УДК 517.929

А. В. Шатырко

Качественный анализ систем регулирования нейтрального типа в условиях неопределенности с позиций функций Ляпунова

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С. И. Ляшко)

Доказаны достаточные условия абсолютной интервальной устойчивости решений нелинейных систем регулирования с отклоняющимся аргументом нейтрального типа как равномерной, так и неравномерной по запаздыванию. Построены оценки экспоненциального затухания решений. Аппаратом исследования выбран метод функций Ляпунова. Результаты представлены в виде конструктивных алгебраических матричных неравенств.

Рассматриваются нелинейные системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Математические модели, описывающие реально функционирующие обьекты, зачастую работают в условиях неопределенности. Они могут иметь как вероятностную, так и детерминированную природу. В нашем случае под неопределенностью понимается произвольность в выборе нелинейного регулирующего воздействия из заданного линейного сектора и интервальная неточность в выборе коэффициентов линейной части системы. Исследование поведения решений систем в подобной постановке получило название задач абсолютной интервальной устойчивости [1–3]. Одним из эффективных методов качественного анализа подобных систем является прямой метод Ляпунова. С учетом фактора отклонения аргумента естественной является работа в функциональных пространствах с построением функционалов Ляпунова–Красовского. Ряд интересных результатов в этом направлении представлен в работах [4–9]. Однако, с позиций прикладной математики, конструктивность этих результатов с вычислительной точки зрения не достаточна. В настоящей работе предпринята попытка устранить предыдущие недостатки путем применения функций Ляпунова для получения достаточных условий устойчивости и построения оценок решений в конечномерных пространствах.

Абсолютная интервальная равномерная устойчивость. В работе [4] автором начато изучение систем нелинейных дифференциально-разностных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t-\tau)] = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma(t)), \qquad \sigma(t) = c^\top x(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t-\tau)] = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t-\tau) + bf(\sigma(t)),\\ \sigma(t) = c^\top x(t), \qquad t \geqslant 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, A, B, D — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами; $b, c \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание; $f(\sigma)$ — непрерывная нелинейная Липшицева функция, $f(0) = 0$, удовлетворяющая "условиям сектора"

$$[k\sigma - f(\sigma)]\sigma > 0, \qquad k > 0, \tag{3}$$

$\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}$, $\Delta B = \{\Delta b_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, — матрицы с коэффициентами, принимающими свои значения из некоторых фиксированных интервалов

$$|\Delta a_{ij}| \leqslant \alpha_{ij}, \qquad |\Delta b_{ij}| \leqslant \beta_{ij}, \qquad i, j = \overline{1, n}. \tag{4}$$

В работах [5, 7] для систем (1), (2) получены достаточные условия абсолютной устойчивости и оценки на поведение их решений. Все результаты получены с применением функционалов Ляпунова–Красовского в бесконечномерных функциональных пространствах. Данный факт усложняет применение этих результатов с точки зрения прикладной математики. Используя терминологию, определения абсолютной и интервальной устойчивости, введенные нормы и обозначения работ [4–9], продолжим исследования систем (1), (2).

Для исследования абсолютной интервальной устойчивости будем применять конечномерную функцию Ляпунова вида Лурье–Постникова [1, 2] с экспоненциальным множителем

$$V(x, t) = e^{\gamma t}\left\{x^\top H x + \beta \int\limits_0^{\sigma(x)} f(\sigma)\, d\sigma\right\} \tag{5}$$

и с положительно определенной матрицей H. Для нее справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$e^{\gamma t}\lambda_{\min}(H)|x|^2 \leqslant V(x, t) \leqslant e^{\gamma t}\overline{\lambda}_{\max}(H, \beta)|x|^2, \qquad \overline{\lambda}_{\max}(H, \beta) = \lambda_{\max}(H) + \frac{1}{2}\beta k|c|^2. \tag{6}$$

Для проведения дальнейших исследований в конечномерных пространствах существенным является использование условий Б. С. Разумихина [10, 11] при построении оценки полной производной функции $V(x, t)$ вдоль решений системы.

Будем считать, что система без отклонения аргумента

$$\frac{d}{dt}(I - D)x(t) = (A + B)x(t) + bf(\sigma(t)), \qquad \sigma(t) = c^\top x(t), \qquad t \geqslant 0$$

асимптотически устойчива.

Обозначим

$$\varphi(H, \beta) = \frac{\overline{\lambda}_{\max}(H, \beta)}{\lambda_{\min}(H)},$$

$$S_1[H, \beta, \nu, \gamma] = \begin{bmatrix} S_{11}^0 - \frac{1}{1}\gamma\beta k^2 & S_{12}^0 + \frac{1}{2}\nu c \\ (S_{12}^0)^\top + \frac{1}{2}\nu c^\top & S_{22}^0 + \frac{1}{k}\nu \end{bmatrix}, \qquad S_0[H, \beta, \gamma] = \begin{bmatrix} S_{11}^0 & S_{12}^0 \\ (S_{12}^0)^\top & S_{22}^0 \end{bmatrix},$$

$$S_{11}^0 = -\gamma H - [(I - D)^{-1}(A + B)]^\top H - H[(I - D)^{-1}(A + B)],$$

$$S_{12}^0 = -H[(I - D)^{-1}b] - \frac{1}{2}\beta(A + B)c, \qquad S_{22}^0 = -\beta c^\top (I - D)^{-1}b,$$

$$R_1(B, D) = \{2[|HB(I - D)^{-1}| + |HD(I - D)^{-1}|k] + \beta k|c|[|c^\top (I - D)^{-1}B| + \\ + |c^\top (I - D)^{-1}|K]\}[1 + e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H, \beta)}],$$

$$R_2(B, D) = 2(1 + D)[|HD(I - D)^{-1}| + \beta k|c||c^\top (I - D)^{-1}D|], \tag{7}$$

$$L_1(\cdot) = \frac{2|HD(I-D)^{-1}| + \beta k|c||c^\top (I-D)^{-1}D|}{1-|D|}[1 + e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}] +$$

$$+ \beta k|c||c^\top H(I-D)^{-1}|,$$

$$L_2(\cdot) = \left[\frac{2|HD(I-D)^{-1}D| + \beta k|c||c^\top (I-D)^{-1}D|}{1-|D|} + \beta k|c||c^\top (I-D)^{-1}| +\right.$$

$$\left. + 2|H(I-D)^{-1}|\right][1 + e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}] + \beta k|c||c^\top H(I-D)^{-1}|$$

$$L_3(\cdot) = 2(1+|D|)[2|HD(I-D)^{-1}| + \beta k|c||c^\top (I-D)^{-1}D|],$$

$$\widetilde{M}[\cdot] = (1-\alpha_1-\alpha_2)\{\lambda_{\min}(S_1[H,\beta,\nu,\gamma]) - R_1(B,D)\}, \qquad N[\cdot] = \frac{R_2(B,D)}{|D|}\|\dot{x}(0)\|_\tau,$$

$$\alpha_1 > 0, \qquad \alpha_2 > 0, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 < 1, \qquad \theta = \gamma - \frac{1}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}.$$

Приведем утверждение об интервальной абсолютной устойчивости системы (1) и получим, соответственно, оценки сходимости решений системы (2).

Теорема 1. *Пусть $|D| < 1$ и существует положительно определенная матрица H и параметры $\beta > 0$, $\nu > 0$, $0 < \gamma < \dfrac{1}{\tau}\ln\dfrac{1}{|D|}$, при которых выполняется неравенство*

$$\lambda_{\min}(S_1[H,\beta,\nu,\gamma]) - R_1(B,D) > 0, \tag{8}$$

а "возмущенные" матрицы удовлетворяют соотношениям

$$|\Delta A| < \alpha_1\frac{\widetilde{M}[\cdot]}{L_1(\cdot)}, \qquad |\Delta B| < \alpha_2\frac{\widetilde{M}[\cdot]}{L_2(\cdot)}, \qquad \alpha_1 > 0, \qquad \alpha_2 > 0, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 < 1. \tag{9}$$

Тогда система (1) абсолютно интервально устойчива в метрике C^1 при произвольном $\tau > 0$. Причем для произвольного решения $x(t)$, $t > 0$ системы (2) справедлива следующая оценка сходимости:

$$|x(t)| \leqslant \sqrt{\varphi(H,\beta)}\|x(0)\|_\tau \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{M}[\cdot]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)t\right\} + \frac{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\lambda_{\min}(H)} \times$$

$$\times \frac{\widetilde{N}[\cdot]}{\widetilde{M}[\cdot] + (2\theta-\gamma)\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}\left[\exp\{(\theta-\gamma)t\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{M}[\cdot]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)t\right\}\right], \tag{10}$$

а для его производной —

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \left[\|\dot{x}(0)\|_\tau + \frac{|B|}{|D|}\|x(0)\|_\tau\right]e^{-\frac{t}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}} + \left[|A| + \frac{k|b||c| + |DA+B| + |\Delta A| + |\Delta B|}{1-|D|}\right] \times$$

$$\times \sqrt{\varphi(H,\beta)}\|x(0)\|_\tau \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{M}[\cdot]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)t\right\} + \frac{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\lambda_{\min}(H)} \times$$

$$\times \frac{\widetilde{N}[\cdot]}{\widetilde{M}[\cdot] + (2\theta+\gamma)\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}\left[e^{(\theta-\gamma)t} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{M}[\cdot]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)t\right\}\right]. \tag{11}$$

Замечание 1. В теореме 1 получены условия равномерной по запаздыванию абсолютной устойчивости. Поэтому эти условия накладывают очень строгие ограничения (9) на матрицу B.

Абсолютная интервальная неравномерная устойчивость. Можно получить ослабленные условия абсолютной интервальной устойчивости, т. е. такие, которые будут сохраняться при величине отклонения аргумента, не превосходящей критическую. При этом значение этой величины удается четко определить через параметры системы.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}
S_1[H,\beta,\nu,\gamma] = \begin{bmatrix} S_{11}^0 - \dfrac{1}{2}\gamma\beta k^2 & S_{12}^0 + \dfrac{1}{2}\nu c \\ (S_{12}^0)^\top + \dfrac{1}{2}\nu c^\top & S_{22}^0 + \dfrac{\nu}{k} \end{bmatrix}, \qquad S_0 = \begin{bmatrix} S_{11}^0 & S_{12}^0 \\ (S_{12}^0)^\top & S_{22}^0 \end{bmatrix}, \\
S_{11}^0 = -\gamma H - [(I-D)^{-1}(A+B)]^\top H - H[(I-D)^{-1}(A+B)], \\
S_{12}^0 = -H[(I-D)^{-1}b] - \frac{1}{2}\beta(I-D)^{-1}(A+C)c, \qquad S_{22}^0 = -\beta c^\top (I-D)^{-1}b.
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}
R_1(B) = 2|HB(I-D)^{-1}| + \beta k|c||c^\top (I-D)^{-1}B|, \\
R_2(D) = 2|HD(I-D)^{-1}| + \beta k|c||c^\top (I-D)^{-1}D|, \\
Q_1(B,D,\tau) = [R_1(B) + 2KR_2(D)]\frac{\varphi(H,\beta)}{1-|D|}\tau, \\
Q_2(B,D,\tau) = [R_1(B) + 2KR_2(D)]\frac{\varphi(H,\beta)}{1-|D|}\tau + L[1 + K\sqrt{\varphi(H,\beta)}\tau], \\
Q_{11}(D,\tau) = \frac{R_2(D)}{(1-|D|)^2}\sqrt{\varphi(H,\beta)}\tau, \\
Q_{12}(D,\tau) = \left[\frac{2R_2(D)}{(1-|D|)^2} + \frac{R_3(D)}{1-|D|}\right]\sqrt{\varphi(H,\beta)}\tau, \\
Q_{22}(D,\tau) = \left[\frac{R_2(D)}{(1-|D|)^2} + \frac{R_3(D)}{1-|D|}\right]\sqrt{\varphi(H,\beta)}\tau, \\
G_1(B,D,\tau,\alpha) = \alpha Q_1(B,D,\tau) + (1-\alpha)Q_2(B,D,\tau), \\
G_2(D,\tau,\alpha) = \alpha^2 Q_{11}(D,\tau) + \alpha(1-\alpha)Q_{12}(D,\tau) + (1-\alpha)^2 Q_{22}(D,\tau), \\
M[\cdot] = (1-\xi)\lambda_{\min}(S[H,\beta,\nu,\gamma]) - [\alpha Q_1(B,D,\tau) + (1-\alpha)Q_2(B,D,\tau)]\Delta - \\
- [\alpha^2 Q_{11}(D,\tau) + \alpha(1-\alpha)Q_{12}(D,\tau) + (1-\alpha)^2 Q_{22}(D,\tau)]\Delta^2, \\
N[\cdot] = \frac{2(1+|D|)}{|D|}\{[R_1(B) + R_2(D)K]\|x(0)\|_\tau + R_2(D)\|\dot{x}(0)\|_\tau\}, \\
\xi = \frac{\tau}{\tau_0}, \qquad \theta = \gamma - \frac{1}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}, \qquad L = |A| + |b||c|k.
\end{gathered} \tag{13}$$

Приведем утверждение об абсолютной неравномерной интервальной устойчивости нулевого решения системы (1) и, соответственно, оценки сходимости решений системы (2).

Теорема 2. *Пусть* $|D| < 1$, *и существует положительно определенная матрица* H *и параметры* $\beta > 0$, $\nu > 0$, $0 < \gamma < \dfrac{1}{\tau}\ln\dfrac{1}{|D|}$, *при которых матрица* $S_1[H,\beta,\nu,\gamma]$ *также положительно определенная. Тогда при* $\tau < \tau_0$, *где*

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(S_1[H,\beta,\nu,\gamma])}{K[R_1(B) + R_2(D)K]\sqrt{\varphi(H,\beta)}}, \tag{14}$$

и

$$|\Delta A| < \alpha\Delta, \qquad |\Delta B| < (1-\alpha)\Delta, \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad 0 < \Delta < \Delta_0, \tag{15}$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{2}\sqrt{G_1^2(B,D,\tau,\alpha) + 4(1-\xi)\lambda_{\min}(S[H,\beta,\nu,\gamma])G_2(D,\tau,\alpha)} - \frac{1}{2}G_1(B,D,\tau,\alpha), \tag{16}$$

нулевое решение системы (1) *абсолютно интервально устойчиво в метрике* C^1. *Причем для произвольного решения* $x(t)$, $t > 0$ *справедлива оценка сходимости*

$$\begin{gathered}|x(t)| \leqslant \sqrt{\varphi(H,\beta)}(1+|D|+|B\tau|)\|x(0)\|_\tau \exp\left\{L\tau - \frac{1}{2}\left(\frac{M[\cdot]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)(t-\tau)\right\} + \\ + \frac{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\lambda_{\min}(H)}\frac{N[\cdot]}{M + (2\theta-\gamma)\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} \times \\ \times \left[\exp\{(\theta-\gamma)t\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{M[\cdot]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)(t-\tau) + (\theta-\gamma)\tau\right\}\right],\end{gathered} \tag{17}$$

а для его производной —

$$\begin{gathered}|\dot{x}(t)| \leqslant \left[\|\dot{x}(0)\|_\tau + \frac{|B|}{|D|}\|x(0)\|_\tau\right]e^{-\frac{t}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}} + \left[|A| + \frac{k|b||c| + |DA+B|}{1-|D|}\right] \times \\ \times \left\{\sqrt{\varphi(H,\beta)}(1+|D|+|B|\tau)\|x(0)\|_\tau \exp\left\{L\tau - \frac{1}{2}\left(\frac{M[\cdot]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)(t-\tau)\right\} + \right. \\ + \frac{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\lambda_{\min}(H)}\frac{N[\cdot]}{M + (2\theta-\gamma)\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} \times \\ \left. \times \left[\exp\{(\theta-\gamma)t\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{M[\cdot]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)(t-\tau) + (\theta-\gamma)\tau\right\}\right]\right\}.\end{gathered} \tag{18}$$

Замечание 2. В условиях абсолютной устойчивости, сформулированных в теоремах 1 и 2, требуется существования положительно определенной матрицы H и параметров $\beta > 0$, $\nu > 0$, $0 < \gamma < 1/\tau\ln 1/|D|$, при которых разность $\lambda_1(S_1[H,\beta,\nu,\gamma]) - R_1(B,D)$ либо матрица $S_1[H,\beta,\nu,\gamma]$ также положительно определенная. В теореме 2 вычислено значение критического отклонения аргумента $\tau < \tau_0$ (14). Нахождение конструктивных значений этих величин переходит в отдельную задачу нелинейной оптимизации.

1. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1951. – 251 с.
2. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 261 с.

3. *Liao X., Yu. P.* Absolute stability of nonlinear control systems. – New York: Springer Science + Business Media B. V., 2008. – 390 p.
4. *Шатырко А. В.* Абсолютная интервальная устойчивость систем регулирования нейтрального типа // Доп. НАН України. – 2011. – № 2. – С. 18–23.
5. *Шатирко А. В., Хусаінов Д. Я.* Дослідження інтервальної стійкості диференціальних систем регулювання із запізненням за допомогою функціоналів Ляпунова–Красовського // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 3. – С. 212–221.
6. *Шатирко А. В., Хусаінов Д. Я.* Отримання умов абсолютної стійкості систем непрямого регулювання методом функціоналів Ляпунова–Красовського // Там само. – 2009. – Вип. 4. – С. 145–152.
7. *Шатирко А. В., Хусаінов Д. Я.* Абсолютна інтервальна стійкість диференціальних систем регулювання нейтрального типу // Пробл. динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 3. – С. 232–247.
8. *Шатырко А. В., Хусаинов Д. Я.* Абсолютная интервальная устойчивость систем непрямого регулирования нейтрального типа // Междунар. науч.-техн. журн. "Пробл. управления и информатики". – 2009. – № 3. – С. 5–16.
9. *Шатырко А. В., Хусаинов Д. Я., Диблик И. и др.* Оценки возмущений интервальных нелинейных систем непрямого регулирования нейтрального типа // Там же. – 2011. – № 1. – С. 15–29.
10. *Разумихин Б. С.* Устойчивость эредитарных систем. – Москва: Наука, 1988. – 112 с.
11. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**, № 4. – С. 500–512.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 01.06.2011

А. В. Шатирко

Якісний аналіз систем регулювання нейтрального типу в умовах невизначеності з позицій функцій Ляпунова

Доведено достатні умови абсолютної інтервальної стійкості розв'язків нелінійних систем регулювання з відхиленням аргументу нейтрального типу як рівномірної, так і нерівномірної за запізнюванням. Побудовано оцінки експоненціального затухання розв'язків. Апаратом дослідження обрано метод функцій Ляпунова. Результати наведено у вигляді конструктивних алгебраїчних матричних нерівностей.

A. V. Shatyrko

Qualitative analysis of neutral type control systems under uncertainties from positions of Lyapunov's functions

Sufficient conditions for the absolute interval stability of solutions of nonlinear control systems with neutral type time-delay, both uniform and irregular by delay, are proved. Estimates of the exponential decay of solutions are constructed. Results are presented in terms of constructive algebraic matrix inequalities, by using the Lyapunov function method.