ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 2001. Том 3 (75), N 1. С. 86 – 88*

УДК 532-522

ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. М. ПАЛЬТИ

ИЭС им. Е.О.Патона НАН Украины, Киев

Получено 15.08.2000

В работе получено аналитическое решение задачи о затопленной струе вязкой несжимаемой жидкости в автомодельном приближении. В отличие от известных решений, предлагаемое описывает расширяющуюся вдоль некоторого конуса струю с приосевым обратным током.

В роботі отримано аналітичний розв'язок задачі про занурений струмінь в'язкої нестислої рідини в автомодельному наближенні. На відміну від відомих розв'язків, пропонований описує струмінь, що має зворотну течію поблизу осі, який розширюється вздовж деякого конуса.

An analytical solution of the problem of underwater incompressible viscose fluid jet in self-similar approximation is obtained. Proposed solution, unlike known ones, describes a jet with paraxial back flow expanded along some cone.

ВВЕДЕНИЕ

Решения уравнений Навье-Стокса, автоматически удовлетворяющие уравнению неразрывности в случае осевой симметрии (автомодельное приближение), имеют вид

$$v_R = \frac{\nu}{R} y'(x), v_\theta = \frac{\nu}{R}\frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{p-p_\infty}{\rho} = \frac{\nu^2}{R^2}\Pi(x), \qquad (1)$$

где $x = \cos\theta$; (R, θ) - переменные сферической системы координат; штрих означает дифференцирование по x; $y(x)$ - искомая величина, связанная с функцией тока меридионального сечения $\psi(x)$ соотношением $\psi = \nu R y$. Подобным решениям посвящено множество публикаций, начиная с работ [1, 2]. Обзор класса точных решений уравнений Навье-Стокса приведен в монографиях [3, 4]. Подстановка выражений (1) в уравнения Навье - Стокса для осесимметричного течения в сферической системе координат приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2(1-x^2)y' + 4xy + y = a + bx - cx^2 \equiv F(x), \qquad (2)$$

$$\Pi(x) = y' - \frac{y^2}{2(1-x^2)} + c. \qquad (3)$$

Граничные условия ставятся на оси, причем различные при $x = 1$ и $x = -1$ состоят в регулярности течения:

$$y(1) = y(-1) = 0, y'(1) < \infty. \qquad (4)$$

Замыкающим является задание потока импульса

$$P = \oint \Pi_{RR} \cos\theta \sin\theta d\theta. \qquad (5)$$

Если положить $a = b = c = 0$, получим решение Ландау [2]:

$$y = 2(1-x^2)/(x-\gamma). \qquad (6)$$

Известны попытки решения задачи (2)-(5) с ненулевыми константами [5]. Однако данная автором постановка задачи в действительности не содержит никакого произвола. В работе [3] показано, что все константы можно определить и решение (6) является единственным. Константа γ определяется соотношением (5). Обобщения решения (6) на истечение жидкости из трубки конечного диаметра также приводят к приосевому (сомкнутому) режиму распространения затопленной струи [6]. Расширение струи и обратный ток возникали в осесимметричных вращающихся струях [3, 7]. Отметим, вместе с тем, что многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют о расширении ламинарной затопленной струи без специальной ее закрутки (см. например [8]). Ниже расмотрена постановка задачи, в рамках которой возникает расширяющаяся струя с приосевым обратным током.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поясним, каковы, по нашему мнению, предпосылки существования решения типа (6). В работе [2] изучали установившееся течение вязкой жидкости. Это позволило приосевое течение жидкости считать заданным граничными условиями.

Можно, однако, представить себе другие граничные условия, при которых жидкость, эжектируемая потоком из трубы, распространяется не сомкнутой струей, а растекается вдоль некоторого конуса, который разделяет затопленное пространство на две несмешивающиеся области. Конечно, эти области можно считать не смешивающимися лишь на основном участке струи, то есть там, где начальным расходом жидкости можно пренебречь по сравнению с эжектированным. Это одно из условий справедливости автомодельного приближения. Рассмотрение двух таких изолированных областей течения увеличивает число констант вдвое. При этом к условиям типа (4), (5) следует добавить условие равенства компонент вязкого тензора на указанном конусе. Запишем граничные условия для такой задачи. Из равенства нулю полного расхода эжектированной жидкости, в каждой из указанных областей

$$G^{(1)} = 2\pi \int\limits_0^{\theta_0} r^2 v_r^{(1)} \sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi\nu r \int\limits_{-1}^{x_o} (y^{(1)})' dx == 2\pi\nu r[y(x_0) - y(-1)] = 0,$$

а также из $G^{(2)} = 0$ получим

$$y(-1) = y(x_0) = y(1) = 0. \qquad (7)$$

На разделяющей конической поверхности $x = x_0$ потребуем равенства давлений, радиальных компонент скорости и вязких сил (компонент тензора напряжений) $\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}$. Плотности и вязкости жидкостей в разных областях считаем одинаковыми. Соответствующие условия имеют вид

$$\Pi^{(1)} = \Pi^{(2)}, (y^{(1)})' = (y^{(2)})' = 2b, (y^{(1)})'' = (y^{(2)})''. \qquad (8)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Условия (7),(8) позволяют выразить константы a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 в правой части выражений (2) и (3) через одну константу b и получить

$$F^{(1)}(x) = F^{(2)}(x) = 4b(1 - x^2).$$

Введение новой функции $T(x)$, согласно соотношению:

$$y = 2(1 - x^2)T'/T,$$

позволяет привести уравнение (2) относительно $T(x)$ к гипергеометрическому [9]. Общее решение его имеет вид

$$y = 2(1 - x^2)\frac{T_1' + AT_2'}{T_1 + AT_2}, \qquad (9)$$

где

$$T_1(z) = z(1 + \sum_{k=1} f_k z^k), z = (1 + x)/2,$$

$$f_k = [k!(k + 1)!]^{-1} \prod_{i=1}^{k} (b + k^2 - k),$$

$$T_2(z) = T_1(z)\ln(z) + z(\sum_{k=1} f_k g_k z^k),$$

$$g_k = \sum_{s=1}^{k} (2s^2 - b(2k + 1))(s(s + 1)(s^2 - s + b))^(- 1).$$

Полагая $A = -(1+\gamma)/2$ при $b \to 0$, придем к решению Ландау [2]. С помощью соотношений (2), (3) и (9) можно получить выражение для радиальной компоненты скорости и давления:

$$\frac{Rv_R}{\nu} = y' = 2b - \frac{2xy}{(1 - x^2)} - \frac{y^2}{2(1 - x^2)},$$

$$\Pi(x) = 2b - \frac{2xy}{1 - x^2} - \frac{y^2}{1 - x^2}. \qquad (10)$$

Константа b определяется полным потоком импульса через одну из областей. Проанализируем решение (9). Для каждого $b \neq 0$ существует x_0, при котором $y(x)$ меняет знак. Это означает, что меняет знак функция тока $\psi(x)$. Интегрируя уравнения для линий тока, получаем

$$r(\theta) = \frac{\mathrm{const}}{y(x(\theta))}.$$

График типичных линий тока приведен на рис. 1.

Таким образом, поскольку $x < 1$, то неравенство

$$T_1'(1) - \frac{1 + \gamma}{2} AT_2'(1) < 0 \qquad (11)$$

есть условие образования приосевого обратного тока, а

$$\gamma > 2T_1(1)/T_2(1) - 1 \qquad (12)$$

– условие регулярности решения (более сильное, чем в [2], где $\gamma > 1$).

3. ПРИМЕНЕНИЯ

Для практического использования полученного решения воспользуемся соображениями работы [3]. Рассмотрим трубку конечного размера d, из которой вытекает струя с равномерной скоростью

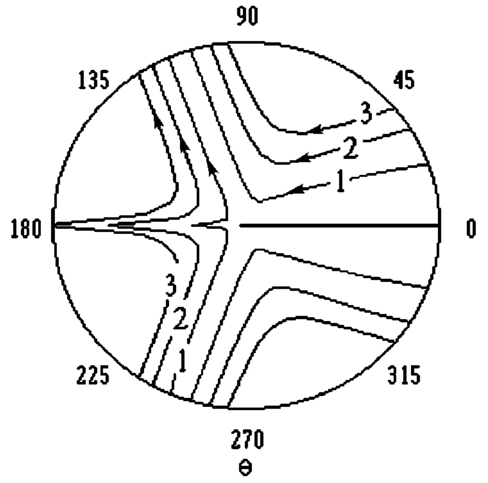

Рис. 1. Типичные линии тока ($b = 1, \gamma = 5$), соответствующие полярным зависимостям: *(1)* - $r_1(\theta) = 1,5/|y(x(\theta))|$, *(2)* - $r_2(\theta) = 3,8/|y(x(\theta))|$, *(3)* - $r_3(\theta) = 5,6/|y(x(\theta))|$.

v_0. Для использования решения (6) необходимо устремить $b \to 0$ и $v_0 \to \infty$, так чтобы произведение dv_0 оставалось ограниченным и постоянным. Введем обозначение $dv_o = \sqrt{P_o/\rho}$, где величина P_o имеет размерность потока импульса. Согласно сказанному, P_o не зависит от размера d, поэтому, найдя его значение для трубки конечного размера и использовав в решении для точечного источника в основном участке струи, можно получить одинаковые картины течения. Заметим, что решение (6) характеризуется инвариантом P (5), который нельзя считать определяющим, так как для знания P необходимо сначала получить поле скоростей вне трубки. В то же время P_o можно считать определяющим, так как для его знания необходимо иметь исходные величины d и v_0. В цилиндрической системе координат решение (6) для осевого поля скоростей в плоскости $z = 0$ имеет вид $v_z = 2\nu/\gamma r$. Для источника конечного размера осевое поле скоростей определим следующим образом:

$$\begin{cases} v_z = v_o \quad \text{при} \quad r \in [0, d], \\ v_z = (v_o d)/r \quad \text{при} \quad r \in [d, \infty). \end{cases} \qquad (13)$$

Это неверно для трубок конечного размера, однако с уменьшением d кривая вне трубки будет стремиться к гиперболе, и при $d \to 0$ получим соотношение $\sqrt{P_o/\rho} = 2\nu/\gamma$, которое позволяет ввести число Рейнольдса:

$$Re = v_o d/\nu = \sqrt{P_o/\rho}/\nu = 2/\gamma. \qquad (14)$$

Представляя

$$v_z(r) = v_R x + v_\theta \sqrt{1 - x^2} = (\nu/R)(xy' + y)$$

через компоненты сферической системы координат и сравнивая в плоскости $x = 0$ с выражением (13), при $d \to 0$ с учетом (14) получаем

$$Re = y(0) = \frac{2T_1'(0) - (1+\gamma)T_2'(0)}{T_1(0) - (1+\gamma)T_2(0)/2}. \qquad (15)$$

Используя условие (12) на γ и (15), можно получить ограничение на числа Рейнольдса, при которых справедливо полученное решение.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено точное решение задачи о течении расширяющейся струи несжимаемой вязкой жидкости в автомодельном приближении. Особенностью решения является разомкнутый режим течения, а также зависимость угла раствора конуса расширения струи от ее начального импульса. В основе решения лежит рассмотрение двух несмешивающихся областей жидкости, взаимодействующих за счет сил вязкого трения. В заключение автор благодарит М.А.Гольдштика и А.А.Снарского за обсуждение затронутых в статье вопросов, сохраняя за собой ответственность за правильность полученных результатов.

1. *Слезкин Н.А.* Движение вязкой жидкости между двумя конусами // Уч.зап.МГУ.– 1934.– N4.– С. 83-87.
2. *Ландау Л.Д.* Новое точное решение уравнений Навье-Стокса // ДАН СССР.– 1944.– N7.– С. 299-301.
3. *Гольдштик М.А.* Вихревые потоки.– Новосибирск: Наука, 1981.– 366 с.
4. *Боярович В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В.* Электровихревые течения.– Рига: Зинатне, 1985.– 315 с.
5. *Яцеев В.И.* Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости // ЖТФ.– 1950.– 11.– С. 1031-1034.
6. *Румер Ю.Б.* Конвективная диффузия в затопленной струе // ПММ.– 1952.– в.6.– С. 743-744.
7. *Goldshtik M.A. and Shtern V.N.* Conical flows of fluid with variable viscosity // Proc.R.Soc.London.– A419.– 1988.– С. 91-106.
8. *Кокушкин Л.П.* О течениях жидкого металла в изложнице // Тр.II конф.по слитку.– М.– Металлургия.– С. 1965.94
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // М.– Наука.– 1971.– С. 576.