УДК 622.831:539.3



$\boxed{\text{В. Г. Перепелица}}$, А. Н. Коломиец, Л. Д. Шматовский

# Особенности напряженного состояния горного массива в процессе проведения выработки

*(Представлено академиком НАН Украины А. Ф. Булатом)*

*В рамках механики упруго-деформированного тела разработана методика и решена задача о напряженном состоянии горного массива в окрестности горизонтальной цилиндрической выработки. Численными методами выявлено значительную концентрацию растягивающих напряжений в зоне ведения горных работ.*

При проходке выработок в зоне ведения горных работ наблюдается повышенная концентрация напряжений. Последнее, как выясняется [1], зачастую предстает в качестве фактора, существенно влияющего на устойчивость горных выработок. Вместе с тем следует отметить, что исследованием закономерностей распределения напряжений и разработкой способов использования проявлений горного давления в технологической схеме проведения и крепления контура выработок практически никто не занимался. Ниже речь пойдет о разработке методики и решении пространственных задач механики горных пород для массива с горизонтальной цилиндрической выработкой, торец (забой) которой подвигается в осевом направлении с некоторой скоростью $v$.

**Постановка задачи.** Рассмотрим напряженно-деформированное состояние массива горных пород, вмещающего горизонтальную цилиндрическую выработку радиусом $h$, забой которой $\bar{z} = \bar{a}$ подвигается с некоторой скоростью $v$ в положительном направлении оси выработки $\bar{z}$ (рис. 1).

В процессе решения задачи будем пользоваться цилиндрической системой координат $(\bar{r}, \theta_1, \bar{z})$, начало которой $\bar{r}$, $\bar{z} = 0$ возьмем на удалении $a \gg h$ с тем, чтобы исключить влияние забоя выработки на характер поля напряжений в плоскости $\bar{z} = 0$.

Учитывая тот факт, что в окрестности выработки $\bar{r} \leqslant 7{,}2$ м наблюдается искусственная трещиноватость хаотической ориентировки, процесс деформирования породного массива, как показано в [2], может рассматриваться в рамках изотропного упруго-деформируемого твердого тела.

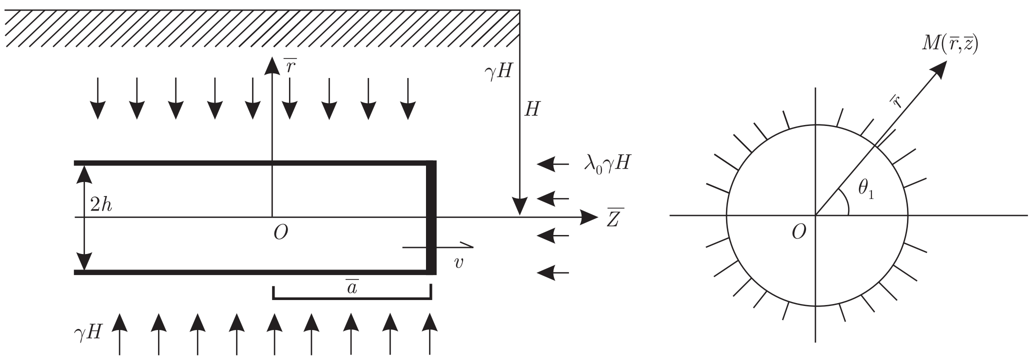


Рис. 1

Напряженное состояние горного массива при проведении выработки определяется соотношениями

$$\sigma_r = \sigma_{rr} - \gamma H; \qquad \sigma_\theta = \sigma_{\theta\theta} - \gamma H; \qquad \sigma_z = \sigma_{zz} - \lambda_0 \gamma H; \qquad \tau_{rz} = \sigma_{rz}, \tag{1}$$

где $\gamma H$ — начальные, а $\sigma_{rr}$, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{zz}$ и $\sigma_{rz}$ — дополнительные нормальные и касательные напряжения, обусловленные образованием полости в массиве горных пород; $H$ — расстояние от земной поверхности до оси выработки; $\gamma$ — объемный вес толщи горных пород; $\lambda_0$ — коэффициент осевого давления.

Так как изменением начальных напряжений по высоте выработки можно пренебречь, то при отсутствии крепи полные напряжения на контуре и забое выработки равны нулю.

Тогда граничные условия на контуре и забое выработки запишутся следующим образом:

$$\text{при} \qquad \bar{r} = h; \qquad \bar{z} \leqslant \bar{a}; \qquad \sigma_{rr} = \gamma H; \qquad \sigma_{rz} = 0; \tag{2}$$

$$\text{при} \qquad \bar{z} = \bar{a}; \qquad 0 \leqslant \bar{r} \leqslant h; \qquad \sigma_{zz} = \lambda_0 \gamma H; \qquad \sigma_{rz} = 0. \tag{3}$$

Задача состоит в определении и исследовании напряженного состояния углепородного массива с целью выявления основополагающих закономерностей, обеспечивающих эффективное и безопасное проведение горных выработок.

Исследования будем осуществлять, введя подвижную систему координат $(r, z)$, которая связана с неподвижной системой известным преобразованием Галилея $z = (\bar{z} - \upsilon t)h^{-1}$; $r = \bar{r}h^{-1}$.

В этом случае уравнения динамического равновесия массива горных пород примут вид:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \bar{\beta}_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] U_r + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} U_z = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) U_r + (1 - 2\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} + \bar{\beta}_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U_z = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $U_r$ и $U_z$ — компоненты вектора перемещений соответственно в направлениях относительных координат $r$ и $z$; $\nu$ — коэффициент Пуассона;

$$\bar{\beta}_1^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1-\nu)} - k_1^2; \quad \bar{\beta}_2^2 = \frac{2(1-\nu)}{1 - 2\nu} - k_2^2; \quad k_1^2 = \frac{\rho \upsilon^2 (1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}; \quad k_2^2 = \frac{(1-\nu)k_1^2}{2};$$

$E$ — модуль Юнга; $\rho$ — плотность.

**Решение уравнений динамического равновесия.** Чтобы обеспечить достаточный функциональный произвол для удовлетворения условий на контуре (2) и поверхности забоя (3) выработки, решение системы уравнений (4) будем искать в форме

$$U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{b - \lambda c}{1 - \lambda b} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \qquad U_z = \left[\frac{a - c}{1 - \lambda a} + 2(1-\nu)\frac{b}{1 - \lambda b}\right]\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\psi - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{5}$$

где $\varphi(r, z)$ и $\psi(r, z)$ — некоторые функции; $\lambda$, $a$, $b$, $c$ — произвольные постоянные.

Полагая

$$c = \{\beta_2^2 a(1 - \lambda b) + [2(1-\nu)\beta_2^2 - 1]b\}[\beta_2^2(1 - \lambda b) - \lambda(1 - \lambda a)]^{-1},$$

находим

$$
\begin{aligned}
b &= [a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - b_0}]/2\lambda\{2(1-\nu)[1+\beta_2^2\overline{\beta}_1^2(1-\lambda a)] - \beta_1^2\};\\
a_0 &= [\beta_2^2 - \lambda(1-\lambda a)]\{2(1-\nu)\bar{\beta}_1^2 - \lambda a[2(1-\nu)\bar{\beta}_1^2 - \beta_1^2)]\} -\\
&\quad - [\lambda(1-\lambda a) - 1][2(1-\nu) - \lambda a - \beta_1^2)];\\
b_0 &= 4\lambda^2 a(1-\lambda a)(1-\beta_1^2)\{2(1-\nu)[1+\overline{\beta}_1^2\beta_2^2(1-\lambda a) - \beta_1^2]\}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Внося соотношения (5) в (4) и учитывая (6), получим дифференциальные уравнения относительно искомых функций $\varphi(r,z)$ и $\psi(r,z)$:

$$
L_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \omega_1 L_{12}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0; \qquad L_{21}\left[2\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \omega_2\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\psi\right] = 0,
$$

где

$$
\begin{aligned}
&L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - \beta_1^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}; \qquad L_{12} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \beta_2^2\frac{\partial^2}{\partial z^2};\\
&\beta_1^2 = \frac{\nu}{1-\nu} + k_1^2; \qquad \beta_2^2 = \frac{1-\nu}{\nu} - \frac{1-2\nu}{\nu}k_2^2.
\end{aligned}
$$

Определив функции $\varphi(r,z)$ и $\psi(r,z)$, а затем возвратившись к формулам (5) и полагая $\lambda = \lambda_n$, $a = a_n$ $(n = 1, 2)$, аналитические зависимости для компонент вектора перемещений представим в таком виде:

$$
\begin{aligned}
U_r &= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{2}\int\limits_0^\infty\{[A_{1n}(\alpha)\omega_{3n}J_1(\alpha\beta_1 r) + A_{2n}(\alpha)\omega_{4n}J_1(\alpha\beta_2 r) +\\
&\quad + (B_{1n}(\alpha)\omega_{3n} - B_{2n}(\alpha)\omega_{4n})J_1(\alpha\beta_{3n}r)]\cos\alpha z - [C_{1n}(\alpha)\omega_{3n}J_1(\alpha\beta_1 r) -\\
&\quad - C_{2n}(\alpha)\omega_{4n}J_1(\alpha\beta_2 r) + (Д_{1n}(\alpha)\omega_{3n} + Д_{2n}(\alpha)\omega_{4n})J_1(\alpha\beta_{3n}r)]\sin\alpha z\}d\alpha;\\
U_z &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{2}\int\limits_0^\infty\{[A_{1n}(\alpha)\omega_{5n}J_0(\alpha\beta_1 r) - A_{2n}(\alpha)\omega_{6n}J_0(\alpha\beta_2 r) +\\
&\quad + \alpha(B_{1n}(\alpha) - \beta_{3n}\omega_{7n}B_{2n}(\alpha)J_0(\alpha\beta_{3n}r)]\sin\alpha z + [C_{1n}(\alpha)\omega_{5n}J_0(\alpha\beta_1 r) +\\
&\quad + C_{2n}(\alpha)\omega_{6n}J_0(\alpha\beta_2 r) + \alpha(Д_{1n}(\alpha) + \beta_{3n}\omega_{7n}Д_{2n}(\alpha))J_0(\alpha\beta_{3n}r)]\cos\alpha z\}d\alpha,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $A_{mn}(\alpha)$ и $B_{mn}(\alpha)$, $C_{mn}(\alpha)$ и $Д_{mn}(\alpha)$ $(m, n = 1, 2)$ — произвольные функции аргумента $\alpha$; $J_n(\alpha\beta_n r)$ — функции Бесселя первого рода, $\beta_{3n}^2 = 2\nu\omega_{1n}/\omega_{2n}$; $\omega_{1n}/\omega_{2n} > 0$.

Аналитические зависимости для компонент тензора напряжений получаем при помощи формул (7), воспользовавшись соотношениями закона Гука [3].

Для реальных горных пород значения параметров $k_1$ и $k_2$ в аргументах функций Бесселя $k_1^2 \approx 1{,}04 \cdot 10^{-7}\upsilon^2$; $k_2^2 \approx 1{,}62 \cdot 10^{-7}\upsilon^2$.

Следовательно, скорость образования обнажений $\upsilon$ при ведении горных работ может оказывать существенное влияние лишь при значении $\upsilon \geqslant 10^3$ м/с, т. е. при проведении выработок взрывным способом или при вывалообразовании.

**Вывод и решение интегральных уравнений.** Принимая во внимание произвол в выборе функций $A_{mn}(\alpha)$ и $B_{mn}(\alpha)$, $C_{mn}(\alpha)$ и $Д_{mn}(\alpha)$ $(m,n=1,2)$, положим

$$\begin{aligned}
&A_{nn}(\alpha)=(-1)^n A_n(\alpha)\cos\alpha a; \qquad C_{nn}(\alpha)=A_n(\alpha)\sin\alpha a;\\
&B_{11}(\alpha)=B_{21}(\alpha)=C_{21}(\alpha)=Д_{21}(\alpha)=0;\\
&A_{mn}(\alpha)=(-1)^{n-1}A_n(\alpha)\frac{\bar\sigma_{zz}^{(nn)}}{\bar\sigma_{zz}^{(mn)}}\cos\alpha a; \qquad C_{mn}(\alpha)=-A_n(\alpha)\frac{\bar\sigma_{zz}^{(nn)}}{\bar\sigma_{zz}^{(mn)}}\sin\alpha a,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $A_n(\alpha)$ $(n=1,2)$ — некоторые функции аргумента $\alpha$.

Внося полученные таким образом выражения компонент тензора напряжений $\sigma_{zz}$, $\sigma_{rz}$ и $\sigma_{rr}$ в условия на поверхности забоя (3) и на контуре выработки (2), приходим к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \alpha^2\{Д_{22}(\alpha)\cos\alpha a-B_{22}(\alpha)\sin\alpha a\}J_1(\alpha\beta_{32}r)\,d\alpha=0, \qquad r<1{,}0;\\
&\int_0^\infty \alpha^2\{(B_{22}(\alpha)\bar\sigma_{zz}^{(42)}+B_{12}(\alpha)\bar\sigma_{zz}^{(32)})\cos\alpha a+(Д_{22}(\alpha)\bar\sigma_{zz}^{(42)}-Д_{12}(\alpha)\bar\sigma_{zz}^{(32)})\sin\alpha a\}\times\\
&\qquad\times J_0(\alpha\beta_{32}r)d\alpha=-\lambda_0\gamma H\frac{\pi}{q_0}, \qquad z<1{,}0;\\
&\int_0^\infty\{[A_1(\alpha)\gamma_{31}\cos\alpha a+A_2(\alpha)\gamma_{41}\cos\alpha a-B_{12}(\alpha)\bar\sigma_{rr}^{(32)}-B_{22}(\alpha)\bar\sigma_{rr}^{(42)}]\cos\alpha z-\\
&\qquad-[A_1(\alpha)\gamma_{31}\sin\alpha a+A_2(\alpha)\gamma_{41}\sin\alpha a+Д_{12}(\alpha)\bar\sigma_{rr}^{(32)}+Д_{22}(\alpha)\bar\sigma_{rr}^{(42)}]\times\\
&\qquad\quad\times\sin\alpha z\}d\alpha=\gamma H, \qquad r=1; \qquad z<a;\\
&\int_0^\infty \alpha\{[A_1(\alpha)\gamma_{11}\cos\alpha a+A_2(\alpha)\gamma_{21}\cos\alpha a-B_{22}(\alpha)\bar\sigma_{rz}^{(42)}]\sin\alpha z+\\
&\qquad+[A_1(\alpha)\gamma_{11}\sin\alpha a-A_2(\alpha)\gamma_{21}\sin\alpha a+Д_{22}(\alpha)\bar\sigma_{rz}^{(42)}]\cos\alpha z\}d\alpha=0,\\
&r=1; \qquad z<a.
\end{aligned} \tag{9}$$

Полагая

$$\begin{aligned}
&B_{22}(\alpha)=\bar B_{22}(\alpha)\sin\alpha a+\bar Д_{22}(\alpha)\cos\alpha a-\left(\lambda_{10}\sin\frac{\alpha-1}{2}\alpha+\lambda_{20}(\alpha)\cos\frac{\alpha-1}{2}\alpha\right)B_0(\alpha);\\
&Д_{22}(\alpha)=\bar Д_{22}(\alpha)\sin\alpha a-\bar B_{22}(\alpha)\cos\alpha a+\left(\lambda_{10}\cos\frac{\alpha-1}{2}\alpha-\lambda_{20}(\alpha)\sin\frac{\alpha-1}{2}\alpha\right)Д_0(\alpha);\\
&B_{12}(\alpha)=\bar Д_{12}(\alpha)\sin\alpha a-\bar B_{12}(\alpha)\cos\alpha a; \qquad Д_{12}(\alpha)=\bar B_{12}(\alpha)\sin\alpha a+\bar Д_{12}(\alpha)\cos\alpha a,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\bar B_{mn}(\alpha)$ и $\bar Д_{mn}(\alpha)$, $B_0(\alpha)$ и $Д_0(\alpha)$ — вспомогательные функции аргумента $\alpha$, $\lambda_{10}$, $\lambda_{20}$, $\lambda_3$ — некоторые константы, и учитывая свойства функций Бесселя [4], в результате элементар-

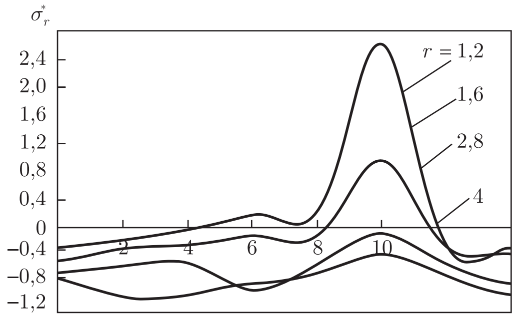


Рис. 2

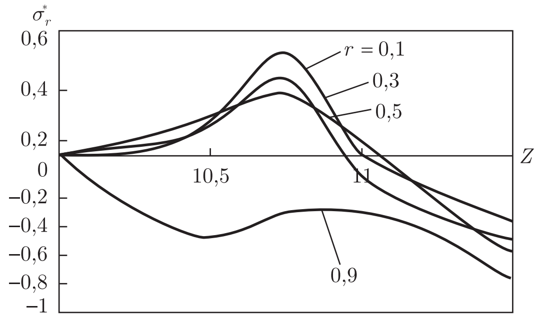


Рис. 3

ных, но громоздких преобразований система уравнений (9) сводится к двум интегральным уравнениям

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^1 \chi(\xi)\sin(\alpha\beta_{32}\xi)d\xi \right\} J_1(\alpha\beta_{32}\xi)\,d\xi = -\lambda_0\beta_{32}\gamma H r \frac{\pi}{2q_0},$$

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^a \chi_1(\xi)\sin\alpha\xi d\xi \right\} \frac{\sin\alpha z}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{q_0}\gamma H,$$

решение которых, как известно [5, 6], имеет вид $\chi(r) = -2\lambda_0\gamma H r\beta_{32}^2/q_0$

$$\chi_1(z) = -\frac{2}{\pi q_0}\gamma H \frac{d}{dz}\int_z^a \frac{dt}{\sqrt{t^2 - z^2}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\xi^2}{\sqrt{t^2-\xi^2}}d\xi = 2\gamma H q_0^{-1} z(a^2 - z^2)^{-1/2}.$$

Подставив найденные выражения (10) в (8) и возвращаясь к формулам для компонент вектора перемещений (7), а затем и тензора напряжений, решение рассматриваемой задачи получим в виде интегралов Фурье.

Численные исследования были выполнены для породного массива с коэффициентом Пуассона $\nu = 0{,}2$ при $a = 10$. На рис. 2, 3 показано распределение относительных радиальных $\sigma_r^* = \sigma_r/\gamma H$ и осевых $\sigma_z^* = \sigma_z/\gamma H$, где по вертикальной оси откладывались значения напряжений $\sigma_r^*$ и $\sigma_z^*$ в зависимости от $r$ и $z$.

Как видно, вблизи забоя выработки $z = a$ радиальные $\sigma_r$ и осевые $\sigma_z$ напряжения являются знакопеременными функциями, а вне зоны влияния забоя имеют место только сжимающие радиальные и осевые напряжения.

Таким образом, в процессе ведения проходческих работ в окрестности забоя выработки повсеместно возникает зона растягивающих напряжений, что может привести к образованию магистральных трещин, разделению массива на части, снижению взаимодействия между частями целого, потере способности противодействия горному давлению и, как следствие, к провоцированию процесса вывалообразования в полость выработки.


1. *Гузь А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок. – Киев: Наук. думка, 1977. – 204 с.
2. *Руппенейт К. В.* Деформируемость массивов трещиноватых горных пород. – Москва: Недра, 1975. – 224 с.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – Москва; Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674 с.

4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1180 с.
5. *Забрейко П. П. и др.* Интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 448 с.
6. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.



*Институт геотехнической механики*
*им. Н. С. Полякова НАН Украины, Днепропетровск*



*Поступило в редакцию 04.06.2011*



**В. Г. Перепелиця, О. М. Коломієць, Л. Д. Шматовський**


## Особливості напруженого стану гірського масиву в процесі проведення виробки


*У рамках механіки пружно-деформованого тіла розроблена методика та розв'язана задача про напружений стан гірського масиву навколо горизонтальної циліндричної виробки. Чисельними дослідженнями виявлено значну концентрацію розтягуючих напружень у зоні ведення гірничих робіт.*



**V. G. Perepelitsa, A. N. Kolomiets, L. D. Shmatovskiy**


## Peculiarities of the stressed state of a rock massif under conducting the mining working


*A method of research of the stressed state of a rock massif near the horizontal cylindrical working is developed, and a task of the mechanics of elastodeformed bodies is solved. A considerable concentration of tensile stresses in the mining working zone is revealed by numerical calculations.*