною вигодою наявного запасу товару, вік якого дорівнює x, тоді як поточна ціна продажу одиниці його ваги дорівнює $p > 0$. Тоді

$$f(x, p) = \max\left[w(x)p,\ M\ f(x+1, p') - w(x)c(x)\right] \tag{1}$$

для $x = 0, 1, \ldots, X-1$ з крайовою умовою $f(X, p) \equiv w(X)p$, де $w(x) > 0$ — вага товару, вік якого дорівнює x, $c(x)$ — вартість одиниці ваги утримання товару від віку x до віку $x+1$, а p' — випадкова майбутня ціна одиниці ваги, у випадку, коли вік товару дорівнює $x+1$. Якщо наразі ввести нові змінні

$$g(x, p) = f(x, p)/\,w(x) \text{ і } v(x) = w(x+1)/\,w(x) \tag{2}$$

для $x = 0, 1, \ldots, X-1$, тоді рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$g(x, p) = \max\left[p,\ Mv(x)\,g(x+1, p') - c(x)\right] \tag{3}$$

для $x = 0, 1, \ldots, X-1$ з крайовою умовою $g(X, p) = p$. Значення функції $g(x, p)$ характеризує максимально очікувану вигоду від товару, вік якого дорівнює x, коли поточна ціна продажу одиниці ваги дорівнює $p > 0$. Для побудови моделі рішень для даної задачі слід зауважити, що оскільки умовний розподіл майбутньої ціни p' за заданої поточної ціни p, не залежить від p, тоді з рівняння (3) відразу випливає, що оптимальна стратегія прийняття рішень складається з двох рішень:

$$\begin{gathered} d(x) \equiv 1:\ \text{продавати товар, якщо } p > \rho(x), \\ d(x) \equiv 0:\ \text{притримати товар, якщо } p \le \rho(x), \end{gathered} \tag{4}$$

де $\rho(x) = v(x)Mg(x+1, p') - c(x)$ для $x = 0, 1, \ldots, X-1$.

Це означає, що при прийнятті рішення притримати товар на один період довше, фермер прирівнює максимально можливі поточні витрати — $w(x)[p + c(x)]$ до максимально очікуваної вигоди від продажу товару на наступному періоді — $Mf(x+1, p')$.

Можна показати, що коли $c(x) \le 0$ для усіх x та $w(x)$ є зростаючою функцією по x, тоді $\rho(x)$ не є зростаючою функцією по x. Але припущення щодо від'ємних витрат від утримання живого товару є такими, що потребують субсидування фермера, а це суперечить дійсності і є нереальними; тому слід зосередитись на умовах, які забезпечують лише додатні витрати від утримання живого товару, тобто $c(x) > 0$.

Теорема 1. [3] Якщо $v(x)$ і $-c(x)$ — не є зростаючими функціями по x, тоді такими самими є функції $g(X, p)$ і $\rho(x)$.

Доведення. З огляду на визначення функції $\rho(x)$ і допустимих властивостей функцій $v(x)$, $c(x)$ та $g(X, p) > 0$, досить показати, що $g(x, p)$ не є зростаючою функцією по x. Для цього використовується метод індукції по x. З рівняння (3) випливає, що $g(X-1, p) \ge p = g(X, p)$ $\forall p > 0$. Припустимо, що $g(x+1, p) \ge g(x+2, p)$ $\forall p$. Тоді з рівняння (3) та умов теореми випливає, що $g(x, p) \ge g(x+1, p)$ $\forall p$, що завершує доведення.

Цей результат пояснюється таким чином: для детерміністичного випадку, оптимальний вік або стан збуту на ринку однозначно визначається заданою поточною ціною. Це легко перевірити за умов теореми (коли функція $w(x)$ має спадний до нуля маргінальний темп зростання і функція $c(x)$ не є зростаючою функцією по x), що зростання ринкової ціни призводить до зменшення оптимального віку або стану для збуту товару на ринку. З цього результату робимо висновок і для стохастичного випадку, що коли фермер вирішує продавати живий товар у віці x за будь-яку ціну, яка дорівнює або більша за $\rho(x)$, тоді можна очікувати, що «діапазон цін» залишиться в «діапазоні продаж» у віці $x+1$.

Таким чином, задача зростаючого рівня запасу живого товару у цьому контексті розглядається як конкретний випадок задачі оптимальної зупинки. Ця задача може розглядатись в іншій постановці як проблема заміщення, яку можна розв'язати методами теорії дослідження операцій.

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ ЗУПИНКИ МАРКОВСЬКИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ З ДЕТЕРМІНОВАНОЮ ПЕРЕОЦІНКОЮ

Зупинимось на з'ясуванні деяких рівностей для стаціонарних марковських послідовностей, які використовуються при обґрунтуванні процесу прийняття рішень щодо задач оптимальної зупинки. Надалі (Ω, F, P) використовуватиметься для позначення ймовірнісного простору, а $N=[0,1,2,\dots]$ та $X=(X_n,\, n\in N)$ позначатиме стаціонарну марковську послідовність випадкових величин, визначених на (Ω, F, P) зі значеннями у вимірному просторі (E,ξ). Для кожного $x\in E$ і $A\in F$, $P_x(A)$ позначатиме умовну ймовірність появи випадкової події A при заданому $X_0=x$, M_x — математичне сподівання відносно міри P_x. Кожна функція f, що використовується тут, буде скінченою і дійсно значною доти, поки не стверджується щось інше; крім того, припустимо, що для кожного $n\in N$, $M_x|f(X_n)|<\infty$. Термін «час зупинки» означатиме «скінчений час зупинки». У роботі [10] автори подають вичерпну методологію теорії оптимальної зупинки.

МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОЇ ЗУПИНКИ ОДНОРІДНИХ МАРКОВСЬКИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ІЗ ДЕТЕРМІНОВАНОЮ ПЕРЕОЦІНКОЮ

При дослідженні задачі оптимальної зупинки однорідної марковської послідовності з детермінованою переоцінкою знаходять такий момент зупинки цієї послідовності, на якому досягається максимальне значення заданого критерію оптимальності з детермінованою переоцінкою. Декілька конкретних прикладів таких задач наведено у статті Абдель-Хаміда [1].

У цьому розділі розглядаються деякі рівності та нерівності для однорідної марковської послідовності з детермінованою переоцінкою, які використовуються в подальшому для отримання правил або моделей прийняття рішень у задачах оптимальної зупинки з переоцінкою.

Нехай для однорідної марковської послідовності (X_n, F_n, P_x) з ФПС $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ та двох $\mathbf{B}$–вимірних функцій g, c та сталої величини (фактора переоцінки) α, $0 < \alpha < 1$, функція виграшу в момент зупинки τ має вигляд

$$M_x\left[\alpha^{\tau} g(X_{\tau}) - \sum\nolimits_{n=0}^{\tau-1} \alpha^n c(X_n)\right], \tag{5}$$

де g трактується як функція виграшу, а c — як функція плати за одне спостереження.

Нехай $\mathbf{F}$ — клас усіх марковських моментів, що задовольняють умові

$$\varliminf_{m\to\infty} M_x\left\{\left[\sum\nolimits_{n=0}^{m-1} \alpha^n T_{\alpha} g(X_n) - \alpha^m g(X_m)\right] I(\tau > m)\right\} = 0. \tag{6}$$

Задача полягає у знаходженні оптимального моменту зупинки τ^*, що задовольняє критерію оптимальності

$$M_x\left[\alpha^{\tau^*} g\left(X_{\tau^*}\right) - \sum_{n=0}^{\tau^8-1} \alpha^n c(X_n)\right] = \sup_{\tau} M_x\left[\alpha^{\tau} g(X_{\tau}) - \sum_{n=0}^{\tau-1} \alpha^n c(X_n)\right], \tag{7}$$

де супремум береться по всіх моментах зупинки, що належать класу $\mathbf{F}$, тоді оптимальний момент зупинки τ^* визначається як момент першого попадання у множину

$$D = \{x : T_{\alpha} g(x) - c(x) \le 0\}, \tag{8}$$

де T_{α} — оператор очікуваного дисконтного приросту виграшу на один крок уперед, що діє на функцію виграшу g у точці x: $T_{\alpha} g(x) = \alpha M_x[g(X_1)] - g(x)$, і оптимальний момент зупинки визначається як

$$\tau^* = \inf\{n : X_n \in D\}. \tag{9}$$

Має місце основний результат:

Теорема 2 [1]. Якщо множина D замкнена і момент зупинки τ^* задовольняє умові (6), тоді τ^* є оптимальним моментом зупинки.

Наведена постановка задачі аналогічна постановці задачі для монотонного випадку, що розглянута у розділі 3.5 роботи [10]. Можна порівняти теорему 2 із теоремою 3.3 у роботі [10]. Слід зауважити, що коли $\alpha \to 1$ і $c(x) \equiv 0$, тоді має місце монотонний випадок, хоча у цьому випадку наведена тут умова (6) не така, як умови (3.15) і (3.17) у [10].

У модель прийняття рішень задачі оптимальної зупинки входять два рішення: рішення $d(x) \equiv 1$ відповідає негайній зупинці у стані $x \in D$, а рішення $d(x) \equiv 0$ відповідає продовженню процесу спостережень у стані $x \in \overline{D}$, де

$$\overline{D} = \{x : T_{\alpha} g(x) - c(x) > 0\}. \tag{10}$$

Приклад 1. Нехай (Y_n) — послідовність незалежних однаково розподілених невід'ємних випадкових величин з середнім значенням $\mu < \infty$. Нехай (Z_n) — послідовність незалежних однаково розподілених цілозначних випадкових величин з середнім значенням $\lambda < \infty$, причому послідовності (Y_n) та (Z_n) взаємонезалежні. Для $n = 1, 2, \ldots$ покладається $N^n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ і для $x \ge 0$ покладається $X_0 = x$, $X_n = x + \sum_{i=1}^{N_n} Y_i$

Нехай $f : R_+ \to R_+$ — тотожне відображення. Звідси випливає, що для $\alpha \in (0,1)$,

$$T_\alpha f(x) = \alpha \lambda \mu - (1 - \alpha) x .$$

Нехай $c : R_+ \to R_+$ — неспадна функція. Нехай y — єдиний корінь алгебраїчного рівняння $(1-\alpha)x + c(x) = \alpha\lambda\mu$, і $\tau^* = \inf\{n : X_n \ge y\}$. Звідси випливає, що τ^* задовольняє умові (6) і множина $D = [y, \infty)$ замкнена. Отже, за теоремою 2, τ^* є оптимальним моментом зупинки.

У модель прийняття рішень для даного прикладу входять два рішення: рішення $d(x) \equiv 1$ відповідає оптимальній зупинці у стані $x \in D$; рішення $d(x) \equiv 0$ відповідає продовженню процесу спостережень у стані $x \in \overline{D}$, де множина $\overline{D} = (-\infty,\ y)$.

Приклад 2. Нехай (Y_n) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу F із середнім значенням $\mu < \infty$. Для будь-якого дійсного числа x, покладається $X_0 = x$, і для $n = 1, 2, \ldots$, $X_n = \max(x, Y_1, \ldots, Y_n)$. Нехай $f : R \to R$ — тотожне відображення. Звідси випливає, що для $\alpha \in (0,1)$

$$T_\alpha f(x) = \alpha \int_x^\infty (y - x) F(dy) - (1 - \alpha) x.$$

Можна показати, що $T_\alpha f(x)$ незростаюча функція від x. Якщо припустити, що $c(x)$ є неспадною функцією, тоді $x \to T_\alpha f(x) - c(x)$ є незростаючою функцією. Нехай y буде єдиним коренем інтегрального рівняння

$$\alpha \int_x^\infty (y - x) F(dy) = (1 - \alpha) x + c(x).$$

Тому τ^* задовольняє умові (6) і множина $D = [y, \infty)$ замкнена у розумінні, визначеному вище. Отже, за теоремою 2, τ^* — оптимальний момент зупинки.

У модель прийняття рішень для даного прикладу входять два рішення: рішення $d(x) \equiv 1$, яке відповідає негайній зупинці у стані $x \in D$ та рішення $d(x) \equiv 0$, що відповідає продовженню процесу спостережень у стані $x \in \overline{D}$, де множина $\overline{D} = (-\infty,\ y)$.

РЕДУКОВАНА МОДЕЛЬ РІШЕНЬ У ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ ЗУПИНКИ МАРКОВСЬКОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ З ВИПАДКОВОЮ ПЕРЕОЦІНКОЮ

Нехай $X = \{X_n, F_n, P_x,\ n \ge 0\}$ — однорідна марковська послідовність у вимірному просторі $(\mathbf{X}, \mathbf{B})$, де $g(x)$ — невід'ємна $\mathbf{B}$-вимірна функція.

Поряд з послідовністю $X=\{X_n, F_n, P_x,\ n\geq 0\}$ задано послідовність $\beta=\{\beta_1,\beta_2,\ldots\}$ незалежних однаково розподілених випадкових величин $(0<\beta_n<1,\ M\beta_n=b)$, причому $\{\beta_n,\ n\geq 0\}$ та $\{X_n,\ n\geq 0\}$ є незалежними. Позначимо $\beta^n=\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$. Зупиняючи послідовність $\{X_n,\ n\geq 0\}$ в момент n, отримуємо випадковий виграш

$$\beta^n g(X_n)-\sum_{s=0}^{n-1}\beta^{s-1}c(X_{s-1}). \tag{11}$$

Тут $g(X_n)$ — функція виграшу в момент зупинки, $c(X_s)$ можна трактувати як плату за можливість провести чергове спостереження, перебуваючи у стані X_s і β — як випадковий параметр, яким враховується зміна «цінностей» у часі. Необхідно визначити модель прийняття рішень щодо моменту зупинки, на якому досягається максимально очікуваний виграш.

Ця задача зводиться до задачі про оптимальну зупинку двовимірної марковської послідовності $Y_n=\{\beta^n,\ X_n,\ n\geq 0\}$ у фазовому просторі $\mathbf{Y}=(0,1)\times\mathbf{X}$ із функцією виграшу $f(y),\ y=(\theta,x),\ \theta\in(0,1),\ x\in\mathbf{X}$, причому

$$f(y)=f(\theta,x)=\theta\, g(x),\quad \theta\in(0,1),\quad x\in\mathbf{X}. \tag{12}$$

Таким чином, $\{Y_n, n\geq 0\}$ — однорідна у часі марковська послідовність з перехідними ймовірностями

$$P\{Y_{n+1}\in B\mid Y_n=y\}=P[\beta\leq\theta'/\theta]P(x,B'), \tag{13}$$

де $B=(0,\theta')\times B',\ \ 0<\theta'<\theta,\ \ P(x,B')=P\{X_{n+1}\in B'\mid X_n=x\}$.

Отже, у вимірному просторі $(\mathbf{Y},\widetilde{\mathbf{B}})$ задано марковську послідовність $Y=\{Y_n,\ n\geq 0\}$ з перехідним оператором $T_Y f(y)=M_y f(Y_1)=$ $=\int_{\mathbf{Y}}P(y,dz)f(z)$. Нехай $\varphi(\theta,x)=x$ — вимірне відображення $(0,1)\times\mathbf{X}\to$ $\to(\mathbf{X},\mathbf{B})$; $h(y)=h(\theta,x)=\theta$ — $\widetilde{\mathbf{B}}$-вимірна функція в $\mathbf{Y}$; $g(\varphi(y))=$ $=g(\varphi(\theta,x))=g(x)\geq 0$ — $\mathbf{B}$-вимірна функція в $\mathbf{X}$. Тоді, зупиняючи послідовність $\{Y_n\}$ у точці $(\theta,x)\in(0,1)\times\mathbf{X}$, отримаємо виграш

$$f(\theta,x)=h(\theta,x)g[\varphi(\theta,x)], \tag{14}$$

причому для будь-якої вимірної функції $f\in L(\mathbf{X},\mathbf{B})$ справедливе співвідношення [8]:

$$T_Y\left[f(\varphi)h\right]=h\,bT_X\,g(\varphi), \tag{15}$$

де T_X — перехідний оператор послідовності $\{X_n\}$, а bT_X — добуток T_X і оператора множення на сталу b, причому bT_X — оператор, що зберігає нерівності у просторі $(\mathbf{X},\mathbf{B})$.

За аналогією [8, 13] мають місце наступні результати:

Лема 1. Найменша T_Y-ексцесивна мажоранта функції $f(\theta,x)$ є функція $s(\theta,x)$, що задовольняє рівняння Вальда

$$s(\theta,x)=\max\{f(\theta,x),\ T_Y\, s(\theta,x)\}, \tag{16}$$

яке, взагалі-то, немає єдиного розв'язку у просторі $\widetilde{\mathbf{B}}$-вимірних функцій.

Лема 2. Найменша T_Y-ексцесивна мажоранта функції $f(\theta, x)$ є функція

$$s(\theta, x) = \theta \sigma_b(x),\ \theta \in (0,1),\ x \in \mathbf{X}, \tag{17}$$

де функція $\sigma_b(x)$ є найменшою bT_X-ексцесивною мажорантою функції $g(x)$.

Лема 3. Якщо функція $\sigma_b(x)$ — найменша bT_X-ексцесивна мажоранта функції $g(x)$, то вона задовольняє рівняння Вальда

$$\sigma_b(x) = \max\{g(x),\ bT_X \sigma_b(x)\}, \tag{18}$$

що має єдиний розв'язок у просторі $\mathbf{B}$-вимірних функцій.

Наслідок. Функція $\sigma_b(x)$ є достатньою статистикою у задачі оптимальної зупинки, а очікуваний фактор переоцінки впливає лише на область оптимальної зупинки.

Це твердження випливає із лем 2, 3. Справді, порівнюючи вирази (17) та (18), доходимо висновку про те, що у задачі про оптимальну зупинку з випадковою переоцінкою достатньо спостерігати лише еволюцію одновимірної послідовності $\{X_n,\ n \ge 0\}$.

Зокрема, оптимальний момент зупинки τ^* визначається як момент першого попадання у множину

$$B = \{x : \sigma_b(x) = g(x),\ \ bT_X g(x) - c(x) \le 0\}, \tag{19}$$

де bT_X — оператор, що діє на функцію виграшу g у стані x, визначає очікуваний дисконтний приріст виграшу від зупинки на наступному періоді часу, тобто $bT_X g(x) = bM_x[g(X_1)] - g(x)$, і оптимальний момент зупинки визначається як

$$\tau^* = \inf\{n : X_n \in B\}. \tag{20}$$

Має місце наступний основний результат:

Теорема 3. Якщо виконуються вище наведені умови (14–15) і множина B замкнена, тоді τ^* є оптимальним моментом зупинки.

У модель прийняття рішень у даній задачі оптимальної зупинки входять два рішення: рішення $d(x) \equiv 1$ відповідає негайній зупинці у стані $x \in B$; рішення $d(x) \equiv 0$ відповідає продовженню на один період часу процесу спостережень у стані $x \in \overline{B}$, де

$$\overline{B} = \{x : \sigma_b(x) = g(x),\ bT_X g(x) - c(x) > 0\}. \tag{21}$$

ПОСЛІДОВНІ ПРАВИЛА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ЗАДАЧІ ПЕРЕВІРКИ ДВОХ ПРОСТИХ СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Нехай $Y_1, Y_2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини із щільністю розподілу f відносно деякої σ-скінченої міри μ на прямій.

Необхідно перевірити гіпотезу $H_0 : f = f_0$ щодо гіпотези $H_1 : f = f_1$, де f_0 і f_1 — задані функції. Втрати, пов'язані з прийняттям гіпотези H_1 у випадку, коли справедлива гіпотеза H_0, дорівнюють $a > 0$; втрати через прийняття H_0 у випадку, коли справедлива H_1, дорівнюють $b > 0$; вартість проведення кожного спостереження y_i дорівнює одиниці. Процедура послідовних рішень (δ, N) складається з моменту N зупинки спостережень та прийняття остаточного рішення δ. Математичне сподівання втрат для рішення (δ, N) дорівнює

$$\begin{aligned} &\alpha_0 a + M_0(N), \text{ якщо справедлива гіпотеза } H_0, \\ &\alpha_1 b + M_1(N), \text{ якщо справедлива гіпотеза } H_1, \end{aligned} \tag{22}$$

де $\alpha_0 = P_0(\text{прийнято } H_1)$, $\alpha_1 = P_1(\text{прийнято } H_0)$.

Якщо існує апріорна ймовірність π того, що має місце гіпотеза H_0 і, отже, ймовірність $1-\pi$ того, що має місце гіпотеза H_1, то очікуваний ризик для рішення (δ, N) задається формулою

$$r(\pi, \delta, N) = \pi[\alpha_0 a + M_0(N)] + (1-\pi)[\alpha_1 b + M_1(N)]\,. \tag{23}$$

Для даного моменту зупинки N легко визначити правило остаточного рішення δ, яке мінімізує ризик $r(\pi, \delta, N)$ при фіксованих значеннях a, b, π. Для цього оцінюється вклад рішення δ у ризик $r(\pi, \delta, N)$, що дорівнює [12]:

$$\pi\alpha_0 a + (1-\pi)\alpha_1 b + \pi a \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{N=n,\ \text{прийнято } H_1\}} f_0(y_1) \ldots f_0(y_n)\, d\mu(y_1) \ldots. d\mu(y_n) +$$

$$+(1-\pi) b \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{N=n,\ \text{прийнято } H_0\}} f_1(y_1) \ldots f_1(y_n)\, d\mu(y_1) \ldots. d\mu(y_n) \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{N=n\}} \min\left[\pi a\, f_0(y_1) \ldots f_0(y_n), (1-\pi) b\, f_1(y_1) \ldots f_1(y_n)\right] d\mu(y_1) \ldots. d\mu(y_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{N=n\}} \min\left[\pi_n a, (1-\pi_n) b\right]\left[\pi f_0(y_1) \ldots f_0(y_n) +\right.$$

$$\left. + (1-\pi) f_1(y_1) \ldots f_1(y_n)\right] d\mu(y_1) \ldots. d\mu(y_n),$$

де

$$\pi_n = \pi_n(y_1, \ldots y_n) = \frac{\pi f_0(y_1) \ldots f_0(y_n)}{\pi f_0(y_1) \ldots f_0(y_n) + (1-\pi) f_1(y_1) \ldots f_1(y_n)}. \tag{24}$$

Для даного моменту зупинки N визначається правило прийняття рішень δ' таким чином:

$$\begin{aligned} &\text{приймається } H_1, \text{ якщо } N = n \text{ та } \pi_n a \leq (1-\pi_n) b, \\ &\text{приймається } H_0, \text{ якщо } N = n \text{ та } \pi_n a > (1-\pi_n) b \end{aligned}$$

Тоді

$$\pi\ a\ \alpha_0(\delta, N) + (1-\pi) b \alpha_1(\delta, N) \geq \pi\ a\ \alpha_0(\delta', N) + (1-\pi) b \alpha_1(\delta', N). \quad (25)$$

Отже, відшукання пари (δ', N), яка для даного апріорного розподілу π мінімізує ризик $r(\pi, \delta, N)$, представляє байєсову процедуру перевірки простих статистичних гіпотез H_0, H_1.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Abdel-Hameed M.* Identities for Stopped Markov Chains and their Applications // Applied Stochastic Models and Data Analysis. — 1986. — **2**, № 4. — P. 193–208.
2. *Arrow K.J., Blackwell D., Girshick M.A.* Bayes and minimax solutions of sequential decision problems // Econometrica. — 1947. — **17**. — P. 213–214.
3. *Hochman E.* An Optimal Stopping Problem of a Growing Inventory // Management Science. — 1973. — **19**, № 11. — P. 1289–1291.
4. *Elfving G.* A Persistency Problem Connected with a Point Process // Journal of Applied Probability — 1967. — **4**. — P. 77–89.
5. *Snell J.L.* Applications of martingale system theorem and applications // Transactions of the American Mathematical Society. — 1953. — P. 73–101.
6. *Вальд А.* Последовательный анализ. — М.: Физматгиз, 1960. — 325 с.
7. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974. — 492 с.
8. *Дынкин Е.Б.* Достаточные статистики для задачи об оптимальной остановке // Теория вероятностей и ее применение — 1968. — **XIII.** — № 1. — С. 150–151.
9. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969. — 307 с.
10. *Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И.* Теория оптимальных правил остановки. — М.: Наука, 1977. — 167 с.
11. *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. — М.: Наука, 1976. — 272 с.
12. *Чао И.С., Роббинс Г.* Об оптимальних правилах остановки // Математика (сб. переводов). — 1965. — **9**, № 3. — С. 444–454.
13. *Андреев Н.В., Губенко Л.Г., Штатланд Э.С.* Об одной задаче оптимальной остановки марковских последовательностей со случайной переоценкой // Сб. ст. «Теория оптимальных решений». — Киев: ИК АН УССР. — 1968. — № 5. — С. 100–104.
14. *Андреев Н.В.* Оптимальная остановка процесса марковского восстановления с малой вероятностью поглощения // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 6. — С. 176–179.
15. *Андреев Н.В.* Оптимальная остановка агрегированных и слабо возмущенных дезагрегированных марковских и полумарковских моделей в дискретном времени // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2002. — № 3. — С. 139–146.
16. *Андрєєв М.В.* Синтез оптимальних стратегій планування стохастичного експерименту в задачах найшвидшого виявлення неполадки // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 3. — С. 111–119.

Надійшла 09.12.2009