УДК 517.927.6

В. В. Листопадова

Про одну багатоточкову задачу для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу і параметрами

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Обгрунтовано метод зведення багатоточкової задачі для диференціальних рівнянь з параметрами до рівносильного інтегрального рівняння. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку даної задачі.

Ряд важливих задач різних областей сучасної науки і техніки приводять до багатоточкових задач для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, які містять параметри. Такі задачі ще недостатньо вивчені. У даному повідомленні обгрунтовано метод зведення багатоточкової задачі до інтегрального рівняння і встановлено умови існування та єдиності розв'язку.

Нехай необхідно знайти функцію $y(x) \in W_2^2(a,b)$ і параметри $\lambda \in \mathbb{R}^l$, які задовольняють рівняння

$$y^{(m)}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} g_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} d_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x-\Delta) = f(x) + c(x)\lambda, \quad x \in (a,b), \quad (1)$$

і додаткові умови

$$y(x_s) = \alpha_s, \qquad \alpha_s \in R, \qquad s = \overline{1,p}, \qquad a = x_1 < x_2 < \dots < x_s < \dots < x_p = b, \quad (2)$$

$$y(x-\Delta) = y'(x-\Delta) = \dots = y^{(m-1)}(x-\Delta) = 0, \qquad x \in (a,c), \qquad c = a+\Delta, \quad (3)$$

де Δ — постійне запізнення, $\Delta > 0$, $c(x)\lambda$ — скалярний добуток вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ і неперервної на (a,b) вектор-функції $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_l(x))$, $l = p - m$.

Припустимо, що функції $g_\tau(x)$, $d_\tau(x)$, $\tau = \overline{1,m}$, є неперервними на (a,b), $f \in L_2(a,b)$.

Розглянемо оператор L, який визначимо формулою

$$(Ly)(x) = y^{(m)}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} g_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x) + \begin{cases} 0, & x \in (a,c), \qquad c = a+\Delta, \\ \sum\limits_{\tau=1}^{m} d_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x-\Delta), & x \in [c,b). \end{cases}$$

Тоді задачу (1)–(3) можна записати у вигляді

$$(Ly)(x) = f(x) + c(x)\lambda, \qquad y(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}. \quad (4)$$

Нехай

$$\begin{aligned} &(Ay)(x) = y^{(m)}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} a_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x), \\ &(By)(x) = (Ay)(x) - (Ly)(x), \end{aligned} \quad (5)$$

де $a_\tau(x)$, $\tau = \overline{1,m}$, — неперервні на (a,b) функції, які підбираються так, щоб задача

$$(Av)(x) = 0, \qquad v(x_s) = 0, \qquad s = \overline{1,p}, \tag{6}$$

мала тільки тривіальний розв'язок.

На основі формул (4), (5) задача (1)–(3) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &(Ay)(x) = f(x) + c(x)\lambda + (By)(x), \\ &y(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}, \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$(By)(x) = \sum_{\tau=1}^{m} r_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x) - \begin{cases} 0, & x \in (a,c), \\ \sum\limits_{\tau=1}^{m} d_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x-\Delta), & x \in [c,b), \end{cases} \tag{8}$$

$$r_\tau(x) = a_\tau(x) - g_\tau(x), \qquad \tau = \overline{1,m}.$$

Задачу (7) при введених припущеннях можна звести до рівносильного інтегрального рівняння. Для цього зробимо заміну

$$(Ay)(x) = u(x), \qquad y(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}. \tag{9}$$

Оскільки за припущенням задача (6) має тільки тривіальний розв'язок, то існує функція Гріна $G(x,t)$, за допомогою якої розв'язок задачі (9) можна записати в явному вигляді

$$y(x) = h(x) + \int_a^b G(x,t) u(t)\, dt, \tag{10}$$

де $h(x)$ — розв'язок задачі

$$(Ah)(x) = 0, \qquad h(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}. \tag{11}$$

Зазначимо, що при $x \in (c,b)$ і $t \in (a,b)$ $(x-\Delta) \in (a, b-\Delta)$, тому функція $G(x-\Delta,t)$ визначена і

$$y(x-\Delta) = h(x-\Delta) + \int_a^b G(x-\Delta,t) u(t)\, dt, \qquad x \in (c,b). \tag{12}$$

Підставивши вирази (9)–(12) в (7) і врахувавши позначення (8), одержимо інтегральне рівняння

$$u(x) = l(x) + c(x)\lambda + \int_a^b K(x,t) u(t)\, dt, \tag{13}$$

з умовами для визначення параметра λ

$$\int_a^b G(x_s,t) u(t)\, dt = \alpha_s - h(x_s), \qquad s = \overline{2,p-1}, \tag{14}$$

де

$$l(x) = f(x) + (Bh)(x), \tag{15}$$

$$K(x,t) = \sum_{\tau=1}^{m} r_\tau(x) G^{(m-\tau)}(x) - \begin{cases} 0, \quad x \in (a,c), \\ \sum\limits_{\tau=1}^{m} d_\tau(x) G^{(m-\tau)}(x-\Delta, t), \ x \in [c,b), \ t \in (a,b). \end{cases} \tag{16}$$

Виключимо параметр λ з інтегрального рівняння (13). Для цього підставимо співвідношення (13) в (14), у результаті чого одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення параметра λ:

$$C\lambda = q, \tag{17}$$

в якій

$$C = \{c_{s\tau}\}, \qquad s = \overline{1,l}, \qquad \tau = \overline{1,l},$$

$$c_{s\tau} = \int_a^b G(x_{s+1}, t) c_\tau(t)\, dt,$$

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_l),$$

$$q_s = \alpha_{s+1} - h(x_{s+1}) - \int_a^b G(x_{s+1}, t) l(t)\, dt - \int_a^b \int_a^b G(x_{s+1}, t) K(t, \xi) u(\xi)\, d\xi dt, \qquad s = \overline{1,l}.$$

Нехай визначник матриці C відмінний від нуля. Отже, існує обернена матриця C^{-1}, за допомогою якої знаходимо

$$\lambda = C^{-1} q. \tag{18}$$

Підставивши співвідношення (18) в (13), одержимо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x) = g(x) + \int_a^b M(x,t) u(t)\, dt, \tag{19}$$

де

$$g(x) = l(x) + c(x) C^{-1} p, \tag{20}$$

$$M(x,t) = K(x,t) + c(x) C^{-1} D(t), \tag{21}$$

p, $D(t)$ — вектор і вектор-функція відповідно, компоненти яких мають вигляд

$$p_s = \alpha_{s+1} - h(x_{s+1}) - \int_a^b G(x_{s+1}, t) l(t)\, dt, \tag{22}$$

$$D_s(t) = -\int\limits_a^b G(x_{s+1}, \xi) K(\xi, t) d\xi, \qquad s = \overline{1, l}. \tag{23}$$

При зроблених припущеннях і властивостях функції Гріна із формул (16), (21), (23) випливає справедливість співвідношення

$$\rho^2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b M^2(x,t)\, dxdt < \infty. \tag{24}$$

Отже, інтегральний оператор

$$(Mu)(x) = \int\limits_a^b M(x,t) u(t)\, dt \tag{25}$$

відображає простір $L_2(a,b)$ в себе і є цілком неперервним. Із зроблених припущень і формул (20), (15) очевидно, що $g \in L_2(a,b)$.

Таким чином, задача (1)–(3) рівносильна інтегральному рівнянню Фредгольма (19), умови існування і єдиності розв'язку якого достатньо вивчені [1–3]. Отже, виконується таке твердження.

Теорема. *Якщо одиниця — регулярне значення інтегрального оператора* (26), *то задача* (1)–(3) *має єдиний розв'язок* $y^* \in L_2(a,b)$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^l$ *при довільній функції* $f \in L_2(a,b)$.

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.
2. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 456 с.
3. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 30.06.2011

В. В. Листопадова

Об одной многоточечной задаче для дифференциальных уравнений с отклонением аргумента и параметрами

Обоснован метод сведения многоточечной задачи для дифференциальных уравнений с параметрами к равносильному интегральному уравнению. Установлены условия существования и единственности решения данной задачи.

V. V. Listopadova

On one multipoint problem for differential equations with deviating argument and parameters

The multipoint problem for a differential equation with parameters is stated to be equivalent to an integral equation. The conditions of existence and uniqueness of solutions of this problem are established.