

---

## Ювілеї. Пам'ятні дати

---

Ю.О. Храмов, Т.В. Кілочицька

### Ю.О. Митропольський та його наукова школа (до 90-річчя від дня народження вченого)

*Висвітлено життєвий шлях та наукову діяльність академіка НАН України Ю.О. Митропольського, основні характерні його риси як наукового лідера. Показано склад, особливості, наукові здобутки створеної ним наукової школи.*

З ім'ям відомого українського вченого, академіка НАН України, Героя України Юрія Олексійовича Митропольського пов'язаний розвиток методів нелінійної механіки. Народився він 3 січня 1917 р. у с. Чернишівка Гоголівського району Полтавської області. У с. Шишаки Полтавської області відбулося його хрещення та був складений метричний запис, тому іноді місце народження Ю.О. Митропольського вказується помилково — с. Шишаки [1, с. 147]. У 1919 р. родина Митропольських переїхала до Києва. Тут 1932 р. Юрій Олексійович закінчив семирічну школу, в 1932—1935 рр. працював на Київському консервному заводі, у 1936 р. вступив до 9-го класу середньої школи № 70, яку закінчив у 1938 р. з відзнакою. У 1938 р. Ю.О. Митропольський вступив до фізико-математичного факультету Київського університету і одночасно працював вчителем математики в середній школі. У зв'язку з Великою Вітчизняною війною після 3-го курсу навчання його було мобілізовано до лав Червоної Армії. У листопаді 1941 р. Юрій Олексійович отримав відпустку і був прийнятий на 5-й курс Казахського університету, по закінченню якого 1942 р. його зарахова-



но до Рязанського артилерійського училища. З 1943 р. і до кінця Великої Вітчизняної війни Ю.О. Митропольський перебував на фронті, був командиром взводу артилерійської розвідки. За звільнення Риги його нагороджено орденом Червоної Зірки, другий орден Червоної Зірки він отримав за участь в розгромі

курляндського угруповання німецьких військ [2, с.8].

Після перемоги відбулася перша зустріч Ю.О.Митропольського з М.М.Боголюбовим в Київському університеті. Юрій Олексійович прийшов до Миколи Миколайовича як до декана фізико-математичного факультету довідатись про можливість вступу до аспірантури.

„Зустрівся я з Миколою Миколайовичем в приміщенні школи на вул. Леніна (нині вул. Богдана Хмельницького), де в другу зміну читалися лекції для студентів КДУ..., — згадує Юрій Олексійович. — Микола Миколайович проходжувався коридором протягом години і розмовляв зі мною. Докладно розпитав про родину, про мої інтереси, які лекції я слухав в університеті в Алма-Аті. Я сказав йому, що слухав курс теорії стійкості, що його читав К.П.Персидський, та курс функціонального аналізу, який читав С.Г.Міхлін, та що С.Г.Міхлін і К.П.Персидський пропонували мені вступити до аспірантури”[3, с.149].

Після розмови М.М.Боголюбов погодився взяти Ю.О.Митропольського до аспірантури і одночасно запропонував йому вакантну посаду молодшого наукового співробітника в його відділі в Інституті будівельної механіки АН УРСР. Працювати у відділі було вигідно: дисертацію можна подати раніше, зарплата була вища за аспірантську стипендію, і Юрій Олексійович погодився з цією пропозицією. У 1946—1950 рр. проходила його наукова робота в Інституті будівельної механіки АН УРСР. У ці роки під керівництвом М.М.Боголюбова, а згодом у співпраці з ним сформувалися основні навички науково-дослідницької роботи Ю.О.Митропольського. Він відразу ввійшов у наукову атмосферу школи М.М.Боголюбова з нелінійної механіки, почав вивчати резонансні явища в нелінійних коливальних системах з повільно змінюваними параметрами, виходячи з асимптотичних методів, створених М.М.Криловим і М.М.Боголюбо-

вим. З цієї проблеми Ю.О.Митропольський у 1948 р. захистив дисертацію на ступінь кандидата фіз.-мат. наук.

З 1950 р. Ю.О.Митропольський працював в Інституті математики НАН України, в 1953—2001 рр. керував відділом математичної фізики і теорії нелінійних коливань, в 1956—1958 рр. — заступник директора інституту, 1958—1988 рр. — директор (з 1988 р. — його почесний директор). Член-кореспондент (1958), академік (1961) НАН України, заслужений діяч науки України за внесок в розвиток вітчизняної науки і підготовку наукових кадрів (1967), академік Болонської АН (1971), академік АН СРСР (нині Російської академії наук, 1984). Під його керівництвом Інститут математики НАН України став одним з найавторитетніших інститутів у світовій науці. У 1949—1990 рр. займався викладацькою діяльністю на механіко-математичному факультеті Київського університету, де у 1951—1953 рр. завідував кафедрою диференціальних рівнянь, професор (1954), почесний доктор Київського університету (1999). Крім того, у 1951 р., після захисту докторської дисертації, працював в Москві в Лабораторії вимірювальних приладів АН СРСР, у відділі М.М.Боголюбова.

Ю.О.Митропольському присвоєні Ленінська премія за значні успіхи в галузі нелінійних коливань і нелінійних диференціальних рівнянь (1965), Державні премії України (1980, 1996, 2000), золоті медалі ім. О.М.Ляпунова (1986) та ім. В.І.Вернадського (2006), премії ім. М.М.Крилова (1969), М.М.Боголюбова (1993) та М.О.Лаврентьєва (1998). У 1996 р. він отримав орден Ярослава Мудрого V ст., у 2002 р. — IV ст., в 2007 р. — орден Держави. У 1961—1993 рр. Ю.О.Митропольський був академіком-секретарем Відділення математики НАН України. Він іноземний член багатьох академій і наукових товариств світу.

Ю.О.Митропольський згуртував навколо себе великий науковий колектив, який працював у галузі теорії нелінійних

коливань і нелінійних диференціальних рівнянь. Наукові праці Ю.О.Митропольського характеризуються теоретичною глибиною, всебічним дослідженням проблеми, практичною цінністю. Під його керівництвом 100 аспірантів захистили кандидатські дисертації, з них 25 стали докторами наук. Багато учнів Ю.О.Митропольського — провідні співробітники кафедр диференціальних рівнянь Київського, Чернівецького університетів та інших вузів і науково-дослідних інститутів. Видатний вчений, організатор науки, вихователь, він широко відомий і користується науковим авторитетом в Україні та за кордоном. Ю.О.Митропольський був ініціатором і організатором міжнародних симпозіумів і конференцій з нелінійних коливань, які проходили в Києві, Берліні, Празі, Варшаві. Він неодноразово виступав з доповідями в наукових центрах і університетах Угорщини, Польщі, США, Італії.

У працях Ю.О.Митропольського вперше в світовій літературі викладено строгу теорію дослідження нестационарних коливальних процесів з однією та з багатьма степенями вільності. Дослідження цих процесів є актуальним у зв'язку з розрахунками на стійкість швидкохідних силових і виконуючих агрегатів з врахуванням всіх явищ, які відбуваються в процесі коливання конструкцій, деталей тощо. Проблема вивчення нестационарних явищ виникає при зміні частот, мас та інших параметрів нелінійної коливної системи, тобто при неусталених режимах, зокрема при проходженні через резонанс, при дослідженнях коливань в системах зі змінною масою і жорсткістю, коливань систем зі змінними з часом зв'язками, коливань шахтних піднімальних канатів, мостів, які знаходяться під впливом рухомих навантажень і пульсуючих сил, при модуляції коливань високої частоти коливаннями більш низької частоти, в електронних прискорювачах, при розрахунку траєкторій ракет на активній ділянці їх руху тощо. У більшості випадків нестационарні процеси в коли-

вальних системах з багатьма степенями вільності описуються нелінійними диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами. У багатьох задачах параметри систем змінюються повільно в порівнянні з одиницею часу порядку періоду власних коливань. Такі системи описуються нелінійними диференціальними рівняннями з повільно змінюваними параметрами. Таким чином, виникають питання побудови відповідного математичного апарату нелінійних рівнянь з повільно змінюваними параметрами за допомогою розробки асимптотичних методів нелінійної механіки.

Ідею асимптотичних методів можна застосовувати при побудові наближених розв'язків для коливальних систем, які містять малий параметр як з однією, так і з багатьма степенями вільності. Однак застосування асимптотичних методів при побудові наближених розв'язків для системи з багатьма степенями вільності вимагає попереднього розв'язання сукупності диференціальних рівнянь з кількістю невідомих, пропорційній числу степенів вільності. Тому виникають труднощі практичного застосування цих методів. Для їх подолання М.М.Боголюбов у 1949 р. розробив метод асимптотичного інтегрування, за допомогою якого досліджуються коливання з однією частотою в нелінійних системах з багатьма степенями вільності [4]. У таких системах наявність внутрішнього і зовнішнього тертя та зовнішніх збуджуючих сил приводить до встановлення коливань основного тону або інтенсивних коливань іншої, але певної частоти. Тому при вивченні систем з багатьма степенями вільності доцільно розглядати одночастотний режим, коли всі точки системи виконують коливання з однаковою частотою. Велике значення тут має розробка ефективного методу, який дозволяє визначити для складної коливної системи одночастотний режим.

Одночастотний метод дістав істотного розвитку в циклі праць Ю.О.Митропольського в 1949—1960 рр. Цей метод

полягає в тому, що знаходиться не загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, а тільки частинний, який залежить від двох довільних постійних і відповідає певному коливальному процесу в системі з багатьма степенями вільності. З праці „Власні коливання в нелінійних системах з повільно змінюваними параметрами” (1948) починається ґрунтовна наукова діяльність Ю.О.Митропольського над розвитком асимптотичних методів нелінійної механіки [5].

У 1949 р. з'являється перша публікація Ю.О.Митропольського з вивчення нестационарних явищ, які виникають в коливальних системах з багатьма степенями вільності при повільній зміні частот та інших параметрів — „Дослідження коливань в нелінійних системах з багатьма степенями вільності та повільно змінюваними параметрами”. У ній він узагальнив метод Боголюбова дослідження одночастотних коливань в нелінійних системах з багатьма степенями вільності, виклав основи побудови наближених розв'язків систем диференціальних рівнянь з багатьма степенями вільності та повільно змінюваними параметрами у випадку одночастотного режиму [6, с.85—92]. Для більш зручного застосування асимптотичних методів Ю.О.Митропольський запропонував кілька методів складання рівнянь в першому наближенні: метод типу „лінеаризації”, метод „гармонічного балансу”, енергетичної інтерпретації тощо. Основою використання одночастотного методу була енергетична інтерпретація, оскільки рівняння коливань для систем з багатьма параметрами є рівняннями в частинних похідних. Згідно з методом енергетичної інтерпретації рівняння першого і другого наближень складаються, виходячи з виразів для віртуальної роботи, кінетичної та потенціальної енергії без попереднього складання точних диференціальних рівнянь руху [6, с.92—94]. Це дозволило перенести одночастотний метод на системи з розподіленими параметрами (ди-

ференціальні рівняння в частинних похідних) і дослідити нестационарні коливання стержнів, пластинок, лопаток турбін, балок тощо [6, с.94—98].

Ю.О.Митропольський асимптотичний метод, який містився в працях М.М.Крилова та М.М.Боголюбова, узагальнив для рівнянь з повільно змінюваними параметрами, знайшов формальні розклади рівняння нелінійного вібратора в першому та другому наближеннях, розглянув окремих випадок, коли на нелінійний вібратор діє синусоїдальна сила зі змінною частотою, що є важливим при вивченні явищ у коливальній системі при повільному проходженні через резонанс [7]. Питання ж асимптотичної збіжності наближених розв'язків, зокрема її математичне обґрунтування, він виклав у праці „Повільні процеси в нелінійних коливальних системах з багатьма степенями вільності” (1950) [8]. У ній дано оцінку похибки і доведено теорему, яка встановлює властивості стійкості сім'ї розв'язків, що відповідають розглядуваному одночастотним процесам. У 1951 р. Ю.О.Митропольський захистив дисертацію з такою самою назвою на ступінь доктора технічних наук. У працях Ю.О.Митропольського „Дослідження коливань в нелінійних системах з багатьма степенями вільності та повільно змінюваними параметрами” (1949) та „Повільні процеси в нелінійних коливальних системах з багатьма степенями вільності” (1950) на основі розвитку і узагальнення одночастотного методу і розробки методу дослідження систем з повільно змінюваними параметрами було запропоновано загальний метод дослідження нестационарних коливань в системах з розподіленими параметрами.

У праці „Вимушені коливання в нелінійних системах при проходженні через резонанс” (1953) Ю.О.Митропольський дослідив різноманітні складні явища, які спостерігаються в нелінійних системах при проходженні через резонанс, зокрема вплив тертя на амплітуду при різних швидкостях проходження че-

рез резонанс [9]. У цій праці та праці „Повільні процеси в нелінійних коливальних системах з багатьма степенями вільності” він розробив асимптотичний алгоритм для коливальних систем з повільно змінюваними параметрами. Завдяки цьому в подальшому можна було вивчати нестационарні явища, які виникають при зміні частот та інших параметрів нелінійної системи, зокрема досліджувати явища повільного проходження через резонанс в системах типу „центрифуги”, в роторах турбомашин, гіроскопічних пристроях та ін.

Одночастотний метод був застосований Ю.О.Митропольським при знаходженні асимптотичних розв'язків для систем рівнянь з гіроскопічними членами. Складені в цьому випадку рівняння першого наближення для амплітуди і фази одночастотного процесу дали можливість точно проаналізувати низку явищ в гіроскопічних системах. У статті „Про коливання в гіроскопічних системах при проходженні через резонанс” (1953) [10] Ю.О.Митропольський дослідив проблему побудови асимптотичних розв'язків при наявності в досліджуваній системі диференціальних рівнянь гіроскопічних членів і кратних власних частот при проходженні через резонанс за допомогою асимптотичних методів Крилова—Боголюбова 1937 р. та методики, викладеної в праці „Повільні процеси в нелінійних коливальних системах з багатьма степенями вільності” (1950) [8]. Ці результати увійшли в написану спільно з М.М.Боголюбовим монографію „Асимптотичні методи в теорії нелінійних коливань” (1955) [11].

„Одним з найбільш істотних внесків у розвиток нелінійної механіки та, відповідно, й школи з нелінійної механіки вже після того, як Микола Миколайович основні зусилля спрямував на розвиток питань теоретичної фізики, — писав Ю.О.Митропольський, — стала наша спільна монографія „Асимптотичні методи в теорії нелінійних коливань”, що виходила з 1955 р. чотирма

виданнями в СРСР та була перекладена на п'ять мов (німецьку, французьку, англійську, японську та китайську)”. Як згадував Ю.О.Митропольський, на початку 50-х років М.М.Боголюбов сказав йому: „Юрію Олексійовичу, я відходжу від нелінійної механіки, мої наукові інтереси тепер зосереджуються в напрямку теоретичної фізики, а нелінійну механіку я віддаю Вам” [1, с.150].

Результати досліджень коливань за допомогою одночастотного методу були також підсумовані в монографіях Ю.О.Митропольського „Нестационарні процеси в нелінійних коливальних системах” (1955) [12] і „Проблеми асимптотичної теорії нестационарних коливань” (1964) [13]. Зокрема, в першій монографії [12] запропоновано нові схеми, зручні для практичної побудови наближених розв'язків для малих коливань і для більш складної коливальної системи з гіроскопічними членами [с.159—165], одночастотний метод для систем з гіроскопічними членами [с.183—201], побудовано загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь з повільно змінюваними коефіцієнтами [с.230—238], розглянуто проходження через внутрішній резонанс в гіроскопічній системі типу центрифуги [с.247—257], перехід колінчастого вала авіамотору в інший режим [с.149—158], рух вантажу з пульсуючою силою по балці [с.177—180] тощо. Вперше досліджено проходження через резонанс нелінійних систем з одним та багатьма степенями вільності. Також розглянуто явища в нелінійних системах з одним ступенем вільності: проходження через дробні резонанси [с.84—90], випадок одночасної дії кількох гармонічних сил [с.91—99], нестационарні процеси в нелінійних системах, близьких до точно інтегрованих [с.99—165] та ін. Викладено деякі питання математичного обґрунтування асимптотичного методу, зокрема досліджено асимптотичну збіжність наближених розв'язків, оцінено похибку  $m$ -го наближення

[с.258—266], викладено деякі критерії стійкості одночастотного режиму [с.267—278]. Розроблені схеми дозволили досліджувати неусталені коливання роторів на пружних підшипниках, при запуску та припиненні роботи моторів, коливання шахтних піднімальних канатів, коливання в колах зі змінною ємністю і самоіндукцією тощо.

У передмові до своєї монографії „Проблеми асимптотичної теорії нестационарних коливань” (1964) Ю.О.Митропольський висловлює „ширу подяку своєму вчителю академіку М.М.Боголюбову, бесіди з яким багато в чому сприяли роз’ясненню ряду розглянутих питань при розробці викладеної теорії” [13, с.10]. У цій монографії систематично викладено математичне обґрунтування розробленого ним методу дослідження нестационарних процесів у нелінійних коливальних системах з повільно змінюваними параметрами, необхідною умовою застосовності якого є вимога повільної зміни параметрів системи у відношенні до „власних періодів” коливань. У ній викладено зручні прийоми, в основу яких покладено використання методів усереднення, гармонічного балансу та енергетичної інтерпретації. Згідно з останньою треба скласти рівняння першого або другого наближення, виходячи з роботи, що виконується силами збурень. Досліджено одночастотні коливання в системах з багатьма степенями вільності та швидко змінюваними параметрами: крутильні коливання колінчастого валу авіаційного двигуна при неусталеному режимі та коливання гнучкого валу, що несе на кінцях маси, змінювані з часом [13, с.218—226], вплив на коливальну систему з багатьма степенями вільності збуджуючої сили з кількома частотами [13, с.233—237], досліджено нестационарні процеси в нелінійних системах з гіроскопічними членами [13, с.240—313].

Таким чином, одним з найважливіших результатів, отриманих в напрямку подальшого розвитку асимптотичних методів, є алгоритм побудови наближених

розв’язків для нелінійних диференціальних рівнянь з повільно змінюваними параметрами. Це дало можливість виявити і докладно вивчити ряд нових явищ нелінійних коливальних систем з одним ступенем вільності в нестационарних коливальних процесах. При дослідженні коливань нелінійного вібратора під час проходження його через резонанс виявлено специфіку явищ нелінійних систем: захоплення, розриви амплітуд, биття тощо, розглянуто приклади проходження через резонанс колінчастого валу, вивчено явища, які виникають під час проходження через резонанси при запуску центрифуги й інших гіроскопічних пристроїв, спільний вплив звичайного і параметричного резонансів, а також явища, які спостерігаються при проходженні через обидва резонанси.

Крім того, Ю.О.Митропольський одержав низку теорем, що встановлювали критерії стійкості вивчених двопараметричних сімей частинних розв’язків (1950) [7]. У ряді важливих випадків вони мають „сильну стійкість”, яка полягає в тому, що будь-який розв’язок вихідної системи з часом прямує до сім’ї наближених розв’язків. Цю властивість він розвинув у 1957—1958 рр. в теорію інтегральних многовидів.

Вперше ж поняття інтегрального многовиду та його строге визначення запроваджено М.М.Криловим і М.М.Боголюбовим у монографії „Застосування методів нелінійної механіки до теорії стаціонарних коливань” (1934). Ідея методу інтегральних многовидів у нелінійній механіці міститься в праці М.М.Боголюбова „Про деякі статистичні методи в математичній фізиці” (1945). У цій монографії розглянуто лише властивості розв’язків диференціальних рівнянь в стандартній формі на нескінченному проміжку часу. У 1947 р. М.М.Боголюбов запропонував замість конкретного розв’язку системи диференціальних рівнянь розглядати деяку двупараметричну сім’ю розв’язків, яка лежить на двовимірному інтегральному многовиді. У теорії інте-

гральних многовидів мають справу з функціональними рівняннями, які визначають функції, що характеризують шукані інтегральні многовиди, тоді як в теорії Ляпунова—Пуанкаре досліджується сумісність системи звичайних диференціальних рівнянь з кінцевою кількістю невідомих і малим параметром. У теорії інтегральних многовидів розглядають не індивідуальні розв'язки, на які впливають малі зміни правих частин рівнянь, а інтегральні многовиди—гіперповерхні, які більш стійкі у відношенні до малих змін правих частин рівнянь. Якісне дослідження розв'язків системи значно спрощується, якщо вони лежать на многовиді меншої кількості вимірів, ніж вихідний фазовий простір. Тобто метод інтегральних многовидів являє собою новий підхід до якісної теорії диференціальних рівнянь. Тут розглядають дві системи диференціальних рівнянь—точні рівняння і наближені (різниця між правими частинами яких—величина асимптотично мала)—та встановлюють відповідність між інтегральними многовидами цих рівнянь. Питання існування і стійкості інтегральних многовидів для точних розв'язків має велике значення і для вивчення їх індивідуальних розв'язків, оскільки замість всього фазового простору можна розглядати розв'язки, які лежать на інтегральному многовиді. Частинні розв'язки залежать від двох довільних сталих і являють собою параметричне представлення деякого двовимірного інтегрального многовиду. Розглядаючи інтегральні многовиди, можна довести низку теорем для індивідуальних розв'язків при досить жорстких умовах, які накладаються на праві частини відповідних диференціальних рівнянь.

У роботах Ю.О.Митропольського набули розвитку ідеї М.М.Боголюбова щодо дослідження інтегральних многовидів. У праці „Про деякі диференціальні рівняння, які зустрічаються в теорії релаксаційних коливань” (1957) він досліджував нелінійні диферен-

ціальні рівняння, які розглядали А.Пуанкаре і А.Данжуа, звів вихідну релаксаційну систему рівнянь на многовиді до одного рівняння, в результаті аналізу розв'язків якого отримав критерії існування зон параметричного резонансу для розглядуваної релаксаційної системи, знайшов явище квазісинхронізації, уточнив в другому наближенні частоту синхронних коливань тощо [14].

Ю.О.Митропольський також поширив метод інтегральних многовидів на нелінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами. У праці „Про стійкість однопараметричної сім'ї розв'язків системи рівнянь зі змінними коефіцієнтами” Ю.О.Митропольський обґрунтував одночастотний метод для коливальних систем, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями з повільно змінюваними параметрами [15]. Він довів фундаментальну теорему, яка встановлює існування і властивості інтегрального многовиду, розглянув існування і властивості одновимірного інтегрального многовиду системи диференціальних рівнянь, до якої приводять багато задач про нестационарні коливання в системах з багатьма степенями вільності та повільно змінюваними параметрами. Цікавими також є питання топологічного вивчення структур інтегральних многовидів, які отримуються для різних видів диференціальних рівнянь, що описують складні коливальні явища (миттєві зміни деякої величини).

У праці „Про періодичні розв'язки системи нелінійних диференціальних рівнянь з недиференційованими правими частинами” (1959) доведено теорему, що являє собою обґрунтування за допомогою метода усереднення законності побудови наближених періодичних розв'язків для диференціальних рівнянь, праві частини яких не диференційовані [16]. До таких рівнянь приводять задачі визначення періодичних розв'язків для системи, нелінійна характеристика яких складена з відрізків прямих.

Ю.О.Митропольському належить також низка теорем про існування та властивості інтегральних многовидів для нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами у скінченно- та нескінченновимірних випадках. В останньому випадку сформульовано теорему, що обґрунтувала застосування одночастотного методу до систем з розподіленими параметрами [17, 18].

Отже, Ю.О.Митропольський отримав результати щодо існування і властивості інтегральних многовидів нелінійних диференціальних рівнянь з повільно змінюваними параметрами, обґрунтував застосування одночастотного методу до дослідження систем з розподіленими параметрами. Починаючи з 1950-х років асимптотичні методи нелінійної механіки почали розвиватися в трьох основних напрямках: подальшої розробки асимптотичних методів для зручного практичного застосування, аналізу фізичних явищ у нелінійних коливальних системах, теоретико-якісного дослідження диференціальних рівнянь з малим параметром. Для останнього напрямку характерним є обґрунтування асимптотичного методу дослідження одночастотних коливальних процесів у нелінійних коливальних системах з багатьма степенями вільності, тобто розроблення методу інтегральних многовидів.

Наукова і педагогічна діяльність Ю.О.Митропольського завжди гармонійно доповнювали одна одну. Основні результати, отримані в галузі розвитку методу інтегральних многовидів в нелінійній механіці, неодноразово були темами спеціальних курсів, які Юрій Олексійович читав на механіко-математичному факультеті Київського університету, дипломних і курсових робіт студентів.

Крім того, з 1953 р. при Інституті математики АН УРСР почав роботу семінар з математичної фізики і теорії нелінійних коливань, керівником якого був Ю.О.Митропольський. Кількість засідань щороку становила 20—25. Ве-

лике значення для діяльності семінару мало видання „Праць семінару з математичної фізики і теорії нелінійних коливань” (1963), а також публікація великої кількості доповідей в міжвузівському збірнику „Математична фізика” [19]. Учасниками семінару захищено 5 докторських та понад 30 кандидатських дисертацій. Велика ерудиція Юрія Олексійовича, вміння зіставити важливу проблему задачам математики і механіки, сприяти її ефективному розв’язанню зацікавлюють творчу молодь [2, с.14]. Він значну увагу приділяє популяризації математичних знань і досягнень, є членом Всесоюзного товариства „Знання”, систематично виступає з лекціями перед інженерами, викладачами математики, студентами, учнями.

За допомогою висловлень його учнів, колег, друзів виділимо основні характерні риси Юрія Олексійовича як наукового лідера. Учень Ю.О.Митропольського А.А.Мартинюк відмічає, що „характерними рисами Юрія Олексійовича були його повсякденна увага до проблем, які виникали в творчих колективах, і намагання їх розв’язати (або краще попередити їх появу) винятково на ґрунті справедливості та взаєморозуміння. Всі знали, що Юрій Олексійович є взірцем коректності й справедливості”. До рис Ю.О.Митропольського як вченого він відносить „широту наукових інтересів, глибоке розуміння проблем нелінійної механіки і теорії нелінійних коливань, його відповідальність за використання результатів наукових досліджень”. Для Юрія Олексійовича як учителя характерними є „доброзичливість, турбота про розпочате дослідження, повага до думки інших фахівців”. Із суто людських якостей доцільно виділити „виняткову інтелігентність і порядність, простоту в спілкуванні та безмежну відданість своїй справі”. Отже, Юрій Олексійович — талановитий організатор, чудовий педагог і вихователь наукових кадрів. У пошуках найбільш ефективних методів до-



слідження задач він звертає особливу увагу на фізичний бік даної проблеми, на її актуальність, практичне застосування, на динамічний характер досліджуваного явища. Юрій Олексійович надає також важливого значення аналітичним методам дослідження, які приводять до кількісних [2, с.29]. А.А.Мартинюк, характеризуючи стиль і методи досліджень Ю.О.Митропольського, відмічає, що вони „є продовженням традицій, започаткованих М.М.Криловим і М.М.Боголюбовим. Це насамперед точні постановки задач нелінійної механіки і строгі методи їх розв'язання. Намагання отримати остаточний результат у формі, придатній для інженерних застосувань, є однією з вражаючих рис його творчого методу”. К.Рагулькіс, доктор технічних наук, писав: „Ю.О.Митропольський зробив значний вклад в теорію нелінійних коливань. Створена і очолювана ним школа з розвитку асимптотичних методів в теорії нелінійних коливань є провідною” [3, с.267]. Відмінна риса всього наукового колективу академіка Митропольського — глибокий теоретичний аналіз, доведення теорії до розв'язання актуальних задач народного господарства [3, с.272]. Як відмічають В.А.Ільїн, Н.А.Ізобов, А.А.Мартинюк та А.М.Самойленко, „характерна риса творчості Ю.О.Митропольського — всебічне дослідження розглядуваної проблеми: від алгоритму побудови наближеного розв'язку до теоретичного обґрунтування запропонованого методу” [20, с.4]. Багато сил і часу він віддавав своїм учням, в кожному з них вбачав серйозного опонента [3, с.276]. В.Г.Бар'яхтар, декан фізико-математичного факультету КПІ, академік НАН України, зазначає, що „Юрій Олексійович користується великою повагою та любов'ю серед колег, аспірантів, студентів, усіх, хто з ним спілкується. Його енергія, знання, мудрість, привітність, доброта, щирість, задушевність вражають і захоплюють” [21].

У 1976 р. Ю.О.Митропольський був запрошений на 1-й Панафриканський математичний конгрес, на якому доповів про підготовку вищих математичних кадрів — кандидатів і докторів наук — в Україні [2, с.23].

Праці учнів Юрія Олексійовича є ґрунтовними дослідженнями фундаментальних проблем нелінійної механіки. Зокрема, учениця Ю.О.Митропольського О.Б.Ликова досліджувала застосування інтегральних многовидів до розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, близьких до інтегрованих, та для систем з нескінченною кількістю степенів вільності (1968, 1973). Особливо цінним є запровадження нею поняття локального інтегрального многовиду, формулювання умов, що забезпечують його існування, та аналіз поведінки розв'язків на  $i$ -му околі таких многовидів [22, 23].

При застосуванні до дослідження рівнянь, що описують поведінку інтегральних кривих на многовиді, методу усереднення вивчено явище синхронізації, яке спостерігається в нелінійній системі. Ці дослідження викладено в монографії Ю.О.Митропольського та О.Б.Ликової „Інтегральні многовиди в нелінійній механіці” (1973) [23]. Для випадку гільбертового простору сформульовано і доведено теорему, аналогічну до основної теореми М.М.Боголюбова про існування одновимірного інтегрального многовиду для рівняння в стандартній формі. Розглянуто рівняння, близьке до точно інтегрованого, доведено для нього існування і встановлено властивості двовимірного інтегрального многовиду. Ю.О.Митропольський та О.Б.Ликова досліджували методом інтегральних многовидів поведінку розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, які описують повільні та швидкі рухи в околі положення рівноваги, а також сім'ю періодичних розв'язків відповідних вивіржених рівнянь. У цій монографії вміщено результати М.М.Боголюбова та авторів з питань поведінки інтегральних

кривих на многовиді та в їх околі, для рівнянь, які містять малий параметр, та результати, отримані К.В.Задиракою і В.І.Фодчуком.

Так, К.В.Задиракою в 1956—1966 рр. досліджувались методом інтегральних многовидів розв'язки систем сингулярно (нерегулярно) збурених диференціальних рівнянь на нескінченному інтервалі часу, розв'язки автономних та неавтономних нерегулярно збурених систем в околі стаціонарних розв'язків відповідних вироджених систем. Він дослідив також системи диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній вищого порядку та встановив для них умови існування та стійкості інтегральних многовидів, близьких до інтегральних многовидів вироджених систем [24—26]. За допомогою методу гармонічної лінеаризації В.І.Фодчуку вдалося поширити 1968 р. метод побудови інтегральних многовидів на рівняння із запізненням та довести їх стійкість [27, 28].

Результати досліджень коливань у системах з розподіленими параметрами за допомогою асимптотичних методів вперше підсумовано в монографії Ю.О.Митропольського та Б.І.Мосеєнкова „Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи)” (1961) [29]. Метод усереднення в енергетичній інтерпретації дозволив Ю.О.Митропольському перейти до систем з нескінченною кількістю степенів вільності, які описуються рівняннями в частинних похідних. Таким чином цей метод переноситься на задачі дослідження одночастотних коливальних процесів у системах з розподіленими параметрами [29, с.38—120]. Обґрунтування його дано лише для систем зі скінченним числом степенів вільності. Дослідження Ю.О.Митропольського та Б.І.Мосеєнкова стали основою для розгляду явищ у різних системах з нестационарними коливаннями в працях учнів М.М.Боголюбова і Ю.А.Митропольського.

У 1961 р. на міжнародному симпозіумі з нелінійних коливань в доповіді

М.М.Боголюбова та Ю.О.Митропольського викладено результати розвитку методу інтегральних многовидів за період з 1945 р. Вони вказали шляхи подальшого розвитку інтегральних многовидів, а також на необхідність поширення цього методу на нескінченновимірні системи рівнянь, на рівняння із запізнюючим аргументом, на сингулярно збурені системи та ін. У статті М.М.Боголюбова та Ю.О.Митропольського „Метод інтегральних многовидів у нелінійній механіці” (1963) розглянуто властивості розв'язків диференціальних рівнянь в стандартній формі на нескінченному інтервалі часу за допомогою методу інтегральних многовидів [30]. У ній викладено основні результати щодо розвитку і узагальнення методу інтегральних многовидів, його застосувань, наведено характерні типи диференціальних рівнянь нелінійної механіки [30, с.96—100], деякі основні теореми про існування і властивості інтегральних многовидів для таких типів диференціальних рівнянь [30, с.119—132]. М.М.Боголюбов і Ю.О.Митропольський розглянули деякі аспекти розвитку теорії інтегральних многовидів. Вони застосували цю теорію до багатьох актуальних задач нелінійної механіки: дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (коливання балок, валів, оболонок, роторів турбін, пластин тощо), які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних [30, с.138—153]. При розв'язанні таких задач можуть виникнути труднощі, пов'язані, наприклад, з приведенням нескінченних систем з періодичними коефіцієнтами, тому треба накладати жорсткі умови і розглядати окремі випадки. Методи інтегральних многовидів М.М.Боголюбов і Ю.О.Митропольський поширили на системи із запізнюючим аргументом, зокрема на випадок малого запізнення, запізнення, яке повільно змінюється. Актуальною є проблема розвитку і застосування методів інтегральних мно-

говидів для дослідження систем диференціальних рівнянь з малим параметром при старших похідних, які описують релаксаційні коливальні процеси. Вони звели розгляд вихідної системи рівнянь до вивчення одного рівняння на многовиді та вивели критерій існування зон параметричного резонансу.

Поява цієї праці вплинула на подальший розвиток методу інтегральних многовидів у нелінійній механіці, зокрема на праці самого Ю.О.Митропольського, а також К.В.Задираки, О.Б.Ликової, В.І.Фодчука та ін. та іноземних авторів — Дж.Хейла, А.Стокса, М.Маркуса, В.Кайнера, А.Келлі, Я.Курцвейля, А.Халаяна та ін. Поширенню методів інтегральних многовидів на нескінченні системи рівнянь, різні класи рівнянь, які містять „малий” і „великий” параметр, рівняння в функціональних просторах присвячені статті Ю.О.Митропольського, О.Б.Ликової, іноземних авторів Дж.Хейла, Я.Курцвейля тощо. Проблема інтегральних многовидів у системах із запізненням дістала дослідження в працях В.І.Фодчука, Ю.О.Митропольського, Дж. Хейла, А.Халаяна, у системах диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній (сингулярно збурених рівнянь), системах з повільними і швидкими змінними — в працях Дж.Хейла, Ю.А.Митропольського, О.Б.Ликової, докторській дисертації К.В.Задираки.

Доповіді на семінарі відділу математичної фізики і теорії нелінійних коливань Інституту математики АН УРСР, учасниками якого були співробітники також інших наукових установ Києва та міст СРСР й інших країн, було надруковано в збірнику „Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань” (1971) [31].

Учень Ю.О.Митропольського Г.П.Хома дослідив нестационарні коливання в механічних системах з розподіленими параметрами, при поширенні хвиль у стратифікаційному середовищі та взаємодії їх у дисперсійному середовищі, розробив конструктивні методи дослідження

періодичних розв’язків хвильових рівнянь [32— 34].

Учень Ю.О.Митропольського В.П.Рубаник застосував метод усереднення до систем із запізненням. За допомогою обґрунтування методу усереднення він побудував наближені розв’язки квазілінійних систем із запізненням, яке входить в малі нелінійні члени як для випадку вільних коливань системи, так і для вимушених при наявності в системах резонансів [35, 36].

У 1962 р. в працях учнів Ю.О.Митропольського В.П. Рубаника та В.І.Фодчука метод усереднення застосовувався до диференціально-різницевого рівнянь [37]. Доповіді В.І.Фодчука 1963 р. присвячено деяким питанням диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом і малим параметром, а саме дослідженню інтегральних многовидів, поширенню асимптотичних методів і принципу усереднення нелінійної механіки на диференціальні рівняння із запізнюючим аргументом.

Продовженням та розвитком цих досліджень займалися також учні Ю.О.Митропольського А.М.Самойленко та М.О.Перестюк. Так, А.М. Самойленко розробив потужні алгоритми побудови наближених розв’язків диференціальних рівнянь для розривних та імпульсних систем. Для останніх вперше було доведено фундаментальні теореми М.М.Боголюбова з обґрунтування методу усереднення на скінченному та нескінченному інтервалі часу, встановлено ознаки існування розривних граничних циклів, доведено теореми існування розв’язків, що відповідають коливальним режимам. Роботи А.М.Самойленка 1987—1989 рр. присвячено обґрунтуванню методу усереднення для багаточастотних коливальних систем [38—41]. Ще 1965 р. він розвинув чисельно-аналітичний метод дослідження періодичних розв’язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, який дозволяє знаходити періодичні розв’язки таких систем у вигляді рівномірно збіжної послідовності періодичних функцій

цій. Обґрунтування можливості застосування цих методів для вивчення сильно нелінійних систем із запізненням досліджено учнем Ю.О.Митропольського Д.І.Мартинюком [42—44].

У працях А.М.Самойленка суттєва увага приділялась побудові теорії тороїдних многовидів. Він побудував теорію збурень компактних інваріантних многовидів динамічних систем, вивчив траєкторії в околі гладких компактних тороїдних інваріантних многовидів динамічних систем. Розробляючи асимптотичні методи, А.М.Самойленко знайшов фундаментальні та сильні алгоритми побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь для розривних та імпульсних систем. У результаті ним створено теорію інтегральних многовидів імпульсних систем, яка розвивалась також у працях М.О.Перестюка (1987) [38, 39, 45]. А.М.Самойленко узагальнив принцип усереднення для рівнянь з нерегулярною правою частиною, дослідив неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра, отримав низку результатів з теорії інтегральних багатovidів, запропонував новий підхід до теорії збурень інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем, пов'язаний з використанням функції Гріна для лінеаризованої задачі.

Розвиваючи дослідження А.М.Самойленка, М.Й.Ронто розробив чисельно-аналітичні методи розрахунку періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь електричних кіл. Ці результати він виклав у спільній з А.М.Самойленком монографії „Чисельно-аналітичні методи дослідження вирішення крайових задач” [46].

На основі методу доведення і побудови періодичних розв'язків М.М.Боголюбова та А.М.Самойленка, учнем Ю.О.Митропольського Б.П.Ткачем вивчались особливості коливальних систем з розподіленими параметрами, а також розв'язки гіперболічних рівнянь у частинних похідних другого порядку з ар-

гументами нейтрального типу, що відхиляються [47, 48]. Дослідження теоретико-групового підходу в розвитку методу усереднення проводилося учнем Ю.О.Митропольського О.К.Лопатіним. Поширюючи аналітичні методи дослідження систем диференціальних рівнянь на теорію збурень, він вперше розв'язав задачу збурення на алгебрі Лі та побудував оператор проектування на алгебру централізатора системи нульового наближення, що узагальнює операцію усереднення [49, 50].

У результаті аналізу кількох варіантів асимптотичних методів Ю.О.Митропольським, А.М.Самойленком, А.І.Скрипником, П.М.Сеніком, В.Г.Самойленком сформульовано характерні особливості та закономірності асимптотичних методів і запропоновано загальну схему побудови асимптотичних розкладів, яка дозволяє розробити нові варіанти асимптотичних методів. Зокрема, на оператор усереднення і на допоміжний диференціальний оператор накладаються три додаткові умови і досліджується кільце функцій з класу  $C^\infty$ . Доведено, що дана схема містить класичний алгоритм методу усереднення, оцінено близькість точного розв'язку та його  $m$ -го наближення. Виходячи з цього, запропоновано алгоритм асимптотичного інтегрування для дослідження слабо нелінійних диференціальних рівнянь.

Таким чином, Ю.О.Митропольський продовжив і розвинув вчення М.М.Крилова та М.М.Боголюбова. Його наукові досягнення відносяться до таких напрямків: розвиток асимптотичних методів стосовно систем з повільно змінюваними параметрами, одночастотного методу для систем з багатьма степенями вільності, методу інтегральних многовидів у нелінійній механіці, методу прискореної збіжності для аналізу рівнянь нелінійної механіки, методу усереднення для нових класів систем нелінійних диференціальних рівнянь, асимптотичних методів для систем з розподіленими параметрами, асимптотичних методів аналізу

нелінійних систем з випадковими параметрами. У роботах Ю.О.Митропольського асимптотичний метод нелінійної механіки одержав узагальнення й розвиток при дослідженні нестационарних явищ, які виникають при зміні частот та інших параметрів нелінійної системи з однією та багатьма степенями вільності. Він розробив та побудував алгоритми, зручні для вивчення коливальних систем з багатьма степенями вільності, які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних і близькі до рівнянь гіперболічного типу та диференціальними рівняннями з малим параметром. Він при встановленні критерію стійкості двопараметричних сімейств частинних розв'язків отримав низку теорем. На основі методу інтегральних многовидів Ю.О.Митропольський обґрунтував одночастотний метод для нелінійних коливальних систем, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями з повільно змінюваними параметрами. Він довів теореми про існування і властивості інтегральних многовидів для нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Для нескінченного випадку довів теорему, яка обґрунтовує застосування одночастотного методу дослідження систем з розподіленими параметрами.

Результати, отримані Ю.О.Митропольським в галузі асимптотичних методів нелінійної механіки, відіграли велику роль в різноманітних галузях сучасної науки і техніки. Вони застосовуються для розрахунку сучасних прискорювачів, резонансних явищ в електричних системах, при проходженні через резонанс в роторах турбомашин, центрифугах та інших коливальних системах, зокрема для розрахунку коливальних явищ в гіроскопічних системах, орбіт супутників і траєкторій ракет, судових і газових турбін, авіаційних двигунів, турборезонансних двигунів, роторів, в теорії автоматичного регулювання, динаміці канатів, теорії

стійкості плазми в неоднорідних і змінних полях, при дослідженні руху прискорених частинок, в теоретичній радіофізиці тощо. Результати Ю.О.Митропольського отримали подальший розвиток в численних працях учених України, Росії, США, Японії, Німеччини, Франції, Угорщини, Болгарії тощо.

Ідеї і методи наукової спадщини Ю.О.Митропольського в галузі нелінійної механіки розвивались та узагальнювались його учнями. Ю.О.Митропольський опублікував понад 600 праць. Серед них чимало фундаментальних монографій, перекладених на іноземні мови.

Він є талановитим керівником школи з нелінійної механіки, засновниками якої в 30-х роках минулого століття були М.М.Крилов та М.М.Боголюбов.

Видано чимало оглядових статей М.М.Боголюбова і Ю.О.Митропольського, в яких показано широке застосування асимптотичних методів нелінійної механіки, викладено основні результати, зокрема отримані у відділі математичної фізики. Крім того, Юрій Олексійович приділяв багато уваги розширенню наукових зв'язків Інституту математики з іноземними математичними центрами, розвитку нових методів дослідження і їх прикладному спрямуванню. Йому належить ідея проведення літніх математичних наукових шкіл, створення Університету математичних знань для школярів, організації республіканських конференцій для молодих математиків. Він був керівником методологічного семінару в Інституті математики АН УРСР, на базі якого проводив всеукраїнські наукові конференції, присвячені методології математичних наук.

Таким чином, в Києві існує наукова школа Ю.О.Митропольського, яка користується великим авторитетом як на Україні, так і за її межами.

1. *Боголюбов М.О., Ликова О.Б.* Юрій Олексійович Митропольський (до 80-річчя з дня народження) // Інститут математики НАН України. Нариси розвитку. — К., 1997. — С.147—155.

2. *Мейнарович Е.В.* Юрий Алексеевич Митропольский (к 90-летию со дня рождения). — Киев: И-т математики НАН Украины, 2005. — 231 с.
3. *Три проблемы* Митропольского //Один раз в жизни: О лауреатах Ленинской премии 1965 года. — М.: АПН, 1966. — С. 267—277.
4. *Боголюбов Н.Н.* Одночастотные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. — 1949. — Т.10. — С.9—21.
5. *Митропольский Ю.А.* Собственные колебания в нелинейных системах с медленно меняющимися параметрами // Там же. — 1949. — № 11. — С.107—114.
6. *Митропольский Ю.А.* Исследование колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами // УМЖ. — 1949. — Т.1, № 2. — С. 85—98.
7. *Митропольский Ю.А.* Исследование колебаний нелинейной системы с медленно меняющимися параметрами // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. — 1950. — № 14. — С.134—144.
8. *Митропольский Ю.А.* Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы // Прикл. математика и механика. — 1950. — Т.14, № 2. — С.139—170.
9. *Митропольский Ю.А.* Вынужденные колебания в нелинейных системах при прохождении через резонанс // Инж. сб. — 1953. — Т.15. — С. 89—98.
10. *Митропольский Ю.О.* Про коливання в гіроскопічних системах при проходженні через резонанс // УМЖ. — 1953. — Т.5, № 3. — С. 333—349.
11. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1955. — 447 с. — То же. М.: Физматгиз, 1958. — 408 с.
12. *Митропольский Ю.А.* Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. — Киев: Изд-во АН УССР, 1955. — 284 с.
13. *Митропольский Ю.А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. — М.: Наука, 1964. — 431 с.
14. *Митропольский Ю.А.* О некоторых дифференциальных уравнениях, встречающихся в теории релаксационных колебаний // УМЖ. — 1957. — Т.9, № 3. — С. 296—309.
15. *Митропольский Ю.А.* Об устойчивости однопараметрического семейства решений уравнений с переменными коэффициентами // Там же. — 1958. — Т.10, № 4. — С. 389—393.
16. *Митропольский Ю.А.* О периодических решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений с недифференцируемыми правыми частями //ДАН СССР. — 1959. — Т.28, № 6. — С.1118—1121.
17. *Митропольский Ю.А.* Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных дифференциальных уравнений //УМЖ. — 1958. —Т.10, № 3. — С.270—279.
18. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике. — Киев: Изд-во АН УССР, 1961. — 126 с. — То же. Н.Н.Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Междунар симпоз. по нелинейным колебаниям (Киев, 12—18 сентября 1961 г.). — Киев, 1963. — Т.1. — С.93—154.
19. *Труды семинара по матфизике и нелинейным колебаниям.* — Киев: Изд-во АН УССР, 1963. — 172 с.
20. *Люди науки.* Юрий Алексеевич Митропольский (к 80-летию со дня рождения) / В.А.Ильин, Н.А.Изобов, А.А.Мартынюк, А.М.Самойленко // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т.33, № 1. — С. 3—5.
21. *Юрію Олексійовичу Митропольському — 90!* / В.Бар'яхтар, С.Борисенко, В.Булдигін та ін. // Київський політехнік. — 2007. — 18 січня. — С.3.
22. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Лекции по методу интегральных многообразий. — Киев: Наук. думка, 1968. — 416 с.
23. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973. — 512 с.
24. *Задирака К.В.* До питання про інтегральний багатовид нелінійної системи диференціальних рівнянь, яка містить малий параметр при деяких похідних // Вісн. КДУ. — 1959. — № 2, вип. 2. — С.45—52.
25. *Задирака К.В.* Поведение особо возмущенных нелинейных дифференциальных систем вблизи семейства цилиндров // УМЖ. — 1962. — Т.14, № 3. — С.235—249.
26. *Задирака К.В.* О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы // Там же. — 1965. — Т.17, № 1. — С.47—63.
27. *Фодчук В.И.* О существовании и свойствах интегрального многообразия одной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Там же. — 1962. — Т.14, № 2. — С. 227—231.
28. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И.* Об устойчивости интегральных многообразий для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Там же. — 1968 — Т.20, № 6. — С. 791—801.
29. *Митропольский Ю.О., Мосенков Б.І.* Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи). — К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1961. — 123 с.
30. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Міжнар. симпоз. з нелінійних коливань Міжнар. союзу з теорет. і прикл. механіки. — К.: Вид-во АН УРСР, 1963. — Т.1. — С.93—154.

31. *Асимптотические* и качественные методы в теории нелинейных колебаний. — Киев, 1971.
32. *Митропольский Ю.О., Хома Г.П.* Про принцип усереднення для гіперболічних рівнянь вздовж характеристик // УМЖ. — 1970. — Т.22, № 5. — С.588—598.
33. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Наук. думка, 1983. — 216 с.
34. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк Н.И.* Асимптотические исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. — Киев: Наук. думка, 1991. — 231 с.
35. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969. — 288 с.
36. *Рубаник В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. — Минск: Изд-во „Университетское”, 1985. — 143 с.
37. *Рубаник В.П., Фодчук В.И.* О существовании и свойствах ограниченного решения системы квазилинейных дифференциально-разностных уравнений // УМЖ. — 1962. — Т.14, № 1. — С.87—92.
38. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные тори. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
39. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
40. *Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Расщепляемость линейных расширений динамических систем на торе // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1984. — № 12. — С.23—26.
41. *Самойленко А.М., Кулик В.Л.* К вопросу о существовании функции Грина задачи об инвариантном торе // УМЖ. — 1975. — Т.27, № 3. — С.350—361.
42. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Лекции по теории колебаний с запаздыванием. — Киев: Наук. думка, 1969. — 309 с.
43. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. — Киев: Вища шк., 1974. — 247 с.
44. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 214 с.
45. *Самойленко А.М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1970. — Т.34, № 6. — С.791—801.
46. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решения краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1976. — 222 с.
47. *Ткач Б.П.* Об одном дифференциальном уравнении в частных производных с запаздывающим аргументом // Диф. уравнения. — 1967. — Т.3, № 10. — С. 1796—1800.
48. *Ткач Б.П.* О периодических решениях счетной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // УМЖ. — 1969. — Т. 21, № 1. — С.73—85.
49. *Митропольский Ю.А., Лопатин А.К.* Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики. — Киев: Наук. думка, 1968. — 372 с.
50. *Митропольский Ю.А., Лопатин А.К.* Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. — 68 с.

*Одержано 03.07.2007*

*Ю.А. Храмов, Т.В. Килоцицкая*

### **Ю.А.Митропольский и его научная школа (к 90-летию со дня рождения ученого)**

*Освещены жизненный путь и научная деятельность академика НАН Украины Ю.А.Митропольского, основные характерные его черты как научного лидера. Показаны состав, особенности, научные достижения созданной им научной школы.*