УДК 519.85

ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА ПРИ НЕЧЕТКО ЗАДАННЫХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

О.В. СЕРАЯ, Т.И. КАТКОВА

Задача рационального распределения однородного ресурса поставлена в предположении, что параметры целевой функции — нечеткие числа с известными функциями принадлежности. Проанализирована стандартная технология решения этой задачи, выявлены ее недостатки. Предложены два подхода, в которых эти недостатки устраняются. Первый из них основан на следующем. Отыскивается функция принадлежности нечеткого значения целевой функции задачи. Положение этой функции зависит от оптимизируемого набора, который выбирается таким образом, чтобы максимально сместить тело неопределенности целевой функции в область экстремального ее значения. Другой подход использует следующую двухэтапную процедуру. На первом этапе исходная задача решается при условии, что все ее нечеткие параметры заданы на уровне модальных значений. Далее конструируется составной критерий, одна компонента которого определяет компактность тела неопределенности значения целевой функции, а вторая характеризует меру отклонения искомого решения от модального. Таким образом, исходная нечеткая задача сводится к четкой задаче математического программирования. Приведен пример.

ВВЕДЕНИЕ

Рациональное распределение ограниченного ресурса — одна из традиционных задач практики. Качество распределения ресурса непосредственно связано с эффективностью функционирования элементов сложных социальных, экономических, технических систем, а также этих систем в целом. Традиционная постановка задачи такова: имеющийся некоторый ограниченный ресурс необходимо каким-либо разумным образом распределить между его потребителями. Задача в такой постановке является обычной задачей математического программирования и многократно обсуждалась. Количество публикаций по этой проблеме огромно (объединенная библиография наиболее популярных работ [1–5] содержит более 500 наименований).

Уровень сложности задач распределения ресурса существенно зависит от принятых предположений относительно характера исходных данных, структуры системы, между элементами которой осуществляется распределение ресурса, размерности задачи. При этом, проблематика детерминированных задач рассматривалась достаточно тщательно. Гораздо менее исследованы недетерминированные задачи. По вполне понятным причинам исходная информация, используемая при планировании и управлении системами, как правило, недостаточно достоверна. Это касается, в частности, данных о ходе выполнения плана, состоянии объектов, его реализующих, а также факторов внешней среды, в которой функционирует система. При этом, характер неопределенности в отношении численных значений влияющих факторов может быть разным. Во многих случаях практический опыт, статистическое исследование процессов, обуславливающих искажение исходных данных, позволяют установить вероятностные характеристики недетерминированных параметров системы и найти их распределения. Однако достаточно часто возникает ситуация, когда реальных статистических данных об этих параметрах недостаточно для формулировки и проверки правильности каких-либо правдоподобных гипотез относительно характера соответствующих распределений. В этих случаях для описания таких параметров естественно использовать формальный аппарат нечеткой математики [6].

Цель работы — совершенствование технологий решения задач рационального распределения ресурса при нечетких исходных данных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть c единиц однородного ресурса необходимо рационально распределить между потребителями. Введем набор функций $(\varphi_j(x_j))$, $j=1,2,\ldots,n$, определяющих прибыль, получаемую j-м потребителем, при использовании ресурса x_j. Тогда задача распределения формализуется следующим образом: найти набор $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, максимизирующий:

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x_j) \tag{1}$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n}x_j=c, \tag{2}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Будем считать теперь, что функции, задающие прибыль от реализации ресурса, содержат параметр, заданный нечетко. При этом соответствующую функцию для j-го потребителя запишем в виде $\varphi_j(x_j,a_j)$, где a_j — нечеткое число с известной функцией принадлежности $\mu(a_j)$.

Тогда задача (1)–(3) становится задачей нечеткого математического программирования. Рассмотрим возможные подходы к решению этой задачи.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Стандартная технология решения этой задачи состоит в сведении ее к четкой задаче математического программирования следующим образом [7, 8].

Вводится некоторое значение α уровня принадлежности нечетких параметров a_j, $j=1,2,\cdots,n$. Теперь исходная задача (1)–(3) переформулируется так: найти набор $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, а также набор $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, максимизирующие

$$F(X,A)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x_j,a_j) \tag{4}$$

и удовлетворяющие ограничениям (2), (3) и ограничениям

$$\mu(a_j) \ge \alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

При этом считают, что получаемый в результате решения задачи (2)–(5) набор X^* удовлетворяет ограничениям (2), (3) и принадлежит совокупности альтернатив, максимизирующих (4), со степенью не ниже α. К этому подходу может быть предъявлен ряд очевидных и естественных претензий. Во-первых, размерность получаемой задачи выше размерности исходной, так как содержит вдвое больше варьируемых переменных. Во-вторых, задача (2)–(5) может оказаться существенно сложнее задачи (1)–(3). Например, если в исходную функцию варьируемые переменные x_j входят линейно, то в преобразованную функцию переменные x_j и a_j могут входить квадратично. В третьих, получаемый в результате решения задачи набор X^* доставляет целевой функции (4) максимальное значение, если компоненты набора A примут конкретные значения $a_j = a_j^*$, что плохо согласуется с их нечетким статусом. Свободный от указанных недостатков подход предложен в [9, 10]. Используя правила выполнения операций над нечеткими числами [6–9], с учетом функций принадлежности $\mu(a_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, найдем функцию принадлежности $\mu(F(X, A))$ нечеткого значения целевой функции $F(X, A)$. Выберем некоторое фиксированное значение $\alpha < 1$ уровня принадлежности нечеткого числа $F(X, A)$ и решим уравнение

$$\mu(F(X, A)) = \mu(y) = \alpha. \tag{6}$$

Поскольку функции принадлежности, как правило, выпуклы вверх, уравнение (6) имеет два корня: $y_{1,2} = (\mu_1^{-1}(\alpha), \mu_2^{-1}(\alpha))$.

Каждый из полученных корней представляет собой некоторую функцию переменных задачи X. Выберем из них, например, $y_1(X)$ и поставим задачу отыскания набора X^*, максимизирующего $y_1(X)$ и удовлетворяющего ограничениям (2), (3). Понятно, что в результате реализации этой процедуры тело неопределенности, соответствующее функции принадлежности полученного нечеткого значения целевой функции $F(X^*, A)$, максимально сместится в область больших значений целевой функции задачи, что вполне соответствует постановке исходной задачи. Поясним сказанное простым примером.

Пусть исходная задача формируется следующим образом: найти набор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, максимизирующий целевую функцию

$$F(X, A) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^p, \quad p < 1 \tag{7}$$

и удовлетворяющий ограничениям (2), (3), причем a_j — нечеткие числа с гауссовыми функциями принадлежности

$$\mu(a_j) = \exp\left\{-\frac{(a_j - a_j^{(0)})^2}{2\sigma_j^2}\right\}, \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Тогда для любого набора X целевая функция (7) будет нечетким числом с функцией принадлежности

$$\mu(F(X, A)) = \mu(y) = \exp\left\{-\frac{(y - y^{(0)}(X))^2}{2\sigma_y^2(X)}\right\}, \tag{9}$$

где

$$y^{(0)}(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j^0 x_j^p, \ \ \sigma_y^2(X) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^{2p}. \tag{10}$$

Зададим значение функции принадлежности $\mu(y) = \alpha$ и решим уравнение

$$\mu(y) = \exp\left\{-\frac{(y - y^{(0)}(X))^2}{2\sigma_y^2(X)}\right\} = \alpha. \tag{11}$$

Отсюда

$$y_{1,2} = \left\{ y^{(0)}(X) - \left(\sigma_y^2(X) \ln \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \ y^{(0)}(X) + \left(\sigma_y^2(X) \ln \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Выбирая меньший из этих корней, запишем целевую функцию:

$$y_1^*(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j^0 x_j^p - k\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}, \ k = \left(\ln \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Получена следующая четкая задача математического программирования: найти X^*, максимизирующий (12) и удовлетворяющий (2), (3). Решение этой задачи легко трактуется — четкому набору X^* соответствует нечеткое число с функцией принадлежности:

$$\mu(X^*) = \exp\left\{-\frac{\left(y - \sum_{j=1}^{n} a_j (x_j^*)^p\right)^2}{2\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 (x_j^*)^{2p}}\right\},$$

максимально смещенной в область больших значений целевой функции задачи.

Следует отметить, что и этот подход не безупречен. При его реализации остаются не ясными следующие вопросы: во-первых, зависит ли результат решения задачи от выбираемого значения α и, если зависит, то как это значение задавать; во-вторых, зависит ли результат решения задачи от того, какой из корней уравнения (11) нужно максимизировать и, если зависит, то как выбирать нужный корень.

В связи с этим рассмотрим еще один метод решения задачи (2)–(4). Вначале решим эту задачу, задав значения нечетких ее параметров равными модальным. При этом целевая функция (7) примет вид:

$$F(X, A^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)} x_j^p \ . \tag{13}$$

Найдем набор X^*, максимизирующий (13) и удовлетворяющий (2), (3). Сформируем функцию Лагранжа:

$$\Phi(X, A^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)} x_j^p + \lambda \left(c - \sum_{j=1}^{n} x_j \right). \tag{14}$$

Дифференцируя (14) по x_j и приравнивая производные к нулю, получим:

$$\frac{d\Phi(X, A^{(0)})}{dx_j} = a_j^{(0)} p x_j^{p-1} - \lambda = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, n .$$

Отсюда

$$x_j = \left(\frac{\lambda}{p} \right)^{1/(p-1)} \left(\frac{1}{a_j^{(0)}} \right)^{1/(p-1)}, \ \ j = 1, 2, \ldots, n . \tag{15}$$

Подставим (15) в (2). Имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \left(\frac{\lambda}{p} \right)^{1/(p-1)} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{a_j^{(0)}} \right)^{1/(p-1)} = c,$$

откуда

$$\left(\frac{\lambda}{p} \right)^{1/(p-1)} = \frac{c}{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{a_j^{(0)}} \right)^{1/(p-1)}} . \tag{16}$$

Тогда, объединяя (15) и (16), получим:

$$x_j^{(0)} = \frac{\left(\frac{1}{a_j^{(0)}} \right)^{\frac{1}{(p-1)}} c}{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{a_j^{(0)}} \right)^{\frac{1}{(p-1)}}} = \frac{(a_j^{(0)})^{\frac{1}{(1-p)}} c}{\sum_{j=1}^{n} (a_j^{(0)})^{\frac{1}{(1-p)}}}, \ \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Набор $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ соответствует модальным значениям нечетких параметров задачи.

Таким образом, в результате проведенных действий определено модальное решение задачи $X^{(0)}$, и, кроме того, получено описание функции принадлежности (9), (10) нечеткого значения целевой функции, соответствующее произвольному набору X. Теперь искомым четким решением исходной нечеткой задачи (2)–(4) будем считать набор X^*, которому соответствует наиболее компактное тело неопределенности относительно функции принадлежности нечеткого значения целевой функции задачи, и, одновременно, который наименее уклоняется от модального набора $X^{(0)}$.

Естественной мерой компактности тела неопределенности для функции принадлежности нечеткого числа является его площадь. В соответствии с этим, мера компактности тела неопределенности нечеткого значения целевой функции задачи с учетом (11) определяется выражением:

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(y\text{-}y^{(0)}(X))^2}{2\sigma_y^2(X)}\right\}dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left(y-\sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)} x_j^p\right)^2}{2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^{2p}}\right\}dy.$$

С другой стороны, мера отклонения искомого набора X^* от модального $X^{(0)}$ рассчитывается по формуле:

$$J_2 = (X - X^{(0)})^T (X - X^{(0)}).$$

Объединяя два последних выражения, получим функционал:

$$J = J_1 + J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\mathrm{y}-\sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)} x_j^p)^2}{2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^{2p}}\right\}dy + (X - X^{(0)})^T (X - X^{(0)}), \quad (18)$$

минимизация которого определяет искомый набор X^*.

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-\bar{u})^2}{2\sigma^2}} du = \sqrt{2\pi}\sigma$, то (18) преобразуется к виду:

$$J = \sqrt{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^{(0)})^2. \quad (19)$$

Тогда набор X^*, минимизирующий (19) и удовлетворяющий (2), есть искомое решение исходной задачи.

Применим теперь описанную технологию для решения другой классической задачи распределения ресурса [11]. Традиционно используемый в этой задаче критерий Кобба–Дугласа имеет вид:

$$F(x_1, x_2) = a_0 x_1^{a1} x_2^{a2}. \quad (20)$$

Задача распределения ресурса формулируется следующим образом: найти набор $X = (x_1, x_2)$, максимизирующий (20) и удовлетворяющий ограничениям:

$$x_1 + x_2 = 1, \tag{21}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \tag{22}$$

Пусть параметры a_1, a_2 — нечеткие числа с функциями принадлежности $\mu_1(a_1)$, $\mu_2(a_2)$. Решим четкую задачу (20)–(22), задав параметры a_1 и a_2 на уровне их модальных значений a_1^0, a_2^0. При этом целевая функция (20) примет вид:

$$F_0(x_1, x_2) = a_0 x_1^{a_1^{(0)}} x_2^{a_2^{(0)}}.$$

Используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:

$$\Phi(x_1, x_2, \lambda) = a_0\, x_1^{a_1^{(0)}} x_2^{a_2^{(0)}} + \lambda(1 - x_1 - x)_2.$$

Далее

$$\frac{d\Phi(x_1, x_2, \lambda)}{dx_1} = a_0 a_1^{(0)} x_1^{a_1^{(0)}-1} x_2^{a_2^{(0)}} - \lambda = 0,$$

$$\frac{a_0 a_1^{(0)}}{x_1} x_1^{a_1^{(0)}} x_2^{a_2^{(0)}} - \lambda = \frac{a_0 a_1^{(0)}}{x_1} F_0(x_1, x_2) - \lambda = 0,$$

$$x_1^{(0)} = \frac{a_0 a_1^{(0)}}{\lambda} F_0(x_1, x_2), \tag{23}$$

$$\frac{d\Phi(x_1, x_2, \lambda)}{dx_2} = a_0 a_2^{(0)} x_1^{a_1^{(0)}} x_2^{a_2^{(0)}-1} - \lambda = \frac{a_0 a_2^{(0)}}{x_2} F_0(x_1, x_2) - \lambda = 0,$$

$$x_2^{(0)} = \frac{a_0 a_2^{(0)}}{\lambda} F_0(x_1, x_2). \tag{24}$$

Подставляя (23) и (24) в (21), получим

$$\frac{a_0}{\lambda} F_0(x_1, x_2)(a_1^{(0)} + a_2^{(0)}) = 1,$$

откуда

$$\frac{a_0}{\lambda} F_0(x_1, x_2) = \frac{1}{a_1^{(0)} + a_2^{(0)}},$$

$$x_1^{(0)} = \frac{a_1^{(0)}}{a_1^{(0)} + a_2^{(0)}}, \;\; x_2^{(0)} = \frac{a_2^{(0)}}{a_1^{(0)} + a_2^{(0)}}. \tag{25}$$

Пусть, для простоты, нечеткие числа a_1 и a_2 заданы интервально. При этом

$$\mu_1(a_1) = \begin{cases} 1, & a_1 \in [a_{11}, a_{12}], \\ 0, & a_1 \notin [a_{11}, a_{12}], \end{cases} \quad \mu_2(a_2) = \begin{cases} 1, & a_2 \in [a_{21}, a_{22}], \\ 0, & a_2 \notin [a_{21}, a_{22}]. \end{cases}$$

Найдем функции принадлежности нечетких чисел $x_1^{a_1}$, $x_2^{a_2}$. В соответствии с принципом обобщения [6] функция принадлежности нечеткого значения $y = f(x)$, где x — нечеткое число с функцией принадлежности $\mu(x)$, имеет вид $\mu_y(y) = \mu_x(f^{-1}(y))$.

Зададим $y_1 = x_1^{a_1}$, $y_2 = x_2^{a_2}$. Отсюда

$$a_1 = \frac{\ln y_1}{\ln x_1}, \quad a_2 = \frac{\ln y_2}{\ln x_2}.$$

Поэтому

$$\mu_1(y_1) = \begin{cases} 1, & a_{11} \le \dfrac{\ln y_1}{\ln x_1} \le a_{12}, \\ 0, & \dfrac{\ln y_1}{\ln x_1} \notin [a_{11}, a_{12}]. \end{cases}$$

Из (21), (22), с учетом смысла переменных x_1, x_2, следует, что $x_1 < 1$. Тогда $\ln x_1 < 0$. Поэтому неравенство

$$a_{11} \le \frac{\ln y_1}{\ln x_1} \le a_{12}$$

преобразуется к виду:

$$a_{11} \ln x_1 \ge \ln y_1 \ge a_{12} \ln x_1.$$

Отсюда

$$\ln x_1^{a_{11}} \ge \ln y_1 \ge \ln x_1^{a_{12}}.$$

Так как логарифмическая функция возрастает, то $x_1^{a_{11}} \ge y_1 \ge x_1^{a_{12}}$ или $x_1^{a_{12}} \le y_1 \le x_1^{a_{11}}$. Поэтому

$$\mu_1(y_1) = \begin{cases} 1, & x_1^{a_{12}} \le y_1 \le x_1^{a_{11}}, \\ 0, & y_1 \notin [x_1^{a_{12}}, x_1^{a_{11}}]. \end{cases}$$

Аналогично этому, получим:

$$\mu_2(y_2) = \begin{cases} 1, & x_2^{a_{22}} \le y_2 \le x_2^{a_{21}}, \\ 0, & y_2 \notin [x_2^{a_{22}}, x_2^{a_{21}}]. \end{cases}$$

Введем множество S точек с координатами y_1, y_2 таких, что

$$S = \{(y_1, y_2): y_1 \in [x_1^{a_{12}}, x_2^{a_{11}}], y_2 \in [x_2^{a_{22}}, x_2^{a_{21}}]\}.$$

Тогда функция принадлежности нечеткого числа $y = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ описывается соотношением:

$$M(y) = \begin{cases} 1, & (y_1, y_2) \in S, \\ 0, & (y_1, y_2) \notin S. \end{cases}$$

При этом составной критерий качества распределения (x_1, x_2), учитывающий площадь тела неопределенности функции принадлежности $\mu(y)$ и меру отклонения набора (x_1, x_2) от (x_1^0, x_2^0), имеет вид:

$$J = \int\limits_{x_1^{a_{12}}}^{x_1^{a_{11}}} \int\limits_{x_2^{a_{22}}}^{x_2^{a_{21}}} dx_1 dx_2 + (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 =$$

$$= (x_1^{a_{11}} - x_1^{a_{12}})(x_2^{a_{21}} - x_2^{a_{22}}) + (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2. \qquad (26)$$

Теперь задача сведена к следующему: найти набор (x_1, x_2), минимизирующий (26) и удовлетворяющий (21), (22). Эта задача легко решается. Понятно, что в случае необходимости компонентам критерия (26) можно придавать разный вес, если по каким-либо причинам целесообразно либо приблизить решение к модальному, либо улучшить компактность тела неопределенности, соответствующего функции принадлежности нечеткого значения целевой функции, вычисленной на полученном решении. При этом критерий (26) примет вид:

$$J = \delta(x_1^{a_{11}} - x_1^{a_{12}})(x_2^{a_{21}} - x_2^{a_{22}}) + (1-\delta)[(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2]. \qquad (27)$$

Пусть, например, $a_{11} = 0{,}5$; $a_{12} = 0{,}7$; $a_{21} = 0{,}3$; $a_{22} = 0{,}5$.

Тогда в соответствия с (25): $x_1^0 = 0{,}6$; $x_2^0 = 0{,}4$. Минимизация (27) с учетом (21), (22): для $\delta = 0{,}5$ дает набор $x_1^* = 0{,}602$; $x_2^* = 0{,}398$; для $\delta = 0{,}83$ получим $x_1^* = 0{,}607$; $x_2^* = 0{,}393$; для $\delta = 0{,}91$ получим $x_1^* = 0{,}617$; $x_2^* = 0{,}383$.

ВЫВОДЫ

Таким образом, предложен метод решения задачи рационального распределения ограниченного ресурса в условиях, когда параметры задачи — нечеткие числа с известными функциями принадлежности. Предложенная процедура сводит исходную нечеткую задачу к четкой задаче математического программирования. Конструируется составной критерий этой задачи. Первое слагаемое критерия характеризует уровень неопределенности нечеткого значения целевой функции на искомом наборе, численно оцениваемой площадью тела неопределенности. Второе слагаемое определяет меру отклонения оптимизируемого набора от модельного, получаемого при решении исходной задачи при фиксации нечетких ее параметров на уровне модальных значений. В случае необходимости слагаемых в этой аддитивной конструкции можно придавать разный вес.

Направления дальнейших исследований: разработка метода решения задачи распределения многомерного ресурса при нечетко заданных исходных данных; разработка метода решения нечеткой задачи распределения многомерного ресурса с несепарабельным критерием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гурин Л.С.*, *Дымарский Я.С.*, *Меркулов А.В.* Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. — М.: Сов. радио, 1968. — 463 с.
2. *Юдин Д.Б.* Задачи и методы стохастического программирования. — М.: Сов. радио, 1979. — 342 с.
3. *Интрилигатор М*. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Айрис–пресс, 2009. — 576 с.
4. *Иванилов Ю.П.* Математические модели в экономике. — М.: Наука, 1999. — 357 с.
5. *Шелобаев С.И.* Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. — М.: ЮНИТИ, 2001. — 367 с.
6. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and Control. — 1965. — № 8. — P. 338–353.
7. *Негойцэ К.* Применение теории систем к проблемам управления. — М.: Мир, 1981. — 180 с.
8. *Орловский С.А.* Проблема принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 206 с.
9. *Раскин Л.Г.* Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. — Х.: Парус, 2008. — 352 с.
10. *Серая О.В.* Многомерные модели логистики в условиях неопределенности: моногр. — Х.: ФЛ-П Стеценко И. И., 2010. — 512 с.
11. *Замков О.О.* Математические методы в экономике. — М.: МГУ им. Л.В. Ломоносова, 1998. — 368 с.

Поступила 24.06.2011