

УДК 532.542.4

СООТНОШЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО И ПРОСТРАНСТВЕННО - ВРЕМЕННОГО СРЕДНИХ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА СУСПЕНЗИИ

С. И. КРИЛЬ, В. П. БЕРМАН

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 03.10.2000

Составлено дифференциальное уравнение в частных производных, связывающее вероятностное и пространственно-временное средние для неоднородного стационарного поля осредненной гидродинамической величины турбулентного потока суспензии. На его основе разработан метод пересчета эмпирических пространственно-временных средних на вероятностные с учетом влияния неоднородности поля гидродинамической величины, а также формы и размеров объема осреднения на относительное отклонение значений рассматриваемых средних друг от друга. Найдено условие, при котором эмпирические пространственно-временные средние по своей величине практически совпадают с вероятностными, и в данном случае измеренные пространственно-временные средние могут быть использованы для сопоставления результатов статистической модели турбулентности.

Складено диференціальне рівняння у часткових похідних, що зв'язує ймовірносне та просторово-часове середні для неоднорідного стаціонарного поля осередненої гідродинамічної величини турбулентного потоку суспензії. На його основі розроблено метод перерахунку емпіричних просторово-часових середніх на ймовірносні з урахуванням впливу неоднорідності поля осередненої гідродинамічної величини, а також форми і розмірів об'єму осереднення на відносне відхилення значень цих середніх одне від одного. Знайдено умову, за якої емпіричні просторово-часові середні по своїй величині практично співпадають з ймовірносними, і в даному випадку виміряні просторово-часові середні можуть використовуватись для співставлення результатів статистичної теорії турбулентності.

A partial differential equation has been set up relating the probability-averaged mean value to the spatial-temporal-averaged one for the nonuniform stationary field of an averaged hydrodynamic quantity of turbulent suspension flow. Based on it, a method has been developed of transformation of empirical spatial-temporal mean values into probabilistic ones with allowance made for the influence of hydrodynamic quantity field nonuniformity as well as of the averaging volume form and size on the relative difference of the studied mean values from each other. A condition has been found wherein empirical spatial-temporal mean values by its magnitude practically coincide with probabilistic ones, and in this case the spatial-temporal mean values measured can be used for comparing results of the turbulence statistical model.

ВВЕДЕНИЕ

В теории турбулентности суспензий широко применяются пространственный и временной методы осреднения гидродинамических параметров. Достоинством их является наглядность, простота и, что самое главное, согласованность с практическим определением средних величин, поскольку в экспериментальных исследованиях исключительно используются средние по какой-либо области пространства и промежутку времени. Вместе с тем, эти методы осреднений, как известно, имеют существенные недостатки [1 – 3].

С точки зрения современной теории турбулентности, удобным представляется вероятностный метод осреднения. Он является объективным и более универсальным по своей природе и строго удовлетворяет всем правилам осреднения Рейнольдса [3]. Однако при его использовании возникают трудности, связанные с практическим определением вероятностных средних, поскольку в экспериментальном исследовании такой метод осреднения никогда не применяется. В этой связи возникает вопрос: с чем сравнивать результаты статистиче-

ской теории турбулентности. Для сопоставления их с экспериментальными данными в статистической гидромеханике пользуются "эргодической гипотезой" [3]. Она допускает сходимость пространственного или временного среднего к вероятностному в случае квазиоднородного или квазистационарного поля гидродинамической величины при неограниченном объеме или интервале осреднения. В других случаях эти средние, конечно, не идентичны.

Основная задача данной статьи – выяснить насколько отличается измеренное пространственно-временное среднее от вероятностного в зависимости от степени неоднородности поля осредненной гидродинамической величины, а также от размеров и формы объема осреднения. Для этого составлено дифференциальное уравнение в частных производных, связывающее между собой рассматриваемые средние и геометрические параметры объема осреднения в случае установившегося равномерного турбулентного течения суспензии. На его основе установлены соотношения вероятностных и эмпирических пространственно-временных средних для конкретных опытных данных по из-

мерению осредненных концентрации и скоростей в потоке.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЕРОЯТНОСТНЫМ И ПРОСТРАНСТВЕННО - ВРЕМЕННЫМ СРЕДНИМИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В экспериментальных исследованиях турбулентные потоки суспензий в трубах или каналах являются, чаще всего, установившимися и равномерными. Они характеризуются тем, что поля осредненных концентрации и скоростей постоянны во времени и не изменяются при переходе от одного поперечного сечения потока к другому. Эти поля неоднородны только в поперечных сечениях потока. Именно такие потоки будем рассматривать при выводе дифференциального уравнения, связывающего вероятностное среднее с пространственно-временным.

Зададим неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$, оси Ox и Oy которой расположены в плоскости произвольного поперечного сечения потока, а ось Oz – на нижней стенке канала или трубы. Направим эти оси следующим образом: Ox – поперек потока, Oy – вертикально вверх, а Oz – вдоль наблюдаемого течения. Кроме того, построим вспомогательную прямоугольную систему координат $O'x'y'z'$, проходящую через произвольно заданную точку потока $O'(x, y, z)$, при этом оси $O'x'$, $O'y'$ и $O'z'$ направим параллельно соответствующим осям Ox , Oy и Oz .

Пусть $\varphi(x, y, z, t)$ – поле любой мгновенной гидродинамической величины в турбулентном потоке. Осредним его по пространству и времени. Для этого в области потока выделим вокруг заданной точки $O'(x, y, z)$ объем осреднения V в виде параллелепипеда или цилиндра с центром в этой точке и геометрической осью, параллельной оси $O'z'$. Интервал же времени T будем считать бесконечно большим.

Среднее значение функции φ по вышеуказанным объему и интервалу времени обозначим символом $\bar{\varphi}^*$. В случае установившегося равномерного турбулентного течения величина $\bar{\varphi}^*$ определяется как

$$\bar{\varphi}^* = \frac{1}{V} \iiint_V \bar{\varphi}(x + x', y + y') dx' dy' dz' = \frac{1}{F} \iint_F \bar{\varphi}(x + x', y + y') dx' dy', \tag{1}$$

$$\bar{\varphi}(x + x', y + y') = \tag{2}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(x + x', y + y', \dots, t') dt',$$

где F – площадь поперечного сечения объема осреднения V ; величина $\bar{\varphi}$, согласно "эргодической гипотезе" – вероятностное безусловное среднее значение функции φ .

Разложив функцию $\bar{\varphi}(x + x', y + y')$ в степенной ряд Тэйлора, получим на основании (1):

$$\bar{\varphi}^*(x, y) = \frac{1}{F} \iint_F \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} \bar{\varphi}(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} dx' dy'. \tag{3}$$

В случае, когда объем V представляет собой параллелепипед, областью интегрирования в (3) является прямоугольник

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} \leq x' \leq \frac{a}{2}, \\ -\frac{b}{2} \leq y' \leq \frac{b}{2}, \end{aligned} \tag{4}$$

а в случае цилиндрической формы объема V – круг

$$x'^2 + y'^2 \leq r^2, \tag{5}$$

где a и b – ширина и высота прямоугольника; r – радиус круга.

Интегрируя в выражении (3) по площади прямоугольника, имеем

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^*(x, y; a, b) = \frac{1}{ab} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} x'^n y'^m dx' dy'. \end{aligned} \tag{6}$$

или, после вычисления интегралов,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^*(x, y; a, b) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{a^{2n} b^{2m}}{2^{2(n+m)} (2n+1)! (2m+1)!} \frac{\partial^{2(n+m)} \bar{\varphi}(x, y)}{\partial x^{2n} \partial y^{2m}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда получаем в развернутом виде

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^* = \bar{\varphi} + \frac{a^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{b^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{a^2 b^2}{576} \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial x^2 \partial y^2} + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

В правой части уравнений (7) и (8) отсутствуют нечетные производные, поскольку входящие в (6) интегралы равняются нулю при нечетных значениях n и m .

При интегрировании в уравнении (3) по площади круга будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^*(x, y; r) &= \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} \bar{\varphi}(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x'^n y'^m dx' dy'. \end{aligned} \quad (9)$$

Выполнив в выражении (9) почленное интегрирование, затем заменив радиус r на половину диаметра круга $d/2$, получим окончательно:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^* &= \bar{\varphi} + \\ &+ \frac{d^2}{32} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{d^2}{32} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{d^4}{1536} \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial x^2 \partial y^2} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнение (10), аналогично как и в (8), не входят слагаемые, содержащие нечетные производные.

Пусть

$$\begin{aligned} x &= \xi L, & y &= \eta L, \\ a &= \bar{a} L, & b &= \bar{b} L, & d &= \bar{d} L, \end{aligned}$$

где L – некоторая характерная для потока длина; $\xi, \eta, \bar{a}, \bar{b}$ и \bar{d} – безразмерные величины. Подставив эти значения x, y, a, b и d в уравнения (8) и (10), получим

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^* &= \bar{\varphi} + \\ &+ \frac{\bar{a}^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{b}^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} + \frac{\bar{a}^2 \bar{b}^2}{576} \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^* &= \bar{\varphi} + \\ &+ \frac{\bar{d}^2}{32} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\bar{d}^2}{32} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\bar{d}^4}{1536} \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial x^2 \partial y^2} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку размеры поперечного сечения объема осреднения считаются малыми в сравнении с характерным размером потока, входящие в (11) и (12) величины $\bar{a} \ll 1, \bar{b} \ll 1$ и $\bar{d} \ll 1$. Поэтому, отбрасывая в правой части уравнений (11) и (12) слагаемые высшего порядка малости, получаем упрощенные уравнения

$$\frac{\bar{a}^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{b}^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} + \bar{\varphi} = \bar{\varphi}^*,$$

$$\frac{\bar{d}^2}{32} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{d}^2}{32} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} + \bar{\varphi} = \bar{\varphi}^*.$$

Их можно записать общим уравнением

$$p \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} + q \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} + \bar{\varphi} = \bar{\varphi}^*, \quad (13)$$

в котором коэффициенты p и q будут

$$p = \frac{\bar{a}^2}{32}, \quad q = \frac{\bar{b}^2}{32} \quad (14)$$

в случае прямоугольного поперечного сечения объема осреднения, и

$$p = q = \frac{\bar{d}^2}{32} \quad (15)$$

в случае круглого поперечного сечения.

Уравнение (13) связывает пространственно-временное среднее $\bar{\varphi}^*(\xi, \eta, \bar{a}, \bar{b})$ или $\bar{\varphi}^*(\xi, \eta, \bar{d})$ с безусловным вероятностным средним $\bar{\varphi}(\xi, \eta)$ и параметрами объема осреднения. Из этого уравнения следует, что разность значений величин $\bar{\varphi}^*$ и $\bar{\varphi}$ в произвольно заданной точке потока (ξ_0, η_0) зависит как от кривизны линий $\bar{\varphi}(\xi, \eta_0)$ и $\bar{\varphi}(\xi_0, \eta)$ на поверхности $\bar{\varphi}(\xi, \eta)$ в этой точке, так и от формы и размеров поперечного сечения объема осреднения. Из уравнения (13) вытекает также, что значения средних $\bar{\varphi}^*$ и $\bar{\varphi}$ одинаковы во всей области потока в двух случаях: когда $\bar{\varphi}$ линейно изменяется вдоль осей координат $O\bar{\xi}$ и $O\eta$ или является постоянной величиной, и в предельном случае, когда $\bar{a} \rightarrow 0, \bar{b} \rightarrow 0$ и $\bar{d} \rightarrow 0$.

Далее, снабдим характеристики твердой и жидкой фаз соответствующими нижними индексами p и f и выразим вероятностное среднее гидродинамической характеристики суспензии $\bar{\varphi}$ через безусловные вероятностные средние одноименных гидродинамических характеристик фаз $\bar{\varphi}_p$ и $\bar{\varphi}_f$ по формуле [1]

$$\bar{\varphi} = \sum_k \bar{\varphi}_k, \quad (k = p, f). \quad (16)$$

Тогда уравнение (13) преобразуется с учетом (16) к виду

$$p \sum_k \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_k}{\partial \xi^2} + q \sum_k \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_k}{\partial \eta^2} + \sum_k \bar{\varphi}_k = \sum_k \bar{\varphi}_k^*.$$

В силу линейности этого уравнения имеем

$$p \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_k}{\partial \xi^2} + q \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_k}{\partial \eta^2} + \bar{\varphi}_k = \bar{\varphi}_k^*. \quad (17)$$

Уравнение (17) связывает пространственно-временное среднее гидродинамической характеристики k -той фазы $\bar{\varphi}_k^*$ с безусловным вероятностным средним характеристики этой фазы $\bar{\varphi}_k$. Входящее в (17) безусловное вероятностное среднее $\bar{\varphi}_k$ представим в виде

$$\bar{\varphi}_k = \bar{\alpha}_k \langle \varphi_k \rangle, \quad (18)$$

где $\bar{\alpha}_k$ – вероятностная концентрация k -той фазы, равная вероятности того, что заданная точка потока в фиксированный момент времени будет принадлежать k -той фазе суспензии; $\langle \varphi_k \rangle$ – условное вероятностное среднее, получаемое при условии, что данная точка потока занята k -той фазой. Среднее же по пространству и времени $\bar{\varphi}_k^*$ запишем так:

$$\bar{\varphi}_k^* = \bar{c}_k \langle \varphi_k^* \rangle, \quad (19)$$

где \bar{c}_k – средняя во времени объемная концентрация k -той фазы; $\langle \varphi_k^* \rangle$ – Франклево пространственно-временное среднее, определяемое формулой [4]

$$\begin{aligned} \langle \varphi_k^* \rangle &= \frac{1}{\bar{c}_k} \frac{1}{Z} \iiint \iiint \varphi_k(x+x', y+y', z', t') dx' dy' dz' dt' = \\ &= \frac{1}{Z_k} \iiint \iiint \varphi(x+x', y+y', z', t') dx' dy' dz' dt', \end{aligned}$$

где Z – "четырёхмерный цилиндр", основание которого – объем V , а высота – интервал времени осреднения T ; Z_k – часть цилиндра, заполненная k -той фазой.

Система уравнений (17) – (19) связывает условное вероятностное среднее $\langle \varphi_k \rangle$ с Франклевым пространственно-временным средним $\langle \varphi_k^* \rangle$, а также вероятностную концентрацию $\bar{\alpha}_k$ со средней по времени объемной концентрацией \bar{c}_k .

В уравнениях (13) и (17) заданными считаются функции $\bar{\varphi}^*$ и $\bar{\varphi}_k^*$, представляющие собой аппроксимации опытных данных, а также значения коэффициентов p и q , соответствующие форме и размерам элементарной площадки, по которой осреднены исследуемые величины в процессе измерения. Поэтому решение вышеуказанных уравнений позволяет найти искомые вероятностные средние $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}_k$ и, следовательно, определить степень отклонения эмпирических средних $\bar{\varphi}^*$ и $\bar{\varphi}_k^*$ от соответствующих вероятностных средних $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}_k$. Покажем это на конкретном примере, используя приведенные в [5] опытные данные по измерению локальных осредненных концентрации и скоростей в напорном потоке суспензии. Вышеуказанные параметры измерены с помощью напорной трубки, известной под названием дифференциального пульсомера Орлова-Юфина. Конструктивные особенности и принцип работы этой трубки описаны в [5, 6].

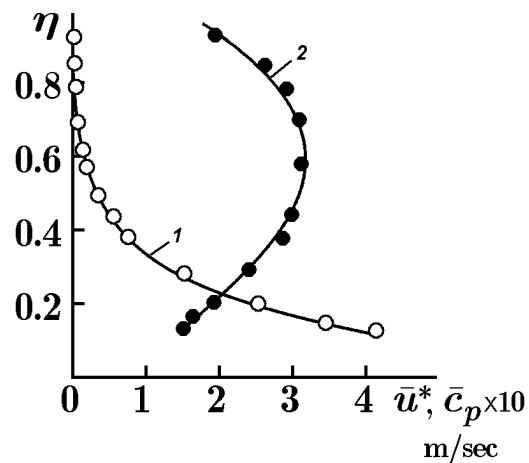


Рис. 1. Эпюры распределения концентрации \bar{c}_p (1) и продольной скорости \bar{u}^* (2) по вертикальному диаметру трубы

СООТНОШЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО И ПРОСТРАНСТВЕННО - ВРЕМЕННОГО СРЕДНИХ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ С ПОМОЩЬЮ НАПОРНОЙ ТРУБКИ

В основе работы измерительного прибора, каким является напорная трубка, лежит локальный отбор пробы суспензии из потока в мерный сосуд. Измерив массу m и объем V суспензии, поступившей за время T в сосуд, определяют локальные осредненную по времени объемную концентрацию твердых частиц \bar{c}_p и осредненную скорость движения суспензии \bar{u}^* согласно формулам

$$\bar{c}_p = \frac{m - V\rho_f}{V(\rho_p - \rho_f)}, \quad (20)$$

$$\bar{u}^* = \frac{V}{TF}, \quad (21)$$

где ρ_f и ρ_p – плотности жидкой и твердой фаз; α – тарировочный коэффициент; F – площадь поперечного сечения носка напорной трубки. В данном случае пространственное осреднение измеряемых параметров осуществляется по площади поперечного сечения носка напорной трубки, а временное – по времени отбора пробы суспензии. Относительная погрешность измерения концентрации и скоростей не превышает в среднем 2 – 3%.

На рис. 1 показаны заимствованные из [5] эпюры распределения концентрации \bar{c}_p и продольных скоростей \bar{u}^* по вертикальному диаметру трубы, полученные в результате исследования течения смеси воды и песка средней крупностью 0.4 мм в

горизонтальной круглоцилиндрической трубе диаметром $D = 103$ мм. В этих опытах средние по поперечному сечению трубы скорость потока и объемная концентрация твердых частиц равняются соответственно 2.4 м/с и 0.121, а внутренний диаметр носка напорной трубки, с помощью которой измерялись параметры, составляет 8 мм. Отношение внутреннего диаметра носка напорной трубки d к внутреннему диаметру трубы D , т.е. величина \bar{d} , равняется 0.0777.

Представленные на рис. 1 профили осредненных концентрации и скоростей аппроксимируются соответствующими зависимостями:

$$\bar{c}_p = 0.978e^{-6.94\eta}, \quad (22)$$

$$\bar{u}^* = \bar{u}_m^* \left(1 + f(\eta) \ln \frac{\eta}{\eta_m} \right), \quad (23)$$

$$0.125 \leq \eta \leq 0.95, \quad (24)$$

где $\eta = y/D$ – безразмерная ордината; \bar{u}_m^* – максимальная в поперечном сечении потока осредненная скорость, равная 3,2 м/с; η_m – значение ординаты η , соответствующее местоположению скорости \bar{u}_m^* , равное 0.6. Входящая в уравнение (23) функция $f(\eta)$ имеет вид

$$f(\eta) = 0.2767 + 0.922\eta - 2.3053\eta^2 \quad (25)$$

в промежутке $0.125 \leq \eta \leq 0.6$, и

$$f(\eta) = 1.065 - 1.775\eta \quad (26)$$

в промежутке $0.6 < \eta \leq 0.95$.

В указанных выше промежутках изменения ординаты η функция $f(\eta)$ принимает различный вид по той причине, что профиль осредненных скоростей \bar{u}^* асимметричен относительно геометрической оси трубы. Изображенные на рисунке сплошные линии относятся к расчетным значениям параметров \bar{c}_p и \bar{u}^* , полученным по соответствующим формулам (22) и (23), а точки – к измеренным. Отметим также, что профиль концентрации (22) характеризуется экспоненциальной неоднородностью, а профиль скоростей (23) – логарифмической.

Итак, задача заключается в том, чтобы по заданным функциям \bar{c}_p , \bar{u}^* и значению параметра \bar{d} определить профили вероятностной концентрации $\bar{\alpha}_p$ и осредненных по вероятности скоростей \bar{u} , а затем установить степень относительного отклонения значений измеренных параметров \bar{c}_p и \bar{u}^* от значений вероятностных средних $\bar{\alpha}_p$ и \bar{u} соответственно. Эту задачу решим вначале для концентрации, используя уравнение (13) с коэффициентами p и q , соответствующими круглому поперечному сечению объема осреднения. Подставив

в это уравнение вместо $\bar{\varphi}$ вероятностную концентрацию $\bar{\alpha}_p$, а вместо $\bar{\varphi}^*$ – осредненную по времени объемную концентрацию \bar{c}_p , и приняв в качестве характерного размера потока диаметр трубы D , получим

$$\frac{\bar{d}^2}{32} \left(\frac{\partial^2 \bar{\alpha}_p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_p}{\partial \eta^2} \right) + \bar{\alpha}_p = \bar{c}_p, \quad (27)$$

где $\xi = x/D$, $\eta = y/D$.

Согласно экспериментальным данным, при движении суспензий по горизонтальным прямым трубам концентрация твердых частиц практически равномерно распределяется по горизонтальным хордам поперечного сечения трубы. Поэтому в уравнении (27) производную $\partial^2 \bar{\alpha}_p / \partial \xi^2$ можно не учитывать, в связи с чем это уравнение принимает упрощенный вид

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \bar{\alpha}_p}{d\eta^2} + \bar{\alpha}_p = \bar{c}_p, \quad (28)$$

где $\varepsilon^2 = \bar{d}^2/32$ – малый параметр. Если подставить в уравнение (28) вместо \bar{c}_p формулу (22) и принять значение параметра ε^2 равным 1.887×10^{-4} , что соответствует величине $\bar{d} = 0.0777$, то в этом случае уравнение (28) описывает профиль вероятностной концентрации $\bar{\alpha}_p$, соответствующий заданному эмпирическому профилю осредненной по времени объемной концентрации \bar{c}_p .

При отыскании частного решения обыкновенного дифференциального уравнения (28) возникают трудности, связанные с определением констант интегрирования. Дело в том, что во всем промежутке изменения ординаты η , в котором определена функция \bar{c}_p , вероятностная концентрация $\bar{\alpha}_p$ неизвестна, поэтому задание значений концентрации $\bar{\alpha}_p$ и ее производных на концах этого промежутка с целью определения констант интегрирования не представляется возможным. Задание же приближенных граничных условий для уравнения (28) тоже не приводит к успеху, ибо это уравнение обладает сингулярной особенностью, так как коэффициент ε^2 при производной $d^2 \bar{\alpha}_p / d\eta^2$ является малой величиной, и поэтому частное решение рассматриваемого уравнения оказывается чувствительным к граничным условиям. Иначе говоря, незначительное изменение граничных условий может привести к заметному изменению расчетного профиля концентрации $\bar{\alpha}_p$.

При решении уравнения (28) будем пользоваться методом последовательных приближений, переписав это уравнение в виде

$$\bar{\alpha}_p = \bar{c}_p - \varepsilon^2 \frac{d^2 \bar{\alpha}_p}{d\eta^2}. \quad (29)$$

Обозначим через $\bar{\alpha}_{p,1}$ первое приближение к искомой функции $\bar{\alpha}_p$, в качестве которого примем функцию \bar{c}_p , так что $\bar{\alpha}_{p,1} = \bar{c}_p$. Подставляя в правую часть уравнения (29) вместо $\bar{\alpha}_p$ функцию $\bar{\alpha}_{p,1}$ получим слева новую функцию $\bar{\alpha}_{p,2}$, являющуюся вторым приближением к $\bar{\alpha}_p$. Подставляя теперь в правую часть уравнения (29) $\bar{\alpha}_{p,2}$ вместо $\bar{\alpha}_p$, будем иметь третье приближение и т.д. Общая формула, дающая n -е приближение, имеет вид

$$\bar{\alpha}_{p,n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \varepsilon^{2(k-1)} \frac{d^{2(k-1)} \bar{c}_p}{d\eta^{2(k-1)}}. \quad (30)$$

Показано, что полученная последовательность функций $\bar{\alpha}_{p,1}, \bar{\alpha}_{p,2}, \dots, \bar{\alpha}_{p,n}$ равномерно стремится к пределу, являющемуся искомой функцией $\bar{\alpha}_p$, при $n \rightarrow \infty$.

Учитывая, что ε^2 имеет четвертый порядок малости, достаточно ограничиться в (30) вторым приближением к $\bar{\alpha}_p$. Относительная погрешность определения концентрации за счет отбрасывания в (30) слагаемых высшего порядка малости (при $n \geq 3$) составляет 0.008%. Так что в данном случае можно вместо формулы (30) написать

$$\bar{\alpha}_p = \bar{c}_p - \varepsilon^2 \frac{d^2 \bar{c}_p}{d\eta^2}. \quad (31)$$

Подставляя в (31) вместо \bar{c}_p функцию (22) и учитывая, что $\varepsilon^2 = 1.887 \cdot 10^{-4}$, получаем искомое выражение профиля вероятностной концентрации

$$\bar{\alpha}_p = 0.9691e^{-6.94\eta}. \quad (32)$$

Таким образом, решена прямая задача, связанная с определением профиля вероятностной концентрации в случае задания профиля осредненной по времени объемной концентрации, соответствующего конкретному значению параметра \bar{d} .

Теперь решим обратную задачу, заключающуюся в том, чтобы по найденному профилю вероятностной концентрации определить профили осредненной по времени объемной концентрации, а следовательно, и относительные отклонения их от профиля вероятностной концентрации при различных, но малых в сравнении с единицей, значениях параметра \bar{d} . Решение этой задачи позволяет выяснить интересующий нас вопрос о том, как влияет диаметр носка напорной трубки \bar{d} на степень относительного отклонения измеренной концентрации от вероятностной.

Для решения обратной задачи используем уравнение (28). Учитывая, что $\varepsilon^2 = \bar{d}^2/32$ и, согласно (32),

$$\frac{d^2 \bar{\alpha}_p}{d\eta^2} = 6.94^2 \bar{\alpha}_p,$$

получаем на основании (28):

$$\bar{c}_p = (1 + 1.506\bar{d}^2) \bar{\alpha}_p. \quad (33)$$

Относительное отклонение значений концентраций \bar{c}_p и $\bar{\alpha}_p$ обозначим символом Δ_c и определим по обычной формуле:

$$\Delta_c = \frac{|\bar{c}_p - \bar{\alpha}_p|}{\bar{\alpha}_p}.$$

Величину Δ_c можно найти двумя способами: подстановкой в числитель вышеуказанной формулы вместо $\bar{\alpha}_p$ его выражение (32) или вместо \bar{c}_p – выражение (33). Первым способом получаем

$$\Delta_c = \frac{\varepsilon^2}{\bar{\alpha}_p} \cdot \frac{d^2 \bar{c}_p}{d\eta^2}$$

или, учитывая выражения (22) и (32) и равенство $\varepsilon^2 = \bar{d}^2/32$,

$$\Delta_c = 1.519\bar{d}^2. \quad (34)$$

Согласно второму способу, $\Delta_c = 1.506\bar{d}^2$, что несколько отличается от выражения (34). Это объясняется тем, что в первом способе учитывается производная $d^2 \bar{c}_p/d\eta^2$, а во втором – $d^2 \bar{\alpha}_p/d\eta^2$. Поскольку производная $d^2 \bar{c}_p/d\eta^2$ связана со вторым приближением при определении концентрации $\bar{\alpha}_p$, для оценки величины Δ_c будем пользоваться формулой (34). График функции Δ_c , построенный согласно (34) в промежутке $0 \leq \bar{d} \leq 0.1$, изображен на рис. 2. Из него следует, в частности, что для значения параметра $\bar{d} = 0.0777$, соответствующего используемому опытными данным по измерению концентрации, величина Δ_c составляет 0.92%. Это отклонение в несколько раз меньше погрешности измерения концентрации. Если бы в данных измерениях относительный диаметр напорной трубки \bar{d} равнялся, например, 0.05 или 0.1, то величина Δ_c уже составляла бы 0.38 или 1.52% соответственно.

Перейдем к определению степени относительного отклонения значений измеренных, осредненных по пространству и времени, продольных скоростей потока от вероятностных средних значений. Подставив в выражение (13) вместо $\bar{\varphi}$ осредненную по вероятности скорость движения суспензии \bar{u} , а вместо $\bar{\varphi}^*$ – осредненную по пространству и времени скорость \bar{u}^* , и обозначив величину $\bar{d}^2/32$ через ε^2 , будем иметь

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right) + \bar{u} = \bar{u}^*. \quad (35)$$

Здесь, как и в уравнении (27), безразмерные координаты $\xi = x/D$, $\eta = y/D$. Если в выражении (35)

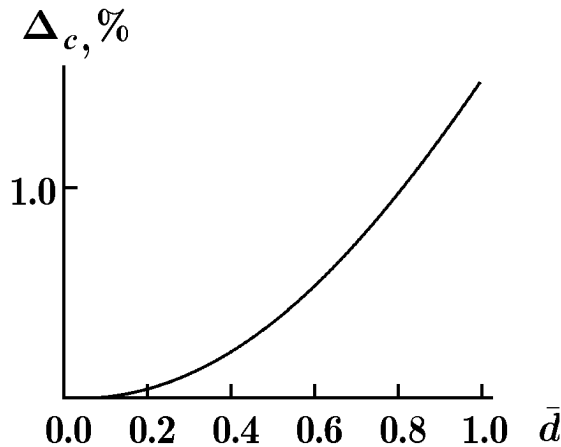


Рис. 2. График функции $\Delta_c(\bar{d})$

принять в качестве функции \bar{u}^* профиль осредненных скоростей (23), то слагаемые левой части уравнения (35) должны рассматриваться как функции ординаты η в плоскости $\xi = 0$. Поскольку, в отличие от концентрации, осредненные продольные скорости потока распределяются неравномерно вдоль горизонтальных хорд поперечного сечения трубы, производной $\partial^2 \bar{u} / \partial \xi^2$ в уравнении (35) пренебречь нельзя и она должна быть представлена, вообще говоря, в виде заданной функции переменной η . Однако задание этой функции в данном случае не представляется возможным, поскольку в используемых нами опытных данных не исследованы эпюры распределения осредненных скоростей вдоль горизонтальных хорд поперечного сечения трубы. В связи с этим попытаемся учесть производную $\partial^2 \bar{u} / \partial \xi^2$ по аналогии с таковой в осесимметричном потоке.

Рассмотрим осесимметричное течение суспензии в круглоцилиндрической трубе радиусом R . Приняв этот радиус в качестве характерного размера потока, введем переменные $\xi_* = x/R$ и $\eta_* = y/R$, связанные с ξ и η равенствами $\xi = \frac{R}{D} \xi_*$ и $\eta = \frac{R}{D} \eta_*$. Далее, перейдем в уравнении (35) к новым переменным ξ_* и η_* , в результате чего будем иметь

$$\varepsilon_*^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi_*^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta_*^2} \right) + \bar{u} = \bar{u}^*, \quad (36)$$

где

$$\varepsilon_*^2 = \frac{1}{\left(\frac{R}{D}\right)^2} \varepsilon^2.$$

В уравнении (36) ордината η_* изменяется от нуля на стенке трубы до единицы на оси трубы.

Уравнение, аналогичное (36), но написанное в полярных координатах, имеет для осесимметричного

потока вид

$$\varepsilon_*^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{u}}{d\rho} + \frac{d^2 \bar{u}}{d\rho^2} \right) + \bar{u} = \bar{u}^*, \quad (37)$$

где $\rho = r/R$ – безразмерный радиус-вектор, начало которого (полюс) находится в центре поперечного сечения трубы. При замене в уравнении (37) независимой переменной ρ на η_* , связанную с ρ формулой $\rho = 1 - \eta_*$, получаем

$$\varepsilon_*^2 \left(-\frac{1}{1 - \eta_*} \frac{d\bar{u}}{d\eta_*} + \frac{d^2 \bar{u}}{d\eta_*^2} \right) + \bar{u} = \bar{u}^*. \quad (38)$$

Сравнивая уравнение (38) с (36), убеждаемся, что величина $-\frac{1}{1 - \eta_*} \frac{d\bar{u}}{d\eta_*}$ в (38) равнозначна производной $d^2 \bar{u} / d\xi_*^2$ в (36). Так что в случае осесимметричного профиля осредненных скоростей уравнение (36) можно заменить эквивалентным ему обыкновенным дифференциальным уравнением (38).

Что касается асимметричного профиля осредненных скоростей, представленного на рис. 1, то нижнюю и верхнюю части его будем отдельно рассматривать как эпюры осредненных скоростей некоторых осесимметричных потоков в трубах радиусами R_n и R_b соответственно, где R_n – расстояние от нижней стенки трубы до кинематической оси потока, на которой осредненная скорость принимает максимальное значение, а R_b – расстояние от верхней стенки трубы до этой оси. Вначале рассмотрим нижнюю часть профиля.

Приняв в качестве характерного размера воображаемого осесимметричного потока радиус R_n , можем написать по аналогии с (38):

$$\varepsilon_n^2 \left(-\frac{1}{1 - \eta_n} \frac{d\bar{u}_n}{d\eta_n} + \frac{d^2 \bar{u}_n}{d\eta_n^2} \right) + \bar{u}_n = \bar{u}_n^*. \quad (39)$$

где

$$\varepsilon_n^2 = \varepsilon^2 \frac{1}{\left(\frac{R_n}{D}\right)^2} = \varepsilon^2 / \eta_m^2; \quad \eta_n = y / R_n.$$

Поскольку переменная η_n связана с η формулой $\eta = \eta_m \eta_n$, а нижняя часть профиля скоростей на рис.1 определена в области $0.125 \leq \eta \leq \eta_m$, значения переменной η_n относятся к промежутку

$$0.208 \leq \eta_n \leq 1. \quad (40)$$

Разделив обе части уравнения (39) на \bar{u}_m^* , получим

$$\varepsilon_n^2 \left(-\frac{1}{1 - \eta_n} \frac{d\bar{v}_n}{d\eta_n} + \frac{d^2 \bar{v}_n}{d\eta_n^2} \right) + \bar{v}_n = \bar{v}_n^*. \quad (41)$$

Здесь безразмерные скорости $\bar{v}_n = \bar{u}_n/\bar{u}_m^*$, $\bar{v}_n^* = \bar{u}_n^*/\bar{u}_m^*$.

Далее перейдем в уравнениях (23) и (25) к переменной η_n , а в (23), кроме того, к безразмерной скорости \bar{v}_n^* . Тогда эти уравнения представятся так:

$$\bar{v}_n^* = 1 + f_n(\eta_n) \ln \eta_n, \quad (42)$$

$$f_n(\eta_n) = 0.2767 + 0.5532\eta_n - 0.8299\eta_n^2. \quad (43)$$

Решение дифференциального уравнения (41) методом последовательных приближений, соответствующее второму приближению к \bar{v}_n , имеет вид

$$\bar{v}_n = \bar{v}_n^* + \varepsilon_n^2 \left(\frac{1}{1 - \eta_n} \frac{d\bar{v}_n^*}{d\eta_n} - \frac{d^2\bar{v}_n^*}{d\eta_n^2} \right). \quad (44)$$

В (44) функция \bar{v}_n^* определяется согласно формулам (42) и (43), а ее производные $\frac{d\bar{v}_n^*}{d\eta_n}$ и $\frac{d^2\bar{v}_n^*}{d\eta_n^2}$ — соотношениями

$$\frac{d\bar{v}_n^*}{d\eta_n} = f_n' \ln \eta_n + \frac{f_n}{\eta_n}, \quad (45)$$

$$\frac{d^2\bar{v}_n^*}{d\eta_n^2} = -1.66 \ln \eta_n + \frac{2f_n'}{\eta_n} - \frac{f_n}{\eta_n^2}, \quad (46)$$

где

$$f_n' = 0.5532 - 1.6598\eta_n. \quad (47)$$

Итак, формулы (42) и (43) позволяют определить в любой точке промежутка (40) значение осредненной по пространству и времени скорости \bar{v}_n^* , а уравнение (44) — значение осредненной по вероятности скорости \bar{v}_n . Относительное отклонение значений этих скоростей друг от друга обозначим символом Δ_n и найдем согласно формуле

$$\Delta_n = \frac{|\bar{v}_n^* - \bar{v}_n|}{\bar{v}_n}.$$

Подставляя выражение (44) в числитель этой формулы и учитывая равенства $\varepsilon_n^2 = \frac{\bar{d}^2}{32\eta_m^2} = 0.0868\bar{d}^2$, получаем

$$\Delta_n = 0.0868 \frac{\bar{d}^2}{\bar{v}_n} \left(\frac{1}{1 - \eta_n} \frac{d\bar{v}_n^*}{d\eta_n} - \frac{d^2\bar{v}_n^*}{d\eta_n^2} \right). \quad (48)$$

Отметим, что в (48) параметр \bar{d}^2 является переменной величиной, однако скорость \bar{v}_n здесь определяется по формуле (44) при постоянном значении $\bar{d} = 0.0777$. Определяемая по формуле (48) величина Δ_n является функцией переменной η_n и параметра \bar{d} . Для оценки степени относительного отклонения значений скоростей \bar{v}_n^* и \bar{v}_n будем

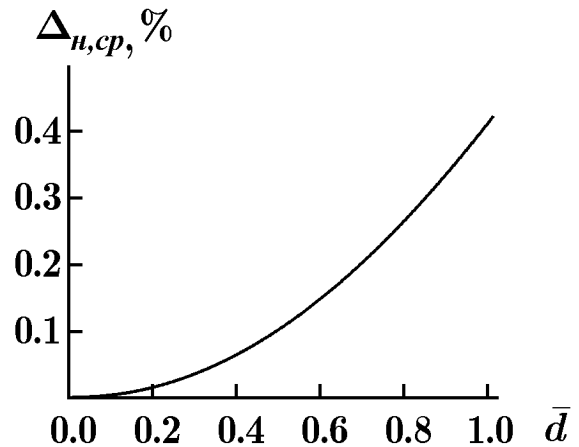


Рис. 3. График функции $\Delta_{n,ср}(\bar{d})$

пользоваться не самой функцией Δ_n , а средним ее значением $\Delta_{n,ср}$ в промежутке $0.208 \leq \eta_n \leq 1$:

$$\Delta_{n,ср}(\bar{d}) = \frac{1}{0.792} \int_{0.208}^1 \Delta_n(\eta_n, \bar{d}) d\eta_n. \quad (49)$$

В результате вычисления интеграла в уравнении (49) установлена зависимость

$$\Delta_{n,ср} = 0.42\bar{d}^2. \quad (50)$$

График функции $\Delta_{n,ср}$, построенный в промежутке $0 \leq \bar{d} \leq 0.1$, изображен на рис. 3. Из него следует, в частности, что в рассматриваемой нижней части профиля осредненных скоростей, измеренных с помощью напорной трубки при $\bar{d} = 0.0777$, величина $\Delta_{n,ср}$ равняется 0.25%, что на порядок меньше погрешности измерения. Если бы значение параметра \bar{d} в данных опытах равнялось, скажем, 0.05 или 0.1, то в этом случае величина $\Delta_{n,ср}$ составила бы 0.1 или 0.42%.

Переходя к рассмотрению верхней части профиля осредненных скоростей на рис.1, будем рассуждать аналогично, как и при рассмотрении нижней части этого профиля. Приняв в качестве характерного размера воображаемого осесимметричного потока радиус R_b , можем написать по аналогии с уравнением (41):

$$\varepsilon_b^2 \left(-\frac{1}{1 - \eta_b} \frac{d\bar{v}_b}{d\eta_b} + \frac{d^2\bar{v}_b}{d\eta_b^2} \right) + \bar{v}_b = \bar{v}_b^*. \quad (51)$$

где $\varepsilon_b^2 = \varepsilon^2/(1 - \eta_m)^2$; $\eta_b = (D - y)/R_b$; $\bar{v}_b = \bar{u}_b/\bar{u}_m^*$, $\bar{v}_b^* = \bar{u}_b^*/\bar{u}_m^*$,

Поскольку переменная η_b связана с η формулой $\eta = 1 - (1 - \eta_m)\eta_b$, а верхняя часть профиля скоростей на рис.1 определена в области $0.6 \leq \eta \leq 0.95$, значения переменной η_b находятся в промежутке

$$0.125 \leq \eta_b \leq 1. \quad (52)$$

Входящая в уравнение (51) скорость \bar{v}_b^* будет:

$$\bar{v}_b^* = 1 + f_b(\eta_b) \ln \frac{1 - 0.4\eta_b}{0.6}, \quad (53)$$

где

$$f_b(\eta_b) = 0.71(1 - \eta_b). \quad (54)$$

В результате решения уравнения (51) методом последовательных приближений второе приближение к \bar{v}_b дает

$$\bar{v}_b = \bar{v}_b^* + \varepsilon_b^2 \left(\frac{1}{1 - \eta_b} \frac{d\bar{v}_b^*}{d\eta_b} - \frac{d^2\bar{v}_b^*}{d\eta_b^2} \right). \quad (55)$$

В (55) параметр $\varepsilon_b^2 = 1.179 \cdot 10^{-3}$, функция \bar{v}_b^* определяется согласно уравнений (53) и (54), а ее производные – как

$$\frac{d\bar{v}_b^*}{d\eta_b} = 0.71 \ln \frac{1 - 0.4\eta_b}{0.6} - \frac{0.4}{1 - 0.4\eta_b} \cdot f_b, \quad (56)$$

$$\frac{d^2\bar{v}_b^*}{d\eta_b^2} = -\frac{0.8}{1 - 0.4\eta_b} \left(0.71 + \frac{0.2f_b}{1 - 0.4\eta_b} \right). \quad (57)$$

Относительное отклонение значений скоростей \bar{v}_b^* и \bar{v}_b , т.е. величину $\Delta_b = \frac{|\bar{v}_b^* - \bar{v}_b|}{\bar{v}_b}$ находим по формуле

$$\Delta_b = 0.1953 \frac{\bar{d}^2}{\bar{v}_b} \left(\frac{1}{1 - \eta_b} \frac{d\bar{v}_b^*}{d\eta_b} - \frac{d^2\bar{v}_b^*}{d\eta_b^2} \right). \quad (58)$$

Среднее значение функции Δ_b в промежутке (52) будет

$$\Delta_{b, \text{cp}}(\bar{d}) = \frac{1}{0.875} \int_{0.125}^1 \Delta_b(\eta_b, \bar{d}) d\eta_b$$

или в результате вычисления интеграла

$$\Delta_{b, \text{cp}} = 0.31\bar{d}^2. \quad (59)$$

График функции (59), построенный в промежутке $0 \leq \bar{d} \leq 0.1$, представлен на рис.4. Из него следует, что при $\bar{d} = 0.0777$ величина $\Delta_{b, \text{cp}} = 0.19\%$, тогда как, например, при $\bar{d} = 0.05$ или 0.1 она составляет 0.08 или 0.31% .

Итак, выше приведены результаты пересчета пространственно-временных средних на вероятностные для опытных данных по измерению

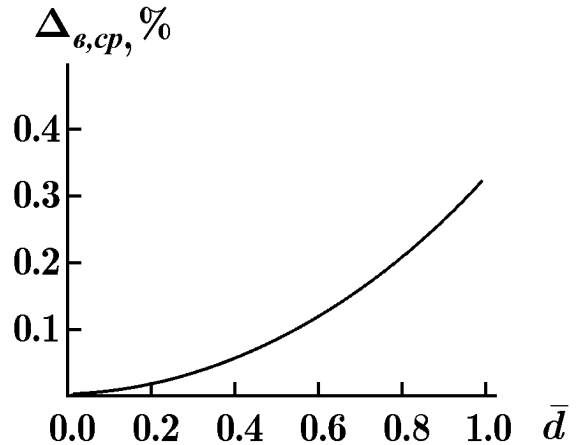


Рис. 4. График функции $\Delta_{b, \text{cp}}(\bar{d})$

осредненных концентрации и скоростей с помощью напорной трубки. В данном случае поперечное сечение объема осреднения имеет круглую форму. Аналогичные расчеты выполнены нами для приведенных в [5] опытных данных по измерению осредненных концентрации и скоростей методом кино съемки. В этих опытах поперечное сечение объема осреднения имеет прямоугольную форму, а отношение характерного его размера к глубине потока составляет 0.067 . В результате установлено, что относительные отклонения эмпирических пространственно-временных средних от вероятностных тоже на порядок меньше погрешности измерения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод пересчета эмпирического пространственно-временного среднего на вероятностное для неоднородного стационарного поля осредненной гидродинамической величины турбулентного потока суспензии. В основе его лежит полученное дифференциальное уравнение в частных производных, связывающее между собой эти средние и геометрические параметры объема осреднения. Установлена степень влияния неоднородности поля измеряемой осредненной гидродинамической величины, а также размеров и формы объема осреднения на относительное отклонение пространственно-временного среднего от вероятностного. Показано, в частности, что в случае, когда поле осредненной гидродинамической величины характеризуется экспоненциальной или логарифмической неоднородностью, а отношение характерного размера объ-

ема осреднения к характерному размеру потока не превышает 0.08, измеренное пространственно-временное среднее значение гидродинамической величины практически совпадает с ее вероятностным средним значением. При этом относительное отклонение значений этих средних друг от друга на порядок меньше погрешности измерения. В данном случае экспериментальные данные по измерению пространственно-временных средних можно использовать для сопоставления результатов статистической теории турбулентности.

1. Криль С. И. Напорные взвесенесущие потоки.– К.: Наук. думка, 1990.– 160 с.
2. Криль С.И., Берман В.П. Уравнения турбулентного течения газовзвесей // Прикл. гидромеханика.– 1999.– 1(73), N 1.– С. 26–34.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика.– М.: Наука, 1965.– 639 с.
4. Франкль Ф.И. О системе уравнений движения взвешенных наносов // Исследование максимального стока, волнового воздействия и движения наносов.– М.– 1960.– С. 132–137.
5. Силин Н.А., Витошкин Ю.К., Карасик В.М. и др. Гидротранспорт.– К.: Наук. думка, 1971.– 157 с.
6. Силин Н.А. и др. Приборы для измерения параметров гидротранспортирования твердых материалов.– К.: Изд-во АН УССР, 1963.– 160 с.