

УДК 532.528

О МЕТОДАХ РАСЧЕТА СУПЕРКАВИТАЦИИ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ДВИЖЕНИИ В ВОДЕ

Часть I. Несжимаемая жидкость

В. В. СЕРЕБРЯКОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 25.10.2001

Представлены результаты разработки приближенных методов расчета и анализ возможностей предсказания процессов обтекания и движения применительно к проблеме высокоскоростного движения тел в воде с развитой кавитацией. Рассматриваются два характерных диапазона скоростей: умеренных и сверхвысоких скоростей при числах Маха в воде $M \sim 0.5 \div 2.5$, каждому из которых соответствуют различные случаи приложений и разработанные вопросы теории. Предпочтение отдается анализу проблемы в целом на основе наиболее простых физических моделей. Рассмотрение основывается на “Метод срачиваемых асимптотических разложений” в приближении “Теории тонких тел” в комплексе также с другими приближениями и простыми эвристическими моделями с применением анализа размерностей и интегральных законов сохранения. Исследование в части I основано на модели идеальной несжимаемой жидкости. Рассматриваются и анализируются проблемы расчета удлинённых, в основном, осесимметричных стационарных и нестационарных каверн с учетом воздействия ряда факторов, а также каверн с искусственным поддувом.

Представлені результати розробки наближених методів розрахунку та аналіз можливостей передбачення процесів обтікання та руху пристосовно до проблеми високошвидкісного руху тіл у воді з розвинутою кавітацією. Розглядаються два характерних діапазони швидкостей: помірних та надвисоких швидкостей при числах Маха у воді $M \sim 0.5 \div 2.5$, кожному з яких відповідають різні випадки використання та розроблені розділи теорії. Перевага віддається аналізу проблеми в цілому на основі найбільш простих фізичних моделей. Розглядання базується на “Методі зрощуваних асимптотичних розкладень” в наближенні “Теорії тонких тіл” у комплексі також з другими наближеннями та простими евристичними моделями з застосуванням аналізу розмірностей та інтегральних законів збереження. Дослідження у частині I базується на моделі ідеальної нестисливої рідини. Розглядаються та аналізуються проблеми розрахунку видовжених в основному осесиметричних стаціонарних та нестаціонарних каверн з урахуванням впливу ряду факторів, а також каверн з штучним піддувом.

The results of development of the approximate calculations methods and analysis of possibilities of flow and motion prediction apply to bodies high speed motion in water are presented. Two characterize ranges of the speed: moderate and super high speeds for Mach Numbers in the water $M \sim 0.5 \div 2.5$, are considered where different applications and developed parts of the theory correspond every of this ranges. Preference are gave to the consideration on base of the simple physical models. Consideration is based on the “Matched Asymptotic Expansion Method” in approximation of the “Slender Body Theory” together also with another approximations and simple heuristic models with application of the dimension analysis and integral conservation laws. Investigations of the part I are based on ideal incompressible fluid model. The problems of the calculations of the prolate mainly axisymmetric steady and unsteady cavities with account of number of the factors and unsteady cavities with gas injection are considered and analyzed.

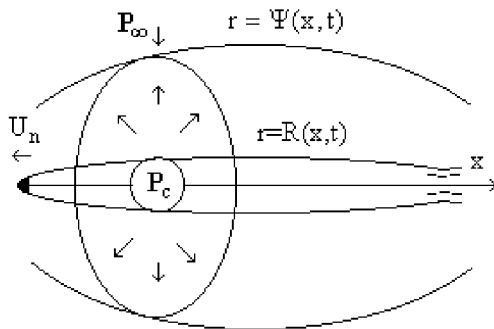


Рис. 1. Модель радіального течення

ВВЕДЕНИЕ

Применение суперкавитации позволяет, изолируя поверхность движущегося тела от воды, избежать значительных вязких потерь. При этом наименьшие значения коэффициента сопротивления C_D по миделю каверны (тела достаточно плотно вписанного в каверну) достигаются для тонких каверн. Возможности уменьшения C_D лимитируются только максимальными значениями удлинённый тел, обеспечивающих их прочность, и величиной давления, при котором происходит движение. Реально при высокоскоростном движении в воде достижимы значения $C_D \approx 0.05 \div 0.001$ и в некоторых случаях величина сопротивления может быть сравнима даже с его значениями при движении в воздухе. При сверхвысоких скоростях, реализуемых метанием малых тел массой $0.1 \div 0.5$ кг, пре-

одолеваются по инерции значительные расстояния в воде, сопоставимые с их величиной в воздухе. Физически процесс движения удлиненного суперкавитирующего тела может быть иллюстрирован простой моделью (рис. 1). В случае вытянутых каверн размеры кавитатора малы, и его сопротивление практически не зависит от формы каверны, а форма каверны не зависит от формы кавитатора и определяется только его сопротивлением. Движущийся кавитатор расталкивает неподвижную жидкость в стороны, и его сопротивление трансформируется в кинетическую энергию практически радиального вблизи каверны течения жидкости в каждом из проходимых им неподвижных сечений. Далее под воздействием разности давлений в потоке и каверне радиальное течение, образовавшееся после прохождения кавитатора, расширяется по инерции вместе с сечением каверны. Движение тела происходит в конечной каверне или в передней части достаточно большой каверны с небольшим зазором. Практически отсутствует контакт поверхности тела с каверной, но существует гидродинамическое взаимодействие небольшой задней части тела с каверной, обеспечивающей его устойчивое движение.

Реализация суперкавитационного движения связана с несколькими важными моментами. При умеренных скоростях необходимо применение искусственного поддува для возможности получения при существенном внешнем давлении достаточно вытянутых каверн, которые могли бы обеспечить достижение приемлемо малых значений C_D . Важным моментом здесь является влияние весомости, которое может значительно деформировать форму каверны и, кроме того, это воздействие существенно с точки зрения формирования течения в задней части каверны, определяющей процессы уноса газа. Возможность значительных деформаций каверны под воздействием весомости реально ограничивает применение суперкавитации при умеренных скоростях до $100 \div 200$ м/с только для сравнительно небольших объектов. При сверхвысоких скоростях начинает проявляться воздействие сжимаемости жидкости и возникают проблемы, связанные с появлением сверхвысоких значений гидродинамических напряжений и соответственно с необходимостью учета напряженно-деформированного состояния тел.

При реализации суперкавитационного движения в целом наиболее важны: возможности предсказания кавитационного течения и, в частности, надежного расчета формы и основных размеров каверн с учетом воздействия наиболее существенных факторов; механизмы формирования

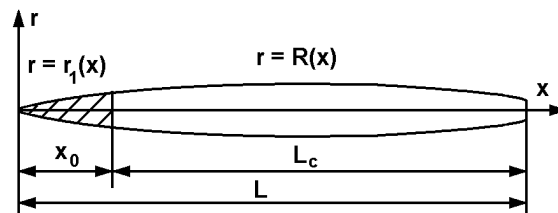


Рис. 2. Схема обтекания

сопротивления и его уменьшения, включая эффективность суперкавитационного движения в целом; возможности предсказания движения суперкавитирующих тел, проблемы стабилизации и управления суперкавитационным движением.

Возможности теории главным образом связаны с моделью идеальной несжимаемой (при сверхбольших скоростях — изэнтропически сжимаемой) жидкости. Основной является осесимметричная модель течения, при этом воздействие большей части существенных факторов связано с ее небольшими возмущениями. Наиболее эффективно именно движение в тонкой каверне, при этом вследствие быстрого нарастания боковых сил движение реально возможно по достаточно пологим траекториям. Свойства “тонкости и пологости” являются также значительным упрощающим фактором, позволяющим проанализировать большую часть сложной комплексной проблемы. Исходя из этой возможности, целью работы является попытка рассмотреть и проанализировать проблему суперкавитационного движения в целом, отмечая наиболее значимые направления исследований с выделением основных моделей и моментов, и при необходимости более детального рассмотрения отсылая к существующим публикациям.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Наиболее характерной является постановка стационарной задачи кавитационного обтекания безграничным потоком идеальной несжимаемой жидкости с использованием замыкания по схеме Рябушинского. Используется цилиндрическая система координат r, x (рис. 2). Потенциал течения φ удовлетворяет уравнению Лапласа. На заданной поверхности кавитатора $r = r_1(x)$ (и замыкания типа диска) задается условие непротекания; на неизвестной заранее поверхности каверны — условия непротекания и заданной разности давлений ΔP в невозмущенном потоке и в каверне; возмущения на бесконечности убывают до 0. Для простоты

сечение отрыва $x = x_0$ предполагается фиксированным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{(\delta^2 \ln 1/\delta)} &= 0, \\ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_\infty \frac{dr_1}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dr_1}{dx} \right]_{r=r_1(x)}, \\ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_\infty \frac{dR}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dR}{dx} \right]_{r=R(x)}, \\ r = r_1(x) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\Delta P}{\rho} \right]_{r=R(x)}, \\ \varphi \Big|_{r, x \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \\ \left[R = r_1 \right]_{x=x_0}, \quad \left[\frac{dr}{dx} = \frac{dr_1}{dx} \right]_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Эта система уравнений должна быть дополнена условием непротекания на заданном замыкании по схеме Рябушинского.

Эта модель учитывает большую часть особенностей решений рассматриваемой задачи, и ее обобщение на случай нестационарных течений в линеаризованной постановке достаточно просто. При применении гидродинамики тонких тел (ГТТ) кавитатор и каверна рассматриваются как поверхность некоторого тонкого тела с параметром тонкости $\delta \sim 1/\lambda$ (здесь λ – удлинение). При $\delta \rightarrow 0$ система уравнений упрощается и, используя известное разложение ГТТ М. Adams, W. Sears и Ф. Франкля, Е. Карповича

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^L \frac{f(x_1) dx_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + r^2}}, \quad f = U_\infty \frac{dR^2}{dx}, \\ \varphi &\approx \frac{f(x)}{2\pi} \ln r + \frac{f(x)}{4\pi} \ln \frac{1}{4x(L-x)} - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_0^L \frac{f(x_1) - f(x)}{|x-x_1|} dx_1 + O(r^2 \ln r), \quad r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

с точностью до малых $\delta^2 (\ln 1/\delta^2)$, сводится к задаче для интегро-дифференциального уравнения

(ИДУ) для формы тонкой осесимметричной каверны $r = R(x)$. В частности, в случае тонкого кавитатора $r = r_1(x)$ эта задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R^2} \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 R^2}{dx^2} \ln \frac{\beta^2 R^2}{4x(L-x)} - \\ - \int_0^{x_0} \frac{\frac{d^2 r_1^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 R^2}{dx^2}}{|x_1-x|} dx_1 - \\ - \int_{x_0}^L \frac{\frac{d^2 R^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 R^2}{dx^2}}{|x_1-x|} dx_1 - \\ - \frac{1}{x} \left(\frac{dr_1^2}{dx} \Big|_{x=0} \right) + \frac{1}{L-x} \left(\frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=L} \right) = 2\sigma, \\ \text{a) } [R = r_1(x)]_{x=x_0}, \quad \left[\frac{dR^2}{dx} = \frac{dr_1^2}{dx} \right]_{x=x_0}, \\ \text{b) } [R^2 = 0]_{x=L}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\sigma = 0.5 \Delta P / \rho U_\infty^2$ – число кавитации; $\Delta P = P_\infty - P_c$ – разность давлений в невозмущенном потоке и в каверне; U_∞ – скорость набегающего потока; ρ – массовая плотность. Сечение отрыва при $x = x_0$ для простоты предполагается фиксированным. Линеаризованный вариант условий замыкания (1.1b) при $x = L$ предполагает автоматическое замыкание каверны на некоторое малое тело. В несжимаемой жидкости $\beta = 1$, $\beta^2 = |1 - M^2|$. Под каждым из членов уравнения указаны порядки малости при $\delta \rightarrow 0$, $L = (01)$ (здесь L – длина поверхности кавитатора – каверны). Нестационарное уравнение на основе ГТТ в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial R^2}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} \ln \frac{R^2}{4[x_n(t) - x][x_c(t) - x]} - \\ - \int_{x_n(t)}^{x_s(t)} \frac{\frac{\partial^2 r_1^2}{\partial t^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2}}{|x_1-x|} dx_1 - \\ - \int_{x_s(t)}^{x_c(t)} \frac{\frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2}}{|x_1-x|} dx_1 - \frac{dx_c(t)}{dt} \frac{\partial R^2}{\partial t} \Big|_{x=x_c(t)} + \\ + \frac{dx_n(t)}{dt} \frac{\partial r_1^2}{\partial t} \Big|_{x=x_n(t)} = \frac{4\Delta P(x, t)}{\rho}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь t – время; $x_n(t)$, $x_s(t)$, $x_c(t)$ – законы движения соответственно носовой точки кавитатора, сечения отрыва струй, конца каверны.

2. ОБЗОР НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проблема исследования и предсказания суперкавитационных течений является одной из наиболее сложных задач гидродинамики с неизвестной свободной границей. Поэтому наиболее эффективным на первых этапах в 40–50-х гг. оказалось применение простых эвристических моделей, интегральных законов сохранения и теории возмущений. Начиная с работ Н. Reichardt, G. Birkhoff и др., была определена эллипсоидальная форма каверны, ее основные размеры и известная формула для наибольшего радиуса каверны R_k :

$$R_k = R_n \sqrt{\frac{c_d}{k\sigma}}, \quad (2.1)$$

где R_n – радиус кавитатора; c_d – коэффициент его сопротивления; ($k \sim 0.94 \div 1$). Была также осознана практическая независимость расширения сечений удлиненных каверн, что наиболее ясно выражено Г. В. Логвиновичем в виде известного принципа “Независимости расширения каверны”. Здесь также нужно отметить известные исследования А. Armstrong, D. Gilbarg, M. Plesset, A. May, J.-M. Michel, L. Woods и др. Значительно эффективным оказалось применение в ряде случаев плоской теории для приближенного моделирования осесимметричных течений, асимптотический подход здесь развил Р. Garabedian, получивший известную формулу для удлинения каверны λ при малых σ :

$$\lambda^2 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{1}{\sigma}. \quad (2.2)$$

Отметим также известную двухчленную асимптотику N. Levinson, M. Гуревича расширения струй на бесконечности при $x \rightarrow \infty$:

$$R^2 = 2\sqrt{c_{d\sigma}} \frac{x}{\sqrt{\ln x}} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{\ln \ln x}{\ln x} + \dots \right] \sim \frac{x}{\sqrt{\ln x}}. \quad (2.3)$$

Отмеченные результаты представляют небольшую начальную часть наиболее значимых исследований в данной области. Важными здесь являются также проблемы изучения нестационарных кавитационных течений и течений с искусственным поддувом, удара и входа в воду, глиссирования и теории крыла, течений в ограниченных потоках, включая исследования на основе плоской и близких к ней моделей и др. В то же время следует отметить достаточную ограниченность модели идеальной жидкости. Существенными являются исследования воздействия вязкости, капиллярности,

термодинамических эффектов, проблемы возникновения и начальных стадий кавитации при образовании и эволюции двухфазных областей в потоке и др. Более полная информация содержится, в частности, в работах [1–12].

Создание известной линейной теории двумерных суперкавитационных течений М. Tulin [11] значительно стимулировало развитие аналогичной линеаризованной теории осесимметричных течений на основе ГТТ, возможность применения которой отмечалась еще в работе [13]. Здесь можно отметить, в частности, исследования [14–28]. Особенно эффективным для разработки практических методов расчета кавитационных течений оказалось применение методов теории возмущений и, в частности, “Метода сращиваемых асимптотических разложений” (МСАР) совместно с интегральными законами сохранения. Начиная с работ [29, 30] и др., создана надежная теория нелинейных численных решений в основном для стационарных осесимметричных течений. В настоящее время применительно к проблеме суперкавитации наиболее эффективными можно считать методы на основе ГТТ и интегральных законов сохранения, а также методы нелинейных численных решений. В последнее время, начиная с известных работ [14, 31–33] и др., получила развитие достаточно новая область теории суперкавитационного движения при до- и сверхзвуковых скоростях в воде с учетом основных эффектов сжимаемости. Нужно отметить здесь результаты экспериментов в МГУ, а также широкомасштабные экспериментальные исследования в Институте гидромеханики НАН Украины, NUWC, USA и др. Эта область исследований находится в состоянии интенсивного развития.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ТЕЛ

Асимптотический подход

Основным содержанием асимптотического подхода применительно к суперкавитации является сведение исходных краевых задач с точностью до малых $\delta^2 \ln(1/\delta^2)$ к задачам для интегродифференциального уравнения типа (1.1), (1.2) и дальнейшей разработкой методов ее решения в асимптотических рядах по малым параметрам тонкости на основе МСАР. Важным преимуществом асимптотических решений является то, что они наиболее приспособлены к предельным ситуациям и гарантируют правильность решений, в частности, в случае очень тонких каверн при сверхбольших скоростях. Основы применения

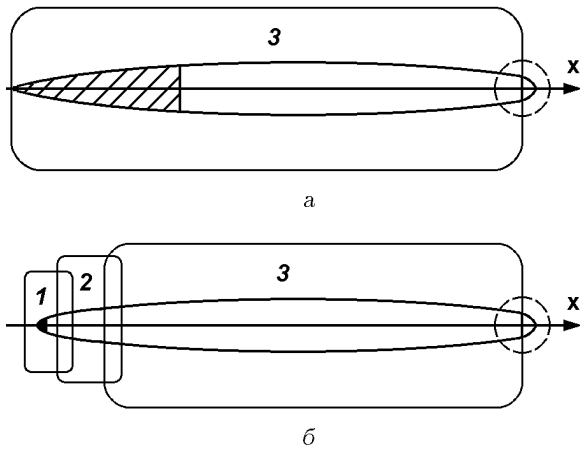


Рис. 3. Асимптотическая структура решений

МСАР для задач осесимметричной суперкавитации в приближении ГТТ были сформулированы в Институте гидромеханики АН УССР в начале 70-х годов. Ниже приводятся основные особенности этого подхода [18–27, 34].

Асимптотические решения для тонких каверн имеют сложную структуру. Поверхность кавитатора и каверны в целом можно охарактеризовать одним параметром тонкости δ . Однако реально эта поверхность состоит из двух независимых частей. В частности, в случае тонкой каверны за конусом мы можем независимо менять угол его полураствора γ и число кавитации $\sigma \rightarrow 0$, т. е. можно ввести два независимых параметра тонкости отдельно для кавитатора – ε (для конуса $\varepsilon = \text{tg } \gamma$) и δ для каверны. Практически наиболее приемлем случай решений, пригодных при достаточно произвольных соотношениях этих параметров, однако общая методика здесь пока не разработана. Достаточно хорошо развита теория асимптотических решений по одному параметру для двух характерных случаев:

регулярные возмущения:

$$\delta/\varepsilon = O(1) \quad (\sigma = O(\varepsilon^2 \ln(1/\varepsilon))), \quad L = O(1). \quad (3.1)$$

сингулярные возмущения:

$$\delta/\varepsilon \rightarrow 0 \quad (\sigma \ll \varepsilon^2 \ln(1/\varepsilon)), \quad L = O(1). \quad (3.2)$$

В обоих случаях $\sigma/\delta^2 \ln(1/\delta^2) = O(1)$. Условия (3.1), (3.2) являются параметрами подобия, определяющими условия предельных переходов и, соответственно, диапазоны пригодности решений.

Случай $\delta/\varepsilon = O(1)$ (тонкая каверна за тонким кавитатором, рис. 3, а), т. е. незначительно различающихся параметров тонкости. Длины кавитатора ℓ и каверны L_c здесь также не могут очень

сильно отличаться, $\ell/L_c = O(1)$. Здесь мы имеем в пределе эллипсоидальную каверну и можем приравнять углы наклона кавитатора и каверны в сечении отрыва струй. При этом все решение расположено во внешней области 3, и граничные условия в сечении отрыва струй не теряются.

Случай $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$ (тонкая каверна за малым кавитатором, в том числе и в случае нетонких кавитаторов типа диска). Здесь при $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом условий (3.1) кавитатор стремится стать бесконечно малым по сравнению с каверной, $\ell = O(\delta^2 \sqrt{\ln(1/\delta)})$. В пределе мы опять имеем эллипсоидальную каверну, однако не можем удовлетворить граничным условиям в сечении отрыва струй – они теряются. Решение при $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$ имеет сложную асимптотическую структуру, состоящую из трех частей (рис. 3, б). Внутреннее решение в стремящейся к нулю области 1 вблизи кавитатора, зависящее от его формы (для диска – нелинейное решение); промежуточное решение в области 2 – асимптотика типа (2.3); внешнее решение – для средней части в области 3 – возмущение эллипсоидальной каверны. Асимптотические решения ищутся в каждой из областей в рядах по $1/(\ln 1/\delta)$ (во внутренней области в случае тонкого кавитатора также по $1/(\ln 1/\varepsilon)$). Начальные условия удовлетворяются во внутренней области, и внутреннее решение является полным. Константы промежуточного решения определяются его сращиванием с внутренним решением, константы внешнего решения – сращиванием с промежуточным. Затем, используя аддитивное правило [35], строится равномерно-пригодное для всей области решение.

Асимптотические решения для обоих случаев $\delta/\varepsilon = O(1)$, $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы в различных областях δ и ε и дополняют друг друга: решения при $\delta/\varepsilon = O(1)$ справедливы, когда тонкий кавитатор не слишком мал по сравнению с длиной каверны; решения при $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы, когда кавитатор достаточно мал. Эти решения в случае тонких кавитаторов имеют некоторую пограничную зону, где могут приводить к близким результатам, однако не имеют области перекрытия. Отметим также, что асимптотические решения строятся в виде достаточно слабых по $1/\ln(1/\delta^2)$ рядов, и здесь важной является скорость убывания коэффициентов, что требует теории второго порядка. Первые члены рядов иногда дают значительную погрешность, и в аналогичных случаях можно говорить только об асимптотической структуре решения, которое, однако, можно уточнить.

Заметим, что уравнения (1.1), (1.2) имеют главную дифференциальную часть при $\delta \rightarrow 0$. Это определяет две основные альтернативы. С одной

стороны, разрабатывается технология получения асимптотических решений 2-го порядка, с другой – теория на основе аппроксимации ИДУ более простыми дифференциальными уравнениями, определяющими их главную часть. Наиболее эффективным при этом оказывается применение интегральных законов сохранения, простых эвристических моделей и других, применяемых в кавитации приближений.

Тонкая каверна за тонким кавитатором

Здесь разработаны два варианта асимптотического решения [21, 26, 34]: “полуобратный” – задаются ε и длина каверны и находится решение для σ и формы каверны; прямой – задаются ε , σ и находится асимптотическое решение для формы и размеров каверны. Являясь методологически наиболее простыми, эти подходы впоследствии получили распространение в работах ряда авторов. Ниже представлен универсальный вариант прямого подхода для решения при достаточно произвольных $r_1 = r_1(x) = \delta \tilde{r}_1(x)$, $\sigma(x) = \delta^2 (\ln 1/\beta^2 \delta^2) \tilde{\sigma}(x)$ (для вертикальной каверны $\Delta P(x) = \Delta P_o \pm \rho g x$, g – ускорение силы тяжести) и способе задания δ . С учетом условий (3.1) решение ищется на основе уравнений (1.1) в виде рядов для формы и длины каверны, $x=0$ в сечении отрыва, (длина кавитатора $\ell=1$):

$$R^2 = \delta^2 \left[\tilde{R}_o^2 + \frac{1}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} \tilde{R}_1^2 + \dots \right],$$

$$L_c = L_o + \frac{1}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} + \dots, \quad (3.3)$$

и сводится к последовательности краевых задач, две из которых есть

$$\frac{d^2 \tilde{R}_o^2}{dx^2} = -2\tilde{\sigma}(x), \quad \left[\frac{d\tilde{R}_o^2}{dx} = \frac{d\tilde{r}_1^2}{dx} \right]_{x=0}$$

$$[\tilde{R}_o^2 = \tilde{r}_1^2]_{x=0}, \quad [\tilde{R}_o^2 = 0]_{x=L_o}; \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 \tilde{R}_1^2}{dx^2} = \frac{1}{2\tilde{R}_o^2} \left(\frac{d\tilde{R}_o^2}{dx} \right)^2 +$$

$$+ \frac{d^2 \tilde{R}_o^2}{dx^2} \ln \left(\frac{\tilde{R}_o^2}{4(1+x)(1-L_o)} \right) -$$

$$- \int_{-1}^0 \frac{d^2 \tilde{r}_1^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 \tilde{R}_o^2}{dx^2} dx_1 -$$

$$- \int_0^{L_o} \frac{d^2 \tilde{R}_o^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 \tilde{R}_o^2}{dx^2} dx_1 -$$

$$- \frac{d\tilde{r}_1^2}{dx} \Big|_{x=-1} + \frac{d\tilde{R}_o^2}{dx} \Big|_{x=L_o}, \quad (3.5)$$

$$\frac{d\tilde{R}_1^2}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \tilde{R}_1^2 \Big|_{x=0} = 0.$$

Решение находится в виде двух членов ряда:

$$R^2 = R_o^2 + \frac{1}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} R_1^2 =$$

$$= \varepsilon^2 (1 + 2mx) - \int_0^x (x - x_1) \frac{2\sigma(x_1)}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} dx_1 + \quad (3.6)$$

$$+ \frac{1}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} \int_0^x (x - x_1) \frac{d^2 R_1^2}{dx^2} dx_1.$$

В случае конуса ($r_1^2 = \varepsilon^2 (x-1)^2$, $\varepsilon = \text{tg } \gamma$, $m=1$) при $\sigma = \text{const}$, $\delta = \varepsilon$ решение (3.6) имеет вид

$$R_o^2 = \varepsilon^2 (1 + 2x) - \frac{\sigma}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} x^2 = \varepsilon^2 (1 + 2x - \sigma_\varepsilon x^2),$$

$$\frac{d^2 R_1^2}{dx^2} = \varepsilon^2 \sigma_\varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \frac{(L_m - x)^2}{(L_f + x)(L_o - x)} - \right.$$

$$\left. - 2 \ln \frac{\sigma_\delta (L_f + x)}{4(1+x)} - 2 \frac{1 + \sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \ln \frac{1+x}{x} - \frac{L_e}{L_o - x} \right\},$$

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\sigma}{\varepsilon^2 \ln 1/(\beta^2 \delta^2)}, \quad \sigma_\delta = \frac{\sigma}{\delta^2 \ln(1/\beta^2 \delta^2)},$$

$$L_o = \frac{\sqrt{1 + \sigma_\varepsilon} + 1}{\sigma_\varepsilon}, \quad L_f = \frac{\sqrt{1 + \sigma_\varepsilon} - 1}{\sigma_\varepsilon},$$

$$L_m = \frac{2}{\sigma_\varepsilon}, \quad L_e = 2 \frac{\sqrt{1 + \sigma_\varepsilon}}{\sigma_\varepsilon}. \quad (3.7)$$

Решения типа (3.6) во многих случаях получаются аналитически. Но здесь удобно использовать численное интегрирование выражений (3.7), что позволяет рассчитать большинство важных случаев. Для теста получено аналитическое решение для конуса [21, 26, 34]. Решение (3.6) пригодно при различном задании параметров тонкости. Здесь можно использовать выражение $\delta = 1/\lambda$, учитывающее удлинение поверхности кавитатора и каверны в целом, однако наиболее эффективно использовать параметры, связанные или с кавитатором, или с каверной, типа

$$\text{a) } \delta = \varepsilon, \quad \text{b) } \sigma = \delta^2 \ln 1/\beta^2 \delta^2, \quad (3.8)$$

В случае б) появляется возможность расчета не очень тонких, а также донных каверн и др. Аналогично выражениям (3.3) – (3.7) находятся решения при переменном давлении, включая вертикальную каверну, и др., и на основе выражения (1.2) [22]

разработан аналогичный метод расчета нестационарных каверн [26]. Предельное решение здесь – эллипсоид:

$$R^2 = \left\{ \varepsilon^2(1+2x) - \frac{\sigma}{\ln(1/\beta^2\delta^2)} x^2 \right\}_{\sigma \rightarrow 0} \rightarrow 2\varepsilon^2 x. \quad (3.9)$$

При заданном кавитаторе и значительном увеличении каверны при $\sigma \rightarrow 0$, соответствующем нарушению условий (3.1) вместо асимптотики (2.3) при $x \rightarrow \infty$ имеем параболоид в (3.9), что объясняет причину непригодности решений при нарушении ограничений (3.1). В случае $\delta/\varepsilon = O(1)$, имея два независимых параметра ε и σ , решение строится по одному из них. Однако при любом задании δ все эти решения с учетом условий (3.1) с точностью до малых высшего порядка представляют семейство асимптотически эквивалентных решений, и никаким выбором параметра тонкости нельзя преодолеть условия (3.1). Вследствие слабой особенности в сечении отрыва здесь возможно только два приближения. Точность решения (3.7), в сравнении с нелинейным численным расчетом Ю. Кузнецова, Г. Петрова, А. Родионова иллюстрирует рис. 4.

Каверны при $\sigma = 0$

Эти решения важны применительно к движению в переднем участке больших каверн, определяя форму их передних участков, не меняющуюся в процессе движения. Они также задают блок внутреннего и промежуточного решений для построения равномерно пригодных решений для тонкой каверны за малым кавитатором, включая диск.

Промежуточные уравнение и решение. Теория 2-го порядка по δ требует в общем случае не менее трех членов разложения типа (2.3). На основе уравнения (1.1) выделяется промежуточное уравнение и его трехчленное решение при $x \rightarrow \infty$ [24, 26]:

$$\frac{1}{2R^2} \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2R^2}{dx^2} \ln \frac{\beta^2 R^2}{4x^2} - \frac{1}{x} \frac{dR^2}{dx} = 0, \quad (3.10)$$

$$R^2 = \frac{2\sqrt{c_{do}} x}{(\ln x)^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\ln \ln x}{\ln x} + \frac{\sqrt{c_{do}} \ln(\varepsilon\beta^2/2)}{2 \ln x} + \dots \right). \quad (3.11)$$

Отметим здесь также работу [15].

Каверны за тонкими кавитаторами. Здесь предельное равномерно пригодное решение (внутреннее и промежуточное), получаемое на основе (1.1), (3.10) по параметру тонкости кавитатора ε , связано с его формой только посредством пара-

метра m и имеет вид

$$\begin{aligned} \text{a) } R^2 &= \varepsilon^2 \left[\frac{2mx}{(\tilde{s})^{1/2}} + (1-2m) \right], & \text{b) } \tilde{s} &= \frac{\ln(x/\varepsilon^2)}{\ln(1/\varepsilon^2)}, \\ \text{c) } R^2 &= \varepsilon^2 \left[2x \left(\frac{\ln(1/\varepsilon^2)}{\ln(x/\varepsilon^2)} \right)^{1/2} - 1 \right]_{x \rightarrow \infty} \sim \frac{x}{(\ln x)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для конуса $m=1$ решение имеет вид (3.12, c). Здесь $x=0$ в носовой точке, длина конуса $\ell=1$. При $\beta=O(1)$ два члена ряда для конуса $M < 1$ будут:

$$\begin{aligned} R^2 &= \varepsilon^2 \left\{ \left[\frac{2x}{\sqrt{\tilde{s}}} - 1 \right] + \frac{1}{\ln(1/\beta^2\varepsilon^2)} \times \right. \\ &\times \left[\left(\frac{2x-1}{2} \ln(2x-1) + (x-1)^2 \ln(x-1) - x^2 \ln x \right) + \right. \\ &+ \left(\frac{x \ln(4/(\beta^2\varepsilon^2))}{\sqrt{\tilde{s}}} - \frac{1}{2} \frac{x \ln \tilde{s}}{\tilde{s}\sqrt{\tilde{s}}} + \frac{x \ln(\beta^2\varepsilon/2)}{\tilde{s}\sqrt{\tilde{s}}} \right) - \\ &\left. \left. - \left(x \ln(2/\varepsilon) - x \ln x \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для конуса решение достаточно точно определяется уже первым членом ряда.

Каверны за кавитатором типа диска. Внутреннее решение вблизи кавитатора типа диска является составной частью широкого класса решений для стационарных и нестационарных каверн. Область этого решения существенно нелинейна, однако здесь может быть найдено хотя и недостаточно строгое полуэмпирическое, но простое эффективное решение. Предполагая, что оттекание здесь близко к течению около параболоида, промежуточное уравнение (3.10) путем преобразования переменной x превращается в точное выражение для распределения давления на поверхности параболоида. При этом задача для внутреннего и промежуточного участка и решение первого приближения получаются в виде

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{dR^2}{dx} &= \frac{2\sqrt{c_{do}}R_n}{\sqrt{\ln \frac{4(x+\Delta)^2}{\beta^2 R^2}}} \rightarrow \frac{2R_n\sqrt{c_{do}}}{\sqrt{\ln x}}, \\ R^2|_{x=0} &= R_n^2, \quad \Delta = \frac{R_n}{2} \left(\sqrt{c_{do}} + \frac{1}{\sqrt{c_{do}}} \right), \\ \text{b) } R_0^2 &= 1 + 2\sqrt{c_{do}} x / \sqrt{\ln \frac{4(x+\Delta)^2}{\beta^2(1+2\sqrt{c_{do}}x)}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Зависимости (3.14) пригодны для оценки в случае нетонких кавитаторов различной формы, а также при нефиксированном сечении отрыва струй. В решении первого приближения (3.14b) все величины обезразмерены относительно радиуса кавитатора R_n в сечении отрыва. Рис. 5 иллюстриру-

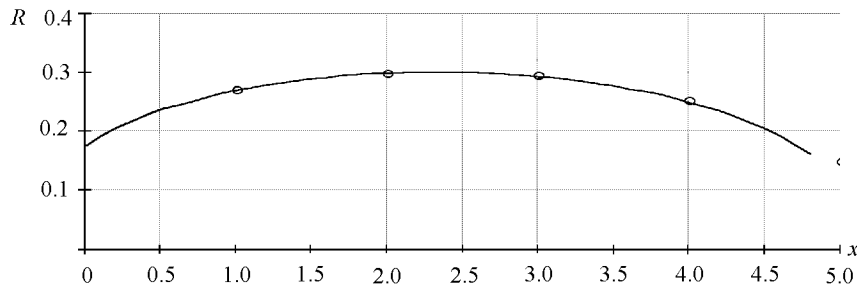


Рис. 4. Тонкая каверна за тонким конусом, $\sigma=0.04$, $\gamma=10^\circ$:

— по формуле (3.7) при $M=0$, $\circ \circ \circ$ - нелинейный численный расчет при $M=0$

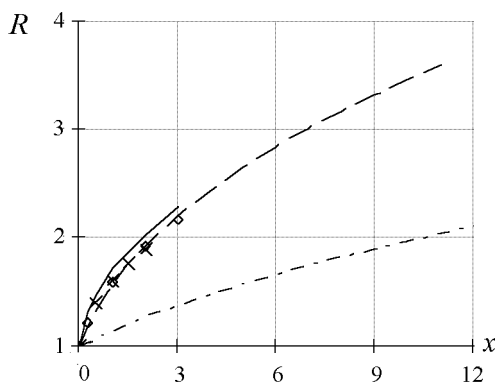


Рис. 5. Передние участки каверн:

— — — диск, решение (3.14, b) на основе ГТТ,
 — диск, нелинейный численный расчет [30],
 $\diamond \diamond \diamond, \times \times \times$ - диск, эксперименты [4] и [29],
 - · - · конус $\gamma=10^\circ$, решение (3.12) на основе ГТТ

ет точность расчета по уравнениям (3.14) в сравнении с экспериментальными данными и нелинейным численным расчетом [4, 29, 30].

Тонкая каверна за малым кавитатором

Наиболее подробно рассматривается решение стационарной задачи обтекания для кавитаторов типа диска при заданном давлении в каверне, включая получение внешнего и промежуточного разложений, их сращивания и получения равномерно пригодного решения. Эти результаты при $\sigma = \text{const}$ являются основой для разработки методов расчета стационарных и значительно более многовариантных нестационарных течений для большинства случаев обтекания и наиболее ясно демонстрируют большую часть особенностей подобных решений.

Внешнее решение описывает среднюю наибольшую часть каверны и в большинстве случаев достаточно для оценки ее формы, размеров, объема и др. Пренебрегая размерами кавитатора $O(\delta^2 \sqrt{\ln 1/\delta^2})$ и предполагая полудлину каверны

$L_k = 1$ заданной (в дальнейшем ее величина находится сращиванием), задача для уравнения (2.1) будет иметь вид:

$$\frac{1}{2R^2} \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 R^2}{dx^2} \ln \frac{\beta^2 R^2}{4(1+x)(1-x)} - \int_{-1}^1 \frac{d^2 R^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 R^2}{dx^2} dx_1 - \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=-1} + \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=1} = 2\sigma(x),$$

$$[R^2(x) = 0]_{x=-1}, \quad [R^2(x) = 0]_{x=+1}.$$

Решение при $\sigma = \sigma(x)$ ищется в виде

$$R^2 = \delta^2 [R_0^2 + R_{-1}^2 (\ln(1/\beta^2 \delta^2))^{-1} + \dots]. \quad (3.16)$$

Здесь разработаны два основных варианта решения [18, 25, 26]. В первом решение ищется в предположении заданных удлинения каверны λ и зависимости $\delta^2 = \delta^2(\lambda^2, \beta^2)$, и затем из решения в виде ряда определяется $\sigma = \sigma(\lambda^2)$. Во втором варианте предполагается заданными σ и некоторая возможная зависимость $\sigma = \sigma(\delta^2, \beta^2)$, и из решения определяется асимптотическое разложение $\lambda^2 = \lambda^2(\delta^2, \sigma)$. В частности, при $\sigma = \text{const}$ решение в виде двух членов ряда, пригодное при различных вариантах задания δ (но при $\sigma/\delta^2 \ln 1/\delta^2 \rightarrow 1$) будет:

$$R^2 = \frac{\sigma}{\ln(1/\delta^2)} \left[(1-x^2) + \frac{(1-x^2) + x^2 \ln 4 - \ln(1+x)^{(1+x)} \ln(1-x)^{(1-x)}}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} \right],$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda^2} \ln \frac{1}{e \beta^2 \delta^2}. \quad (3.17)$$

Первым в рядах по параметру тонкости было решение при $\sigma = \text{const}$ по λ , получающееся из общего

решения (3.17) при $\delta = 1/\lambda$, $\beta = 1$ [18]:

$$R^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left[(1-x^2) + \frac{x^2 \ln 4 - \ln(1+x)^{(1+x)} \ln(1-x)^{(1-x)}}{\ln \lambda^2} \right], \quad (3.18)$$

$$\sigma = \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Срачивание, размеры каверн. Срачивание решений (3.11), (3.17) определяет зависимости второго порядка для наибольшего радиуса R_k и полу-длины каверны L_k [24–27]:

$$R_k^2 = R_n^2 \frac{c_d}{\sigma} \left[1 + 2 \frac{\ln(2/\sqrt{\epsilon})}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} \right], \quad (3.19)$$

$$L_k = R_n \frac{\sqrt{c_d \ln(1/\beta^2 \delta^2)}}{\sigma} \left[1 - \frac{\ln(\epsilon/2)}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} \right].$$

Асимптотически эквивалентная зависимость для длины каверны L_k также получена вариационным методом А. Петровым, что подтверждает теорию.

Структура равномерно пригодных решений. С учетом срачивания динамика построения предельного равномерно пригодного (промежуточное плюс внешнее, обезразмеривание по R_n) решения имеет вид [24]:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{R}^2 &= 2\sqrt{c_{do}} \frac{\bar{x}}{\sqrt{\ln \bar{x}}}, & \text{b) } \bar{R}^2 &= c\bar{x} - \frac{\sigma}{\ln(1/\sigma)} \bar{x}^2, \\ \text{c) } \bar{R}^2 &= 2\sqrt{c_{do}} \frac{\bar{x}}{\sqrt{\ln \bar{x}}} - \frac{\sigma \bar{x}^2}{\ln(1/\sigma)} \Big|_{\bar{x} \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\bar{x}}{\sqrt{\ln \bar{x}}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь получены решения 2-го порядка для обычных [25], вертикальных и других каверн. Возможности улучшения точности решения, особенно для недостаточно тонких каверн, зависят от выбора δ , здесь применимы зависимости

$$\begin{aligned} \text{a) } 1/\delta^2 &= \lambda^2 [1 + 1/\ln(\lambda^2/\beta^2)], \\ \text{b) } \sigma &= \delta^2 \ln(1/\beta^2 \delta^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

При этом применение разложения по параметру $\delta \sim 1/\lambda$, особенно при определении R_k , оказывается недостаточно эффективным. В частности, на основе (3.21a) зависимость (3.17) принимает вид:

$$\lambda^2 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\lambda^2 (1 + 1/\ln(\lambda^2/\beta^2))}{\epsilon \beta^2}. \quad (3.22)$$

Зависимости для расчета размеров каверн за кавитаторами типа диска. Для практических расчетов имеется ряд приближенных зависимостей, тщательно проверенных большим количеством экспериментов [4,10], а также нелинейным численным расчетом [30] и др. Наиболее удобны прямые

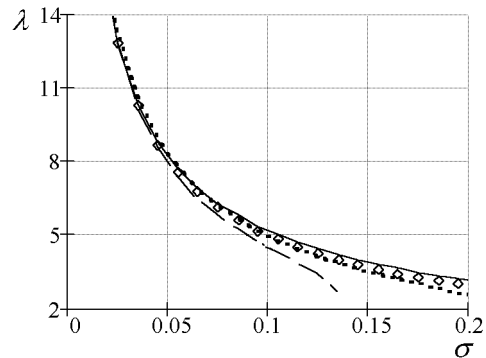


Рис. 6. Зависимости λ от σ на основе ГТТ:

— по формуле (3.23, ϵ),
 - - - по формуле (3.18),
 ···· по формуле (3.22),
 ♦♦♦ - нелинейный численный расчет [30]

зависимости от σ . Асимптотические аппроксимации, пригодные в достаточно широком диапазоне (начиная с $\lambda \sim 3 \div 5$ и до очень тонких каверн) для наибольшего радиуса R_k , полу-длины L_k и удлинения обычной стационарной каверны постоянного давления λ , имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{a) } R_k &= R_n \frac{\sqrt{c_d}}{\sqrt{k\sigma}}, & \text{b) } L_k &= R_n \frac{\sqrt{c_d 2\mu/k}}{\sigma}, \\ \text{c) } k &= 1 / \left[1 + 2 \frac{\ln(2/\sqrt{\epsilon})}{\ln(5/\beta^2 \sigma)} \right], & & (3.23) \\ \text{d) } \mu &= \frac{1}{2} \ln \frac{4/\epsilon}{\beta^2 \sigma} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{1.5}{\beta^2 \sigma}, \\ \text{e) } \lambda^2 &= \frac{2\mu}{\sigma}, & \lambda^2 &= \frac{1}{\sigma} \ln \frac{4/\epsilon}{\beta^2 \sigma} \approx \frac{1}{\sigma} \ln \frac{1.5}{\beta^2 \sigma}. \end{aligned}$$

Здесь, исходя из преимущества разложения типа (2.2), асимптотические зависимости первого приближения по σ улучшаются путем осреднения членов высших порядков. В частности, уточнение зависимости типа (2.2) получается в виде (3.23, ϵ).

На рис. 6, 7 представлены результаты расчета этих зависимостей для $\lambda(\sigma)$, $\mu(\sigma)$ и $k(\sigma)$ при $\beta = 1$ в сравнении с данными нелинейного численного расчета обычной стационарной каверны за диском при замыкании по схеме Рябушинского [30]. При этом рис. 6 иллюстрирует существенное улучшение точности зависимости (3.22) для λ в случае не очень тонких каверн в сравнении с (3.18) при $\delta = 1/\lambda$, что важно как тенденция при построении нестационарных решений и особенно существенно для зависимости R_k , где эти результаты заметно улучшаются также в случае параметра (3.21b).

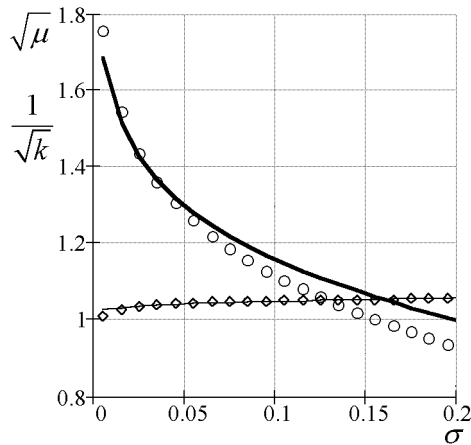


Рис. 7. Медленно меняющиеся параметры:

— — зависимость для μ (3.23, d),
 - - - - зависимость для k (3.23, c),
 нелинейный численный расчет [30]:
 ○ ○ ○ - $\mu = 0.5\lambda^2\sigma$, ◇ ◇ ◇ - k

4. РАСЧЕТ УДЛИНЕННЫХ КАВЕРН НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Дифференциальное уравнение тонкой осесимметричной каверны

ИДУ тонкой осесимметричной каверны типа (1.1), (1.2) и, соответственно (3.15), имеют главную при $\delta \rightarrow 0$ дифференциальную часть. Основной идеей здесь является возможность наилучшей в определенном смысле аппроксимации ИДУ во внешней области более простым дифференциальным уравнением, используя для получения начальных условий вместо сращивания теорему энергии. Система уравнений для определения формы тонкой каверны за малым кавитатором имеет вид [19]

$$\mu \frac{d^2 R^2}{dx^2} + \frac{\Delta P(x)}{\rho U_\infty^2 / 2} = 0, \quad (4.1)$$

$$R^2|_{x=0} = 0, \quad \frac{dR^2}{dx}|_{x=0} = 2\sqrt{\frac{D}{k\pi\mu\rho U_\infty^2}}.$$

Решение (4.1) при $\sigma = \text{const}$ определяет известные эллипсоидальную каверну и зависимость для R_k :

$$R^2 = R_n \sqrt{\frac{2cd}{k\mu}} x - \frac{\sigma}{2\mu} x^2, \quad (4.2)$$

$$R_k = R_n \frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{k\sigma}}, \quad L_k = R_n \frac{\sqrt{cd2\mu/k}}{\sigma}, \quad \lambda^2 = \frac{2\mu}{\sigma}$$

При этом выражения для R_k , L_k , λ полностью совпадают с выражениями (3.23 а, b, e). Здесь μ имеет ясный физический смысл инерционного коэффициента при расширении сечений каверны. Уравне-

ние (4.1) представимо в энергетическом виде:

$$k\pi \frac{\mu\rho}{4} U_\infty^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \pi \frac{dR^2}{dx} \Delta P(x) = 0, \quad (4.3)$$

$$kE_k + E_p = k\pi \frac{\mu\rho}{4} U_\infty^2 \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \pi R^2 \Delta P = D, \quad (4.4)$$

$$E_k = \pi \frac{\mu\rho}{4} U_\infty^2 \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 \Big|_{x=0} = \frac{D}{k}, \quad (4.5)$$

а при $\sigma = \text{const}$ выражает сохранение кинетической энергии радиального течения E_k и потенциальной E_p в каждом из ее сечений (4.4), где k определяет величину продольного переноса энергии в жидкости. Первое начальное условие определяется из соотношения (4.5), во втором пренебрегается размерами кавитатора. Значения μ и k выбираются из условий наилучшей аппроксимации на основе зависимостей второго приближения и обычно так, чтобы решение определяло длину и наибольший радиус каверны с учетом специфики конкретного случая. Для каверн, даже существенно отличающихся от каверны при $\sigma = \text{const}$, эффективны зависимости типа (3.23 d).

Удлиненные нестационарные каверны

Независимость расширения и деформаций сечений пространственных удлиненных каверн, сформулированная Г. Логвиновичем в виде известного принципа “Независимости расширения каверны” [4], является основой простых универсальных методов расчета в большинстве практических случаев обтекания.

Уравнения независимости расширения сечений нестационарной каверны переменного давления. Важной особенностью стационарных решений для тонких каверн есть то, что величины μ и k являются достаточно слабыми функциями удлинения, а величины перетока энергии вдоль жидких сечений $k \sim 0.95 \div 1$ пренебрежимо малы. Это иллюстрируется рис. 7 для величин, определяющих основные размеры каверны. Однако, вместо полной независимости реально существует достаточно слабая зависимость расширения сечений в наибольшей степени от удлинения, а также от специфики конкретного случая обтекания. С учетом слабой зависимости для μ и k аналогично уравнению (4.1) нестационарные уравнения в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью, имеют вид [18, 23, 34]

$$\mu \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} + 2 \frac{\Delta P(x, t)}{\rho} = 0, \quad (4.6)$$

$$R^2|_{t=t_n(x)} = 0, \quad \frac{\partial R^2}{\partial t} \Big|_{t=t_n(x)} = 2\sqrt{\frac{D(x)}{k\pi\mu\rho}}.$$

Здесь сопротивление $D(x)$ в виде квазистационарной зависимости определяет его значения

в момент прохождения неподвижного сечения x . С учетом наиболее важного диапазона удлинений $\lambda \sim 5 \div 20$ здесь обычно принимается значение $\mu \sim 2$. Более точно в качестве базового используются значения $\mu = \mu(x)$ на основе стационарной зависимости, в частности $\mu \approx 0.5 \ln(1.5/\beta^2 \sigma)$ при квазистационарном значении σ в момент прохождения сечения неподвижной жидкости. Разработаны способы более точной оценки μ [25] для различных случаев обтекания: с ускорением, вертикальных каверн и др.

Эллипсоидальная форма каверны получена ранее в работах [1, 4] на основе энергетического подхода. При этом для практического расчета передняя часть каверны аппроксимируется на основе экспериментальных данных, и это решение применяется, начиная с определенного сечения согласования [4]. Уравнения (4.1), (4.6), в отличие от известной эвристической модели для стационарных каверн постоянного давления [1], уже позволяют рассчитывать более широкий класс каверн переменного давления. Уравнения (4.6) уже на основе стационарных зависимостей для μ пригодны для оценки каверн, значительно отличающихся от нестационарных, и дают правдоподобную качественную картину даже при скачкообразных изменениях скорости и сопротивления кавитатора. Они неоднократно проверялись, и их точность лежит в пределах $5 \div 7$ %. Небольшой участок вблизи диска, сохраняющий свою форму в большинстве случаев обтекания, легко достраивается на заключительном этапе расчета. Эти уравнения впервые позволили рассчитать ряд нестационарных каверн переменного давления и используются в теории пульсаций каверн и нестационарных каверн с искусственным поддувом.

Характерные осесимметричные решения.

Здесь получено значительное количество аналитических решений для случаев движения при переменных скорости и сопротивлении кавитатора, при переменном давлении, меняющемся по линейному, скачкообразному, дельтообразному, синусоидальному законам, для вертикальных каверн. Получены также решения для оценки воздействия слабого взрыва и ударной волны на форму каверны и др. [23] При постоянном по t давлении решение универсально:

$$R^2 = 2 \sqrt{\frac{D(x)}{k\pi\mu(x)\rho}} [t - t_n(x)] - \frac{\Delta P(x)}{\rho\mu(x)} [t - t_n(x)]^2. \quad (4.7)$$

При воздействии синусоидального давления

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_o + \sigma_s \sin \nu t, \\ R^2 &= \frac{\sigma_o}{2\mu} [x(2-x)] + \frac{\sigma_s}{\mu\nu^2} \times \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\times [\sin \nu t + \sin \nu(-t+x) - \nu x \cos \nu(-t+x)]$$

на каверне возникают продольные волны. Здесь подвижная система координат, $x=0$ в носике, обезразмеривание относительно полудлины каверны при σ_o . При скачкообразном изменении скорости или сопротивления кавитатора форма каверны терпит разрыв, но не имеет его при скачкообразном изменении давления. Наиболее опасно дельтообразное изменение давления, вызывающее также дельтообразное выпучивание каверны внутрь, которое может быть причиной замыыва.

Воздействие продольного поля сил тяжести при погружении рассматривалось в ряде работ, отметим, в частности, [36, 37]. и др. Форма удлиненной каверны за кавитатором типа диска при некотором постоянном давлении как при погружении, так и при всплывании (4.9a) оценивается интегралом (4.7) (ось x направлена вниз, $\Delta P_o = \Delta P/x = 0$):

$$\begin{aligned} \text{a) } R^2 &= 2 \sqrt{\frac{D(x)}{k\pi\mu(x)\rho}} [t - t_n(x)] - \\ &\quad - \frac{\Delta P_o \pm \rho g x}{\rho\mu(x)} [t - t_n(x)]^2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\text{b) } \bar{R}^2 = \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu}} x - \frac{\sigma_o}{2\mu} x^2 \mp \frac{1}{3\mu Fr^2} x^3,$$

$$\text{c) } \sigma Fr_L^2 = 4/3.$$

Решение (4.9 b) записано в подвижной системе координат \bar{x}/R_n , $\sigma_o = \sigma|_{x=0}$, $Fr^2 = U_\infty^2/gR_n$, в зависимости (4.9 c) Fr_L – число Фруда по длине каверны.

Стационарные вертикальные каверны – это случай каверн переменного давления. Отметим здесь известные работы А. Acosta, С. Leno-R. Street, О. Киселева, а также известные эксперименты С. Гульнева–Е. Капанкина и др. Здесь форма каверны (4.9b) легко оценивается уравнениями (4.1), но существенным является применение более точных значений μ . Интересна возможность отрицательных значений чисел кавитации в передних сечениях каверн при всплывании. Важно также соотношение (4.9c) [38], определяющее каверны двух характерных форм – с задним или передним “заострением”. В первом случае физически это соответствует нулевым значениям кинетической энергии в заднем сечении и соответственно нулевым потерям энергии в след, во втором – возможности образования каверны при нулевых значениях сопротивления кавитатора.

Неосесимметричные деформации каверн. Наиболее эффективна оценка всплывания h сечений каверны под воздействием различных факторов с

помощью теоремы импульсов [4]. В частности, для кавитатора под углом атаки при боковой силе D_y это – h_α , в поперечном поле сил тяжести – h_g :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad h_\alpha &= -\frac{D_y}{\pi \rho U_\infty^2} \int_0^x \frac{dx}{R_0^2(x)}, \\ \text{b)} \quad h_g &= \frac{g}{\pi U_\infty^2} \int_0^x \left[\frac{1}{R_0^2(x)} \int_0^x R_0^2(x) dx \right] dx. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Постановка задачи предсказания малых пространственных возмущений тонких осесимметричных каверн под воздействием различных факторов представлена в [4], наиболее общая теория разработана в [36]. Существенные уточнения теории сделаны В. Ворониным, ряд результатов получен также в работах А. Болотина, В. Буйвола, Г. Субханкулова и др. Отметим исследования в этой области М. Tulin, Q. Ye-Z. Cheng.

Каверны в поперечном поле сил тяжести. Важной является зависимость (4.11 а) для минимальных чисел кавитации [4], связанная с ограничением на уменьшение возможных значений разности давлений вблизи верхней поверхности каверны, а также зависимость для всплывания, позволяющая оценить интенсивность деформаций каверны. Здесь, в частности, удобна зависимость (4.11b) [36]:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sigma_{\min} &= \frac{2gR_k}{U_\infty^2}, \\ \text{b)} \quad h_g &= 0.33 \left(\frac{x}{L_k} \right)^2 \frac{gL_k}{U_\infty^2} L_k. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В настоящее время в этой области имеется достаточно разработанная теория, позволяющая предсказывать основные размеры и форму возмущенных каверн.

5. РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КАВЕРН ЗА КАВИТАТОРАМИ ТИПА ДИСКА

Ряд задач суперкавитации не может быть решен в рамках линеаризованных моделей, поэтому нелинейный численный расчет занимает особое место. С учетом малости зазоров между телом и каверной важна проблема точного расчета каверны, в первую очередь в классической постановке на основе модели идеальной несжимаемой жидкости, в частности, в случае диска с замыканием по схеме Рябушинского. Однако при этом нужно учитывать, что реальная жидкость не идеальна, и в районе срыва могут быть значительными эффекты вязкости и капиллярности. Вязкость также существенна для формирования задней части каверны, где в большинстве случаев реализуется непотенциальное хаотическое течение,

далекое от течения в схеме Рябушинского, с существенной потерей давления в области смыкания струй. Тем не менее, даже в этих условиях возможность более точного нелинейного расчета на основе идеальной модели является важной, но в силу неидеальности реальных течений ограничена определенными пределами. Отметим здесь известные работы [29, 30]. К настоящему времени в области нелинейного численного расчета, в основном стационарных течений, накоплен значительный опыт в работах Е. Амромина и А. Иванова, В. Бушковского, Е. Block. Л. Кожуро, Ю. Дейнекина, Р. Jeppson, В. Шепеленко, А. Терентьева и Н. Дмитриевой, Г. Тодорашко, Ю. Зуйкова и др. Отметим также работу [39]. Важным является то, что решение имеет сложную нелинейную структуру, и приходится одновременно с решением конкретной задачи преодолевать также и непростую проблему достижения необходимой точности. Особенно существенно это в более многовариантном случае нестационарного обтекания по сравнению со стационарной каверной. Применение уравнений (4.6) позволяет достаточно надежно оценить форму и размеры каверн, но оно достаточно грубо для описания всей каверны в целом. Исходя из этого здесь последовательно разрабатывается идея эффективной аппроксимации ИДУ более простым дифференциальным уравнением, пригодным во всей области решения, в том числе и в районе диска. При этом особенности конкретного случая обтекания учитываются на основе внешнего разложения этого уравнения и определения на этой основе интегральной части ИДУ. В частности, в случае нестационарных течений система уравнений (4.6) уточняется аналогично (3.14) и позволяет рассчитывать широкий класс нестационарных каверн. Форма этих каверн может значительно отличаться от стационарной, на основе которой обычно берутся значения малой поправки k :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sqrt{\mu(x,t)} \frac{\partial R^2}{\partial t} \right] + \frac{1}{\sqrt{\mu(x,t)}} \frac{2\Delta P(x,t)}{\rho} = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} \Big|_{t=t_n(x)} = 2\sqrt{\frac{D(x)}{k(x)\rho\mu_n}}, \quad R^2 \Big|_{t=t_n(x)} = R_n^2, \quad (5.2)$$

$$R^2 \Big|_{t=t_c(x)} = R_n^2, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \mu(x,t) &= \frac{1}{2} \ln \frac{4[(x_n + \Delta) - x]^2 [x - (x_c + \Delta)]^2}{\beta^2 R^2 [x_n - x_c + 2\Delta]^2} \times \\ &\times \left[1 - \frac{0.4[x_n - x][x - x_c]}{[x_n - x_c]^2} \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\mu_n = \ln \frac{2\Delta}{\beta R_n}, \quad \Delta = \frac{R_n}{2} \left(\sqrt{c_d} - \frac{1}{\sqrt{c_d}} \right). \quad (5.5)$$

Здесь решение ищется на основе задачи для простого дифференциального уравнения (5.1) и начальных условий (5.2) при зависимостях величин,

входящих в уравнения (5.4), (5.2), и условия типа (5.3) для определения длины каверны. Возможны дальнейшие обобщения этой постановки на максимально широкий диапазон различных случаев обтекания. Точность решения на основе задачи (5.1)–(5.5) для формы стационарной каверны за диском при $\sigma = 0.04$ в сравнении нелинейным численным расчетом [30] демонстрируется на рис. 8.

6. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КАВЕРНЫ С ИСКУССТВЕННЫМ ПОДДУВОМ

Особенности моделирования

Искусственный поддув позволяет значительно увеличить размеры каверн и, соответственно, эффективность и диапазоны применения суперкавитации. При этом определяющее влияние на размеры и форму каверн оказывают процессы уноса газа из ее задней части. В этой области имеется значительное количество работ – М. Billet, Л. Эпштейна, Г. Логвиновича, Ж.-М. Michel, Ж. Р. Franc, Ж. В. Raquet- Ж. Р. Flodrops-A. Dument, В. Прокофьева, Ю. Савченко, Д. Stinebring и др. В то же время, каверна заполнена упругим газом и является типичной колебательной системой, эти процессы сопровождаются возникновением волн на поверхности каверны, которые нежелательны также с точки зрения возникновения резонансных явлений при движении. Эти процессы исследованы в известных работах Ж.-М. Michel, Е. Silberman-С. Song. Эффективная теория пульсаций осесимметричных каверн на основе уравнений (4.6) развита Э. Парышевым [40], получившим и исследовавшим известные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом для малых пульсаций каверн и определившим условия их появления. Отметим здесь также работы Д. Дианова, В. Семеновко и др.

Процесс образования нестационарных каверн с искусственным поддувом можно представить следующим образом. При любом изменении скорости, сопротивления кавитатора, внешнего давления, искусственного поддува происходит изменение размеров и формы каверны. Эти изменения при определенных значениях параметров сопровождаются волнообразованием на поверхности каверны, что проявляется при существенном поддуве и значительно зависит от заполненности каверны телом. Центральным моментом расчета нестационарных каверн с искусственным поддувом является определение переменного давления в каверне $P_c(t)$. Достаточно эффективно здесь применение политропической и, в частности, изотермической зависимости для газа в каверне. В случае каверны без тела задача для расчета нестационар-

ной каверны с искусственным поддувом (определения P_c) при заданных законах движения, изменения параметров кавитатора, давления и поддува сводится к решению системы уравнений (4.6), которую необходимо дополнить уравнениями сохранения массы газа в каверне:

$$R^2|_{x=x_c(t)} = 0, \quad u = \int_{x_n(t)}^{x_c(t)} \pi R^2 dx, \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u P_c}{\alpha_t} \right) = (Q_{m_in} - Q_{m_out}),$$

$$\frac{u P_c}{\alpha_t} \Big|_{t=0} = m_{c0},$$

где $x_n(t)$, $x_c(t)$ – законы движения кавитатора и конца каверны; $P_c = \alpha_t \rho_c$ изотермическая зависимость давления от массовой плотности ρ_c газа в каверне; $u P_c / \alpha_t = m_c(t)$; m_c , u – масса, объем газа в каверне; Q_{m_in} , Q_{m_out} – массовый поддув газа и его унос в хвосте каверны. Уравнения необходимо дополнить соотношением для массового уноса газа из каверны. С учетом относительной независимости задней части каверны и на основе формулы для объемного уноса газа из стационарной каверны [4] находится выражение для массового уноса газа, связанное с задней частью каверны:

$$Q_{m_out} \approx \frac{\pi \mu}{4} k_q \rho_a U_e \left[\frac{1 - \sigma/E}{\sigma} \times \right. \quad (6.2)$$

$$\left. \times \frac{\rho}{P_\infty - P_c} \left(\frac{\partial R^2}{\partial t} \right)^2 \right]_{x=x_c(t)},$$

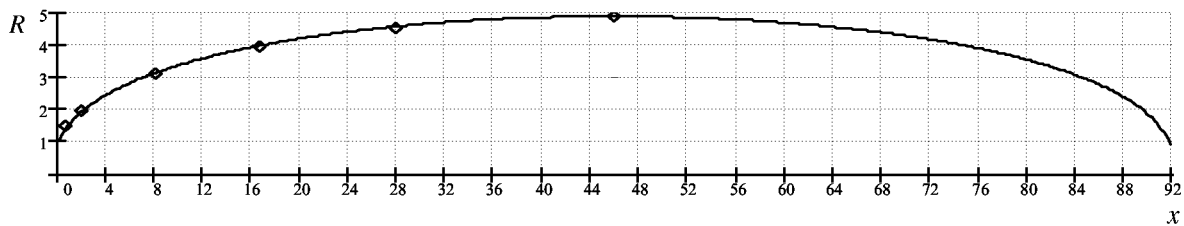
где $k_q \approx \text{const}$ – экспериментальная константа уноса [4], определяемая на основе экспериментов для стационарной каверны за диском; ρ_a – массовая плотность газа при атмосферном давлении; E – число Эйлера; U_e – скорость конца каверны. Совместное решение уравнений задачи (4.6), (6.1), (6.2) позволяет определить закон изменения $P_c(t)$, затем форма каверны может быть рассчитана по уравнениям (4.6) или более точно на основе (5.1)–(5.5). Более простым является решение этой задачи в квазистационарной постановке, которая при постоянном значении скорости, коэффициента сопротивления кавитатора и давления при заданном законе поддува

$$\bar{Q}_{m_in}(\bar{t}) = Q_{m_in} / \rho_a R_n^2 U_n$$

сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (6.3) относительно $\sigma(t) = \sigma(x_n(t))$:

$$a_{v\sigma} c_{d\sigma}^{3/2} \frac{P_\infty}{P_a} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{1 - \sigma/E}{\sigma^2} \right) + \quad (6.3)$$

$$+ a_{q\sigma} k_q c_{d\sigma} E \left(\frac{1 - \sigma/E}{\sigma^2} \right) = \bar{Q}_{m_in}$$

Рис. 8. Каверна за диском в несжимаемой жидкости, $\sigma = 0.04$:

— система уравнений на основе ГТТ (5.1)–(5.5), $\diamond \diamond \diamond$ – нелинейный численный расчет [30]

где $\bar{t} = tU_n/R_n$; U_n – скорость движения кавитатора; P_a – атмосферное давление; $a_{vo} \sim 9$, $a_{qo} \sim 3.4$ – медленно меняющиеся величины, значение которых осреднены при $\sigma = 0.03$. Уравнение (6.3) выражает физику воздействия поддува – вначале происходит заполнение каверны газом, а затем достаточно медленная эволюция каверны при выходе ее на стационарный режим. Это уравнение легко обобщается на случай переменных скорости, сопротивления кавитатора и давления. Результаты расчета по уравнению (6.3) сравнивались с экспериментальными данными для нестационарной каверны при переменном поддуве [10, 41] и др.

Возможности предсказания нестационарных каверн с искусственным поддувом

Эта проблема достаточно обширна, и здесь имеется большое количество работ, но она к настоящему времени далека от завершения. Основные трудности связаны с предсказанием процессов уноса газа, и наиболее реальный подход в той или иной мере опирается на экспериментальные данные для обычных стационарных каверн. Применение суперкавитации эффективно только при определенных типах не слишком интенсивного уноса газа из каверны, в основном при реализации процесса хаотического перемешивания жидкостно-пузырьковой смеси в конце каверны, связанного с неустойчивостью течения вблизи задней части каверны. Наиболее важным является предсказание каверн именно в этом диапазоне, а также надежное определение его границ, вне которых возможна кардинальная перестройка процессов уноса и оценка последствий скорее всего краткосрочного выхода режима нормального обтекания за приемлемые границы. При этом наибольшее воздействие может оказать поперечное поле сил тяжести, приводя при увеличении числа Фруда к значительному подъему задней части каверны в область более низких давлений и прорыву газа из каверны путем ее открытия и образования полых вихрей, по которым происходит эвакуация газа (R. Cox, W. Clayden). Эффективная зависи-

мость для уноса газа, включающая в себя также и эти процессы, найдена в работе [10]. Воздействие на процессы уноса газа продольного поля сил тяжести может быть также значительным и, как следует из (4.9 с), может приводить к открытию каверны и катастрофическим потерям газа. Важными факторами являются воздействие давления и различных нестационарностей. Процессы обтекания задней части достаточно капризны, и хаотическое течение в задней части под воздействием градиента давлений, поля сил тяжести, непостоянства скорости и др. может смениться регулярным течением с возвратной струйкой и малым уносом газа или другим типом течения. Отметим работу [42]. Значительное воздействие могут оказывать пульсации каверн, приводя к порционному типу уноса газа из каверны [40]. Наиболее простым является расчет нестационарных каверн с искусственным поддувом по стационарным зависимостям при текущих значениях чисел кавитации. При более нестационарном процессе применимо квазистационарное уравнение типа (6.3). При значительных нестационарностях, связанных с резкими изменениями скорости и сопротивления кавитатора, внешнего давления и поддува, в большинстве случаев возможно применение постановки (4.6), (6.1), (6.2), однако здесь уже нужно контролировать возможности смены в некоторые моменты типа уноса газа, а также возможности возникновения пульсаций каверн и процессов затухания. Однако этот подход также имеет существенные ограничения, так как основан на модели газа как упругих шариков, и здесь полностью игнорируются процессы тепломассопереноса. Более точная постановка с учетом этих эффектов, которые в некоторых случаях могут оказаться значительными, приведена в [25]. Кроме того, в реальности вместо естественного замыкания каверны замыкается на заднюю часть тела, что имеет свои особенности и может значительно изменить характер процессов уноса газа. При этом чаще всего только небольшая часть каверны за-

полнена газом, и движение происходит с небольшим зазором между телом и каверной, и здесь уже могут быть существенны процессы движения газа как вязкой жидкости. Тем не менее подходы на основе (4.6), (6.1)–(6.3) могут быть достаточно эффективны. Исследование начальных стадий кавитации дано в [4, 6, 43].

Управление кавитационным течением. Здесь имеются две основные возможности эффективного управления размерами каверны – путем изменения сопротивления кавитатора можно значительно изменить наибольший радиус и, соответственно, размер каверны, а путем изменения искусственного поддува – удлинение и размеры каверны. Решение для течения газа внутри каверны [20] при обычных значениях поддува показывают незначительность изменения динамического давления газа в каверне. Существенно изменить форму каверны здесь возможно при нормальном воздействии струи на каверну, а также при течениях газа в достаточно узких зазорах между жесткой поверхностью и поверхностью каверны. Значительные изменения формы каверны возможны при очень высоких скоростях движения газового потока в каверне, превышающих в 15–20 раз и выше скорости движения кавитатора.

ВЫВОДЫ

Как показывает анализ, одним из наиболее результативных направлений исследований суперкавитации является совместное применение теории возмущений, и в частности МСАР, в приближении теории тонких тел совместно с простыми эвристическими моделями и интегральными законами сохранения. На основе этого подхода разработан комплекс достаточно эффективных методов расчета осесимметричных стационарных и нестационарных кавитационных течений, позволяющих также с учетом модели плоских сечений рассчитывать удлиненные каверны в большинстве практических случаев.

Наиболее развиты методы расчета в рамках модели несжимаемой жидкости, позволяющие достаточно точно рассчитывать нестационарные кавитационные течения, также и в нелинейной области вблизи диска на основе элементарных уравнений. Недостаточно завершены являются методы предсказания потерь газа при нестационарном обтекании и, соответственно, расчета каверн с искусственным поддувом при различных источниках нестационарности и воздействии ряда факторов, проблемы расчета течений газа в узких слоях между жесткой поверхностью и каверной, а

также с учетом воздействия термодинамических эффектов.

Существенная часть данной работы финансировалась фондом фундаментальных исследований Украины. Значительная ее часть представлена в качестве доклада на 4-ом Международном симпозиуме по кавитации CAV 2001 в Калифорнийском Технологическом Институте, Пасадена, Калифорния, США.

1. *Birkhoff G., Zarantonello E.* Jets, wakes and cavities. – New York: Academic Press, 1957. – 406 p.
2. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1978. – 536 с.
3. *Кнэпп Р., Дейли Дж., Хеммит Ф.* Кавитация. – М.: Мир, 1974. – 480 с.
4. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка, 1969. – 215 с.
5. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1966. – 448 с.
6. *Arndt R. E. A., Arakery V. H., Higushi H.* Some observations of tip-vortex cavitation // *J. Fluid Mech.* – 1991. – **229**. – P. 269–289.
7. *Billet M. L., Holl J. W., Weir D. S.* Correlations of thermodynamics effects for developed cavitation // *Trans. ASME J. Fluids Eng.* – **103**, N 4. – 1981. – P. 534–542.
8. *Иванов А. Н.* Гидродинамика развитых кавитационных течений. – Л.: Судостроение, 1980. – 240 с.
9. *Терентьев А. Г.* Теоретический анализ кавитационных течений // *Гидродинамика больших скоростей (тезисы докладов)*. – Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 1989. – С. 5–15.
10. *Эшштейн Л. А.* Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов. – Л.: Судостроение, 1970. – 208 с.
11. *Tulin M.* Supercavitating flows – small perturbation theory // *J. Ship Research.* – 1964. – **7**, N 3. – P. 16–37.
12. *Гуревич М. И., Степанов Г. Ю.* Краткий обзор современных работ по теории струй идеальной жидкости // *Тр. семинара по краевым задачам*. – Казань. – 1970, Вып. 7. – С. 55–70.
13. *Франкль Ф. И., Карпович Е. А.* Газодинамика тонких тел. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 175 с.
14. *Григорян С. С.* Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела // *ПММ.* – 1959. – **23**, вып. 5. – С. 951–953.
15. *Якимов Ю. Л.* Предельные течения воды // *Механика и технический прогресс, МЖГ*: том 2. – М., Наука. – С. 1987.7–25
16. *Nishiyama T., Kobayshi H.* Finite cavity flow of axial symmetry // *Technol. Rep. Tohoku Univ.* – 1969. – **34**, N 1. – P. 173–178.
17. *Chou C.* Axisymmetric cavities flows past bodies of revolution // *J. Hydronaut.* – 1974. – **8**, 1. – P. 13–18.

18. Серебряков В. В. Асимптотическое решение задачи о тонкой осесимметричной каверне // Доповіді АН УРСР, сер А.– 1973.– N 12.– С. 1119–1122.
19. Серебряков В. В. Кольцевая модель для расчета осесимметричных течений с развитой кавитацией // Гидромеханика.– 1974.– 27.– С. 25–29.
20. Серебряков В. В. Об управлении формой границ тонкой осесимметричной каверны // Тр. Николаев. корабл. ин-та.– 1974.– Вып. 88.– С. 123–128.
21. Серебряков В. В. Асимптотическое решение задачи о форме тонкой осесимметричной каверны за тонким телом // Гидромеханика.– 1976.– 34.– С. 48–52.
22. Серебряков В. В. К постановке линеаризованных задач осесимметричного суперкавитационного обтекания в нестационарном потоке // Математические методы исследования гидродинамических течений.– К.: Наук. думка, 1977.– С. 58–62.
23. Серебряков В. В. Расчет формы тонких осесимметричных каверн в нестационарном потоке для ряда характерных случаев обтекания // Гидромеханика.– 1981.– 44.– С. 86–94.
24. Серебряков В. В. Предельные зависимости теории нестационарного обтекания тонких осесимметричных тел // Бионика.– 1986.– 20.– С. 21–32.
25. Серебряков В. В. О предельных уравнениях теории тонких осесимметричных каверн при нестационарном обтекании // Бионика.– 1989.– 23.– С. 18–33.
26. Серебряков В. В. Асимптотические решения осесимметричных задач обтекания с развитой кавитацией в приближении тонких тел // Гидродинамика больших скоростей.– Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 1990.– С. 99–111.
27. Serebryakov V. Asymptotic approach for problems of axisymmetric supercavitation based on the slender body approximation // Proc. 3-rd Int. Symp. Cavitation: vol. 2.– Grenoble, 1998.– P. 61–70.
28. Vorus W. Ambient supercavitations of slender bodies of revolution // J. Ship Research.– 1986.– 30, N 3.– P. 215–219.
29. Brennen C. A numerical solution of axisymmetric cavity flows // J. Fluid Mech.– 1969.– 37, N 4.– P. 671–688.
30. Гузевский Л. Г. Численный анализ кавитационных течений / препринт N 40-79.– Новосибирск: СО АН СССР. Ин-т теплофизики, 1979.– 36 с.
31. Nishiyama T., Khan O. Compressibility effects upon cavitation in high-speed liquid flow (Transonic and supersonic liquid flows // Bull. Jap. Soc. Mech. Eng.– 24, N 190.– 1981.
32. Альев Г. А. Отрывное обтекание кругового конуса трансзвуковым потоком воды // Изв. АН СССР. МЖГ.– 1983.– N2.– С. 152–154.
33. J. Howard McMillen, E. Newton Harwey A Spark Shadowgraphic Study of Body Waves in Water // J. Appl. Phys.– 1946.– 17, N 7.– P. 541–555.
34. Логвинович Г. В., Серебряков В. В. О методах расчета формы осесимметричных каверн // Гидромеханика.– 1975.– 32.– С. 47–54.
35. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.– М.: Мир, 1967.– 310 с.
36. Журавлев Ю. Ф. Методы теории возмущений в пространственных струйных течениях // Тр. ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского.– 1973.– Вып. 1532.– 23 с.
37. Abelson H. A. Prediction of Water Entry Cavity Shape // Pa. Amer. Soc. Eng. N WA/FE.– 1970.– N 8.– P. 8–13.
38. Ефремов И. И., Серебряков В. В. О форме тонких каверн при малых числах кавитации в плоском и осесимметричном потоках // Гидромеханика.– 1978.– 38.– С. 82–85.
39. Shin B., Ikohagi T. A numerical study of unsteady cavitating flows Proc. 3-rd Int. Symp. Cavitation: vol. 2Grenoble1998301–306
40. Парышев Э. В. Система нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих динамику нестационарных осесимметричных каверн // Тр. ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского.– 1978.– Вып. 1907.– С. 3–16.
41. Королев В. И., Власенко Ю. Д., Бойко В. Т. Экспериментальное исследование развития каверны при нестационарной газовой кавитации // Гидромеханика.– 1973.– N 24.– С. 79–83.
42. Callenaere M., Franc J. P., Michel J. M. Influence of cavity thickness and pressure gradient on the unsteady behaviour of prtial cavities // Proc. 3-rd Int. Symp. Cavitation: vol. 1.– Grenoble, 1998.– P. 209–214.
43. Keller A. P. Cavitation Scale Effects: A representation of its Visual Appearance and Empirical Found Relations // High Seed Body Motion in Water.– AGARD, Rep. 827, 1998.– P. 30.1–30.10.