

Становлення нелінійної механіки в Україні (30-ті роки ХХ ст.)

Показано внесок академіків М.М. Крилова і М.М. Боголюбова, а також Ю.О. Митропольського у розвиток нелінійної механіки.

Більшість реально існуючих у природі коливань нелінійні. Це коливання у фізичних системах, які описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями. Одним з найефективніших способів дослідження нелінійних коливань є метод асимптотичних розкладів за степенями малого параметра. Він являє собою обґрунтування, узагальнення методу малого параметра, який зароджується в останній чверті XVIII ст. в астрономії.

У зв'язку з відкриттям малих планет виникла задача про рух трьох тіл (третя велика задача, або задача трьох тіл). У першій книзі «Начал» (1686) І.Ньютон ставить задачу про рух багатьох тіл, розглядає простіший випадок цієї задачі — задачу трьох тіл [1, с. 224—240]. Вона полягає у вивченні збурених рухів двох планет навколо Сонця під дією сили взаємного притягання.

Цю задачу досліджували Л.Ейлер, Ж.Лагранж, К.Гаусс, С.Пуассон. Вони розглядали рухи, що описуються диференціальними рівняннями з малим параметром, при нульовому значенні якого ці рівняння перетворюються в рівняння задачі двох тіл, котрі є лінійними та інтегруються. Ці дослідники шукали розв'язок диференціальних рівнянь у формі розкладання в тригонометричні ряди за степенями малого параметра, які містили вікові члени, інтенсивність котрих швидко зростає з часом. Тому астрономи знаходили два—три члени ряду, що було достатнім для практичних цілей.

У XIX ст. продовжували розвивати метод малого параметра М.В.Острогра-

дський, К.Вейерштрасс, А.Ліндстедт, Дж. Релей, А.Пуанкаре.

Наприкінці XIX ст. були створені також якісні методи дослідження нелінійних диференціальних рівнянь. Перевага якісних методів перед методом малого параметра полягає в їх точності, в математичній обґрунтованості. А.Пуанкаре у працях «Про криві, які визначаються диференціальними рівняннями» (1885) і «Нові методи небесної механіки» (1892—1899) запропонував визначати характер руху за видом правої частини диференціального рівняння, не інтегруючи його, та з множини інтегральних кривих знаходити криві, які відповідають періодичним розв'язкам [2, 3]. Він розробив метод визначення цих кривих — геометричний метод якісного опису руху в фазовому просторі. О.М.Ляпунов продовжував розвивати якісні методи. Одним із його основних результатів є з'ясування поведінки інтегральних кривих рівнянь руху поблизу положення рівноваги.

Якісні методи в їх початковому формулюванні не були простими для практичного застосування. Завдяки школі Л.І.Мандельштама якісні методи до початку 30-х років ХХ ст. знайшли широке застосування в теорії коливань для вивчення тільки суто періодичних режимів.

Наприкінці 20-х років ХХ ст., крім методу малого параметра і якісних методів, існували інші методи розв'язування нелінійних задач — метод лінеаризації, квазілінійні методи, метод Вандер-Поля та ін. Ці методи часто призводили до грубих помилок не тільки кіль-

кісного, але і якісного характеру, вони не були достатньо розроблені та обґрунтовані. Зокрема, метод лінеаризації, який полягає в тому, що малі нелінійні члени диференціального рівняння відкидаються без обґрунтування, застосовували для визначення амплітуди стаціонарних коливань в електронному генераторі, дослідження резонансів поділу частоти, явища асинхронного збудження. Метод Ван-дер-Поля (метод «повільно змінюваних коефіцієнтів»), який подібний до методу варіації довільної сталої, як і метод лінеаризації, дозволяє знаходити лише перше наближення, коливання розглядалися або як гармонічні з постійними амплітудами і фазами (стаціонарні режими), або як коливання з повільно змінюваними амплітудами і фазами (процеси становлення). В інженерній практиці застосовувався квазілінійний метод, який теж давав тільки перше наближення. Він полягає в пристосуванні лінійних методів до нелінійних задач, заміні нелінійних членів рівняння лінійними. Його можна застосувати для дослідження деяких явищ нелінійного резонансу, наприклад синхронізації, демультіплікації. Цим методом не можна досліджувати проблеми, де треба розглядати наближення вищих порядків, зокрема обчислювати власну частоту електронного генератора. Для якісного й кількісного вивчення процесів, що не є суто періодичними (так званих квазіперіодичних і майже періодичних), потрібні були нові методи. П.Боль (1906) намагався поширити якісні методи на більш широкий клас квазіперіодичних розв'язків, однак доведення його громіздкі та їм бракує наочності.

Наступне розширення застосування методу малого параметру та новий підхід до нього, розроблення методів, придатних для вивчення як періодичних, так і квазіперіодичних режимів, формування нової гілки теорії нелінійних коливань, яка розвивається незалежно від шкіл Л.І.Мандельштама та О.О.Андропова,

пов'язані з іменами видатних українських вчених М.М.Крилова та М.М.Боголюбова. З 1932 по 1937 р. ними опубліковано більше 30 спільних праць, присвячених розв'язанню проблем, що стосуються нелінійних коливань. Асимптотичні методи розв'язання нелінійних задач М.М.Крилов і М.М.Боголюбов розробляли на кафедрі математичної фізики при Інституті будівельної механіки АН УРСР, потім у відділі нелінійної механіки цього ж інституту, з 1950 р. — у відділі математичної фізики в Інституті математики АН УРСР.

Проблемою коливань, зокрема дослідженням нелінійних рівнянь, М.М.Крилов зацікавився в 1908 р. Відвідавши у 1908 р. лекції А.Пікара в Сорбонні, він звернув увагу на нелінійні рівняння. У 1909 р. М.М.Крилов опублікував першу працю з дослідження коливань «Про проблему поперечних коливань пружного стержня», в 1910 р. ще дві праці [4, с. 64—65].

На початку 1932 р. в Парижі з ініціати-ви Ван-дер-Поля відбулася конференція з нелінійних коливань, на яку М.М.Крилов і М.М.Боголюбов одержали спеціальне запрошення для доповіді про одержані ними результати в галузі нелінійної механіки. Метою цієї конференції було встановити нові методи, придатні для дослідження як періодичних, так і квазіперіодичних коливань. У надрукованих 3 повідомленнях М.М.Крилов і М.М.Боголюбов дослідили квазіперіодичні режими, які виникають в електронному генераторі під дією зовнішньої періодичної сили. Були також представлені результати дослідження складних явищ резонансу нелінійних систем. Розвиток цих результатів сприяв появі першої спільної монографії М.М.Крилова та М.М.Боголюбова з нелінійних коливань «Нові методи нелінійної механіки» (1934), яка була подана в редакцію 1932 р. На конференції з нелінійних коливань 1933 р. у Парижі Ван-дер-Поль високо оцінив праці українських вчених у новій галузі математичної фізики [4, с. 66—67].

За допомогою асимптотичних розкладів стало можливим будувати не тільки перше, але й вищі наближення; отримувати формули, досить зручні для практичних обчислень.

Про результати застосування нових методів нелінійної механіки до питання про поздовжню стійкість літака при постійному куті атаки з врахуванням лобового опору повітря М.М.Крилов та М.М.Боголюбов доповіли на III Всесоюзній конференції по аеродинаміці в Москві. Вперше нові асимптотичні методи було викладено у надрукованій в 1932 р. їх спільній монографії «Дослідження поздовжньої стійкості аероплану» [5]. Цього року на замовлення Харківського авіаційного інституту за допомогою цього математичного апарату досліджено поздовжню стійкість літака.

У дослідних інститутах, на різних заводах вивчались стійкість паралельної роботи електричних машин, коливання будівельних конструкцій, коливання і стійкість стержнів. В Інституті транспортної механіки досліджувалися проблеми, пов'язані з вібраціями в локомотиві та вагонах під час руху потягу та поздовжні коливання, які виникали в різних експлуатаційних умовах. Інститут електрозварювання працював над вивченням роботи зварних балок, в Інституті технічної механіки проводилися дослідження міцності деталей металевих конструкцій, які знаходилися під впливом вібраційних навантажень. У грудні 1934 р. Інститут технічної механіки, Інститут електрозварювання та Інститут транспортної механіки провели конференцію, на якій зроблена спроба узагальнити досвід роботи у напрямку проблем коливань та динаміки конструкцій. У рішеннях конференції перед кафедрою математичної фізики було поставлено ряд конкретних проблем, які необхідно було швидко і детально вивчити. Вказувалось, що праці кафедри математичної фізики мали винятково принципове значення в напрямку розробки основ нелінійної механіки, що забезпечує тео-

ретичну основу для інженерних розрахунків коливальних систем. Проте на Другому всесоюзному математичному з'їзді (Ленінград, 24—30 червня 1934 р.) А.А.Марков зробив спробу довести непридатність для практичних цілей і помилковість праць кафедри математичної фізики. У доповіді «Про теорію стаціонарних коливальних процесів академіка М.М.Крилова та доктора М.М.Боголюбова» він вказав на помилковість з математичної точки зору досліджень українських вчених, викладених в монографії «Дослідження поздовжньої стійкості аероплану».

На це зауваження М.М.Крилов та М.М.Боголюбов дали чітку відповідь: «...ми зовсім не розглядали в нашій монографії питання збіжності розкладів, розв'язки, про які йде мова у вказаних двох твердженнях, є, за загальноприйнятою термінологією, формальними розв'язками, причому, зрозуміло, ці формальні розв'язки, як про це буде написано далі, цілком застосовні лише в нерезонансному випадку».

Ці формальні розв'язки будуть співпадати з точними при умові збіжності відповідних розкладів.

Проте А.А.Марков в своїй доповіді, хоча і відмічає відсутність в нашій монографії доведення збіжності, проте довільно вважає, що вищезгадані наші результати відносяться не до формальних, а до точних» [6, с. 91].

Це й було причиною тих висновків, до яких прийшов А.А.Марков. М.М.Крилов та М.М.Боголюбов довели, що зауваження А.А.Маркова стосовно існування точок розбіжності даних рядів не має ніякого значення для практичного застосування цього методу [6, с. 99].

У доповіді «Основні проблеми нелінійної механіки» 12 січня 1934 року на засіданні сесії Всеукраїнської академії наук М.М.Крилов і М.М.Боголюбов вказують, що «А.Пуанкаре і О.М.Ляпунов повинні розглядатися як засновники цього нового розділу механіки, який, як ми вважаємо, треба б назвати нелі-

нійною механікою і метою якої є створення загальної теорії нелінійних коливань» [7, с. 85]. Вони обґрунтовують необхідність розробки нових методів для дослідження нелінійних коливань. Ці дослідження «покладають основу нелінійної механіки... нової галузі математичної фізики, яка зразу застосовується до всіх тих галузей науки, де досліджуються нелінійні коливання» [7, с. 87].

У монографії «Про деякі формальні розклади нелінійної механіки» (1934) М.М.Крилов та М.М.Боголюбов узагальнили асимптотичні методи для обчислення нестационарних розв'язків коливальних систем з багатьма степенями вільності [8, с. 56—62]. Це такі системи, багато параметрів яких, наприклад власні частоти, коефіцієнти тертя, ефективні маси системи тощо, та зовнішні сили системи довільно залежать від часу. Викладені в цій монографії «нестрогі методи для вивчення властивостей розв'язків диференціальних рівнянь, які базувалися на застосуванні розбіжних розвинень, можуть бути перебудовані на способи для встановлення існування точних квазіперіодичних розв'язків. Таким чином, розбіжні розвинення можуть бути використані не тільки з метою наближеного розв'язання, як в астрономії, а навіть і для теоретичного дослідження поведінки розв'язку на всій дійсній осі» [8, с. 89].

Детальні дослідження автоколивальних (нелінійних) систем зі стаціонарними квазіперіодичними коливаннями розглянуто в наступній монографії М.М.Боголюбова та М.М.Крилова «Застосування методів нелінійної механіки до теорії стаціонарних коливань» (1934). У цій монографії вони доводять, що рівняння першого наближення можна отримати з точних шляхом усереднення головного члена правих частин цих рівнянь за часом [6, с.54]. М.М.Боголюбов та М.М.Крилов вперше ввели поняття інтегрального многовиду, заклали основи методу інтегральних многовидів нелінійної механіки, сформулювавши критерії існування інваріантної кривої дея-

кого точкового відображення, створили загальні алгоритми асимптотичного інтегрування нелінійних рівнянь другого порядку. Вони показали, що відповідні формальні розклади за степенями малого параметра є розбіжними, вказали однозначний спосіб вибору функцій розкладу розв'язку, провели аналіз алгоритму цього способу в першому наближенні.

Ідеї теорії інтегральних многовидів містяться в працях А.Пуанкаре, О.Перрона. Зокрема, поняття інтегрального многовиду неявним чином використовуються в класичних роботах О.М.Ляпунова по теорії стійкості при вивченні критичних випадків.

Метод інтегральних многовидів отримав подальший розвиток в монографії «Наближені методи нелінійної механіки в застосуванні до вивчення збурень періодичних рухів і до різноманітних резонансних явищ, що сюди відносяться» (1935) [9]. У ній викладені теорія збурень сімей періодичних рухів та ідея одночастотного методу нелінійної механіки, який відіграв важливу роль в практичному застосуванні нових методів.

Так, в коливальних системах з багатьма степенями вільності наявність внутрішнього та зовнішнього тертя, зовнішніх збуджуючих сил приводить до швидкого зникнення вищих частот, тобто до встановлення основного тону коливань (коливань певної однієї частоти). Тому при дослідженні системи з багатьма степенями вільності доцільно розглядати одночастотний режим, при якому всі точки системи коливаються з однаковою частотою. Питання обґрунтування асимптотичного методу побудови наближених розв'язків, які відповідають одночастотним коливанням в системах з багатьма степенями вільності, тісно пов'язане з теорією інтегральних многовидів.

Створення асимптотичних методів завершено в монографії М.М.Крилова та М.М.Боголюбова «Вступ до нелінійної механіки» (1937) [10]. При розробці асимптотичних методів особливу увагу

М.М.Боголюбов та М.М.Крилов придіяли побудові простих та ефективних прийомів, які дозволяли, виходячи з елементарних міркувань, одержати наближені формули. У цій монографії вони виклали основні результати з розробки асимптотичних методів. Зокрема, при отриманні рівнянь перших наближень М.М.Боголюбов та М.М.Крилов знайшли зв'язок асимптотичного алгоритму з методом усереднення [10, с.237—246]. Метод усереднення — один з основних методів, які використовуються в нелінійній механіці. Він полягає в тому, що праві частини системи диференціальних рівнянь замінюються усередненими за часом функціями, в які час явно не входить. Принципом усереднення користувалися ще в небесній механіці. Не даючи математичного обґрунтування, його в різних формах застосовували для визначення періодичного розв'язку лише при коливаннях з одним ступенем вільності К.Гаусс, Ш.Делоне, Дж.Хілл, Б.Ван-дер-Поль та інші. Рівняння, які отримували в результаті усереднення, легко інтегрувались або спрощувались, що дозволяло робити висновки відносно досліджуваного руху. Для частинного випадку диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами спроби обґрунтування методу усереднення були зроблені П.Фату 1927 р. Вперше обґрунтували метод усереднення Л.І.Мандельштам і М.Д.Папалексі 1934 р. Вони розглянули частинний випадок, коли праві частини рівнянь є періодичними функціями часу. Припустивши, що праві частини є функціями регулярними, Л.І.Мандельштам і М.Д.Папалексі встановили, що різниця між відповідними розв'язками точних і усереднених рівнянь може бути при достатньо малому значенні параметра як загодно малою на достатньо великому інтервалі часу.

Метод інтегральних многовидів дав можливість М.М.Крилову та М.М.Боголюбову встановити відповідність між розв'язками точних (вихідних) рівнянь та

відповідних до них наближених (усереднених) рівнянь. Крім того, метод інтегральних многовидів дозволяє по-іншому підійти до якісної теорії диференціальних рівнянь. Якісне дослідження стає більше простим, якщо розв'язок лежить на многовидах меншого числа вимірів за вихідний фазовий простір. Якщо знайдено інтегральний многовид для нелінійної системи рівнянь, то можна звести розгляд такої системи до рівнянь на многовиді, розміри якого менші розміри вихідного фазового простору. При наявності стійкого інтегрального многовиду, до якого з часом наближаються довільні розв'язки системи, можна розглядати розв'язки, які лежать на інтегральному многовиді гіперповерхні.

У монографії сформульовані основні принципи методу еквівалентної лінеаризації, встановлений його зв'язок з методом розкладу за степенями малого параметра. Цей метод зводить нелінійну задачу до дослідження еквівалентної лінійної системи, яку одержують шляхом заміни нелінійних елементів лінійними, що зручно для практики. Параметри останньої можуть бути визначені за допомогою особливого правила, яке назване М.М.Криловим та М.М.Боголюбовим принципом гармонічного балансу. Основною умовою застосовності методу еквівалентної лінеаризації є мала відмінність розглядуваних систем від гармонічних.

Таким чином, М.М.Крилов і М.М.Боголюбову 1932 р. заклали основи нового підходу до проблем нелінійних коливань, нової гілки в теорії нелінійних коливань.

У всьому світі асимптотичні методи нелінійної механіки — один з найбільш ефективних методів розрахунку нелінійних коливальних процесів.

У роботах учня М.М.Боголюбова Ю.О.Митропольського асимптотичний метод нелінійної механіки одержав узагальнення й розвиток при дослідженні нестационарних явищ з багатьма степенями вільності, які описуються диференціальними рівняннями в частинних

похідних та диференційними рівняннями з малим параметром. В його працях вперше в світовій літературі викладена строга і єдина теорія дослідження цих явищ. На основі методу інтегральних многовидів він обґрунтував одночастотний метод для нелінійних коливних систем, які описуються нелінійними ди-

диференціальними рівняннями з повільно змінюваними параметрами (параметри системи змінюються повільно в порівнянні з одиницею часу порядку періоду власних коливань), нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, систем з розподіленими параметрами.

1. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. — М.: Наука, 1989. — 687 с.
2. *Пуанкаре А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1971—1972. — В 2 т. — Т.1.— 771 с; Т.2. — 457 с.
3. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.;Л.: Гостехиздат, 1947. — 392 с.
4. *Литвинко А.С.* Историко-науковий аналіз формування та розвитку Київської школи математичної та теоретичної фізики М.М.Боголюбова: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.05. — К., 1997. — 174 с.
5. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Исследование продольной устойчивости аэроплана. — М.; Л.: Гос. авиац. и автотракт. изд-во, 1932. — 60 с.
6. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. — Киев: Изд-во Всеукр.АН, 1934. — 108 с.
7. *Крылов Н.М., Боголюбов М.М.* Основні проблеми нелінійної механіки. Теорія і застосування в різних технічних і фізичних науках. Доповідь на Січневій сесії ВУАН, 1934 // Сб.оттисков 162, 173, 175, 189.
8. *Крылов М.М., Боголюбов М.М.* Про деякі формальні розклади нелінійної механіки. — К.: Вид-во Всеукр. АН, 1934. — 89 с.
9. *Kryloff N. et Bogoluboff N.* Methodes approchees de la mecanique non lineaire dans leur application a l'etude de la perturbation des mouvements periodiques et de divers phenomenes de resonance s'y rapportant. — Kiev: Publie par l'Academie des sciences d'Ukraine, 1935.
10. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику (Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики) // Зап. кафедры матфизики АН УССР, 1937. — Т.1—2. — 364 с.

Одержано 03.07.2007

Т.В. Килолицкая

Становление нелинейной механики в Украине (30-е годы ХХ ст.)

Показан вклад академиков Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова, а также Ю.А.Митропольского в развитие нелинейной механики.