ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2002. Том 4 (76), N 2. C. 23 – 29

УДК 532.593

# ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН НА ТЕЧЕНИЯХ ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЫ

**Р. И. ДЕМЧЕНКО, М. И. ЖЕЛЕЗНЯК**

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев*

*Получено 12.09.2001 ⋄ Пересмотрено 20.02.2002*

С помощью метода Ito Y. и Tanimoto K. [7] Copeland'м было показано в [6], что уравнение "пологих склонов" может быть преобразовано в систему двух уравнений первого порядка гиперболического типа, что дает возможность значительно увеличить расчетную область и принять во внимание отраженную волну при моделировании распространения волн в зоне шельфа с портовыми сооружениями. Обобщение метода Ito Y. и Tanimoto K. для уравнения "пологих склонов" с учетом медленно изменяющихся течений, представленное в настоящей работе, приводит к более полной системе уравнений гиперболического типа, включающей систему уравнений [6]. В случае глубокой воды проведено сравнение численного решения полученной системы для высот гармонических волн, распространяющихся по течению и против течения, с аналитическим решением [9]. Кроме того, полученная система уравнений протестирована на экспериментах Thomas'а [16] для постоянной глубины и эксперименте Sakai [18] для переменной глубины. В двумерном случае показаны результаты численного моделирования распространения волн в заливе с впадающим в него устьем реки.

За допомогою метода Ito Y. і Tanimoto K. [7] Copeland'м було показано в [6], що рівняння "положистих схилів" може бути перетворено на систему двох рівнянь першого порядку гіперболичного типу, що дає можливість значно збільшити область розрахунку і взяти до уваги відображену хвилю за умов моделювання портових споруд. Узагальнення метода Ito Y. і Tanimoto K. для рівнянь "положистих схилів" за наявності повільно змінюваних течій, що наведено в цій роботі, призводить до більш повної системи рівнянь гіперболичного типу, яка містить систему рінянь [6]. У випадку глибокої води проведено порівняння чисельного розв'язку одержаної системи для висот гармонічних хвиль, що розповсюджуються за течією та проти течії, з аналітичним розв'язком [9]. Крім того, отримана система рівнянь тестована на експериментах Thomas'а [16] для однорідної глибини та експерименті Sakai [18] для змінної глибини. У двомірному випадку наведені результати чисельного моделювання розповсюдження хвиль у затоці з гирлом річки, що впадає у затоку.

In [6] Copeland expressed by Ito Y. and Tanimoto K. method [7] the "mild -slope" equation in the form of a pair of first-order equations of a hyperbolic type. It resulted in the possibility to enlarge considerably the numerical domain and take into account the reflected wave for modeling wave transport in a shelf zone with sea harbour systems. Ito and Tanimoto method generalization presented in this paper for "mild-slope" equation with slowly variable currents results in more complete system of the hyperbolic type including the system [6]. The comparison of the wave heights in the case of the deep water has been performed for numerical results of the obtained system and analytical result [9] for waves propagating along currents and in opposite direction. The last system has been tested by Thomas experiment [16] for constant depth and by Sakai experiment [18] for ununiform depth. In addition the results of the numerical modeling have been shown for the waves propagating in a bay with river mouth flowing into this bay.

Рефракционно-дифракционная трансформация волн в прибрежной зоне происходит в результате взаимодействия волн с донными неоднородностями и течениями прибрежной зоны. Для моделирования трансформации волн над береговым склоном в последнее десятилетие развито несколько расчетных методик, основанных на численном решении уравнения "пологих склонов" [5], однако моделирование рефракционно-дифракционной трансформации волн на течениях для натурных условий пока не проводится. Численные эксперименты параболической аппроксимации уравнения "пологих склонов" с учетом медленно изменяющихся во времени течений (известных функций глубины) приведены в работах [1, 2], а также рассмотрены в приближении рефракции в [3]. Сравнение численных расчетов без учета течений с экспериментальными измерениями Дельфтской лаборатории проведено в работе [4] в приближении рефракции, параболической аппроксимации рефракционно-дифракционного приближения, а также полной рефракционно-дифракционной модели.

С помощью метода Ito Y. и Tanimoto K. [7] было показано в [6], что уравнение "пологих склонов" без учета течений может быть преобразовано в систему уравнений первого порядка гиперболического типа, что дает возможность значительно увеличить расчетную область и учесть отраженную волну при моделировании морских портов и других прибрежных сооружений. Преобразование более общего вида для уравнения "пологих склонов" с учетом медленно изменяющихся течений проведено в настоящей работе. (Кратко метод изложен в [10]). Кроме того, в [11] показано сравнение численного расчета для полученной гиперболической системы уравнений первого порядка при отсутствии течений с экспериментальными данными и численным расчетом полного рефракционно-дифракционного приближения [4]. На основе гиперболической системы уравнений [6] проводилось численное моделирование волновых полей в прибрежных зонах и портовых акваториях в [12]. Уравнение, описывающее трансформацию поверхностных волн в условиях плавного изменения глубины и градиентов течения, записывается как

$$\frac{D^2}{Dt^2}\varphi - \nabla\cdot(b\nabla\varphi) + \left(\omega_r^2 - k^2 b\right)\varphi = 0, \qquad (1)$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}\cdot\nabla.$$

Здесь $\varphi(x,y,t)$ – потенциал скорости; $\vec{U}$ – скорость течения, медленно изменяющаяся по пространственным координатам $x, y$; $\partial\vec{U}/\partial t = 0$; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$; $\omega_r$ – угловая частота относительно подвижной системы координат, связанной с течением; $k(x,y)$ – волновое число; величина $b$ определена как $b \equiv c_r \cdot c_{gr}$; $c_r$ и $c_{gr}$ – соответственно фазовая и групповая скорости относительно подвижной системы координат, причем

$$\omega_r = c_r \cdot k, \qquad (2)$$

$$c_r = \sqrt{\frac{g}{k}\text{th }(k\cdot h)}, \quad c_{gr} = \frac{1}{2}c_r\cdot(1+G),$$

$$G = \frac{2kh}{\text{sh }(2kh)};$$

$h$ – глубина, характеризующая поверхность дна с пологими уклонами порядка $O(\varepsilon^2)$. Кроме того, градиент течения имеет тот же порядок малости:

$$\nabla U_1, \nabla U_2 = O(\varepsilon^2).$$

Уравнение (1), имеющее гиперболический тип, получено в такой записи с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ в [1]. Уравнение Boij'a, рассмотренное в [2, 3], отличается от (1) дополнительными членами, содержащими множитель $\nabla\cdot\vec{U}$. В том же приближении, что было получено уравнение (1), выражение для возвышения свободной поверхности $\eta(x,y,t)$, которое является функцией потенциала $\varphi$ и скорости течения $\vec{U}$, будет иметь следующий вид [11]:

$$\eta = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + U_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]. \qquad (3)$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде монохроматических волн

$$\varphi(x,y,t) = \tilde{\varphi}(x,y)\exp(-i\omega_a t),$$

$$\eta(x,y,t) = \tilde{\eta}(x,y)\exp(-i\omega_a t) \qquad (4)$$

с абсолютной угловой частотой

$$\omega_a = \omega_r + \vec{k}\cdot\vec{U}. \qquad (5)$$

Для функций вида (4) выполняются следующие соотношения:

$$\varphi_t = -i\omega_a\varphi, \quad \eta_t = -i\omega_a\eta, \qquad (6)$$

$$\varphi_{tt} = -\omega_a^2\varphi, \quad \eta_{tt} = -\omega_a^2\eta. \qquad (7)$$

Тогда уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{\omega_a^2}\left[k^2 b - \omega_r^2 + \omega_a^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla\cdot(b\nabla\varphi) +$$

$$+\vec{U}\cdot(\nabla(\vec{U}\cdot\nabla\varphi)) + 2\vec{U}\cdot\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \qquad (8)$$

Представляя потенциал $\varphi$ и возвышение свободной поверхности $\eta$ в виде действительной и мнимой части: $\varphi = \varphi_0 + i\varphi_1$, $\eta = \eta_0 + i\eta_1$, введем вектор-функцию потенциала скорости частиц

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 + i\vec{Q}_1, \qquad (9)$$

где

$$\vec{Q}_j\,(x,y,t) = \left\{Q_j^{(x)}(x,y,t), Q_j^{(y)}(x,y,t)\right\}, j = 0, 1.$$

Кроме того, введем вектор-функцию потока

$$\vec{\hat{Q}} = -i\vec{Q}. \qquad (10)$$

Введение функции $\vec{Q}$, которая в общем случае не является гармонической, позволяет свести уравнение второго порядка (8), при условии медленного изменения угловой частоты $\omega_a$ как функции пространства и времени, к следующим шести уравнениям первого порядка, аппроксимирующими уравнение (8) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$:

$$\frac{\partial\vec{Q}_j}{\partial t} = \left(b\nabla\varphi_j - \vec{U}\left(\vec{U}\cdot\nabla\varphi_j\right) - \vec{U}\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\right)\frac{\omega_a}{g}, \qquad (11)$$

$$\nabla\cdot\vec{Q}_j = \left(\frac{1}{\omega_a^2}\left(k^2 b - \omega_r^2 + \omega_a^2\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial t} + \vec{U}\cdot\nabla\varphi_j\right)\frac{\omega_a}{g}, \qquad (12)$$

где функции $\varphi_j$, j = 0, 1 связаны между собой соотношениями (6), (7). Из (3) следует выражение для $\eta_j, j = 0, 1$:

$$\eta_j = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\varphi_j}{\partial t} + U_1\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + U_2\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right]. \qquad (13)$$

В случае $\vec{U} = 0$ она сводится к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial\vec{Q}_0}{\partial t} = b\nabla\eta_1, \quad \nabla\cdot\vec{Q}_0 = \frac{k^2 b}{\omega_r^2}\frac{\partial\eta_1}{\partial t}, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial\vec{Q}_1}{\partial t} = -b\nabla\eta_0, \quad \nabla\cdot\vec{Q}_1 = -\frac{k^2 b}{\omega_r^2}\frac{\partial\eta_0}{\partial t}. \qquad (15)$$

При этом уравнения (15) совпадают с полученными в [6], где используемая вектор-функция потенциала скорости частиц, предложенная Ito Y. и Tanimoto K. [7], является мнимой частью вектор-функции (9).

Для уравнения (7), когда решение ищется в приближении рефракции поверхностных волн:

$$\varphi = A\exp(i\theta), \quad \theta = \vec{k}\vec{x} - \omega_a t, \quad A = a\frac{g}{\omega_r}, \qquad (16)$$

где $a$ – амплитуда волны, выполняется условие сохранения волнового действия:

$$\nabla\cdot(\omega_r A^2\vec{c}_{ga}) = 0, \qquad \vec{c}_{ga} = \vec{c}_{gr} + \vec{U}\ . \qquad (17)$$

Кроме того, можно показать, что для монохроматических волн (16) при условии постоянной глубины вектор-функция, определенная в (10) и равная

$$\vec{Q} = (\vec{c}_{gr} + \vec{U})\eta, \qquad (18)$$

является решением системы уравнений (11), (12), причем

$$\vec{Q}_1 = (\vec{c}_{gr} + \vec{U})\eta_0, \qquad (19)$$

$$\vec{Q}_0 = -(\vec{c}_{gr} + \vec{U})\eta_1. \qquad (20)$$

Принимая во внимание выражения (3) и (16), можно показать, что в случае постоянной глубины возвышение свободной поверхности будет:

$$\eta_0 = -a\sin\theta, \qquad \eta_1 = a\cos\theta. \qquad (21)$$

Для нахождения вещественной части возвышения свободной поверхности $\eta_0$ (j = 1) достаточно решить систему (11), (12) для трех уравнений с тремя неизвестными $\vec{Q}_1 = \left\{Q_1^{(x)}, Q_1^{(y)}\right\}$, $\varphi_1$, которую удобно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial\vec{Q}_j}{\partial t} = -r_a\vec{U}\nabla\cdot\vec{Q}_j + b\nabla\varphi_j\frac{\omega_a}{g} + $$

$$+\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\nabla\varphi_j\right)\frac{\omega_a}{g}(r_a - 1), \qquad (22)$$

$$\frac{\partial\varphi_j}{dt} = r_a\left(-\vec{U}\cdot\nabla\varphi_j + \frac{g}{\omega_a}\nabla\cdot\vec{Q}_j\right), \qquad (23)$$

где

$$r_a = \frac{\omega_a^2}{k^2 b - \omega_r^2 + \omega_a^2}, \quad j = 1.$$

Система уравнений (22), (23) (для каждого $j = 0$, 1) имеет $t$ – гиперболический тип (по Фридрихсу) [8]. Значения $\eta_0$ находим по формуле (13):

$$\eta_0 = -\frac{1}{g}\left[\omega_a\varphi_1 + U_1\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + U_2\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right], \qquad (24)$$

где

$$\varphi_0 = -\frac{1}{\omega_a}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t},$$

учитывая условие (6). Причем функции $\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}$ являются компонентами кинематической скорости частиц жидкости $\vec{u}(x, y, t)$, а полное распределение горизонтальной скорости определяется из соотношения [11]:

$$\vec{\tilde{u}}(x, y, z, t) = \vec{u}(x, y, t)\frac{\mathrm{ch}\,[k(z + h - \eta_0)]}{\mathrm{ch}\,(kh)}. \qquad (25)$$

Высота волны вычисляется после прохождения каждого последующего периода волны как функция от среднего по периоду значения возвышения свободной поверхности [6]:

$$hw = 2\cdot\left(2\cdot\bar{\eta}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (26)$$

Для численной аппроксимации систему уравнений (22)–(23), ($j = 1$) удобно представить в матричном виде:

$$E\frac{\partial}{\partial t}\vec{W} + A\frac{\partial}{\partial x}\vec{W} + B\frac{\partial}{\partial y}\vec{W} = 0. \qquad (27)$$

Здесь $E$ – единичная матрица; вектор $\vec{W}$ имеет вид:

$$\vec{W} = \{Q_1^x, Q_1^y, \varphi_1\},$$

а матрицы $A, B$ состоят из следующих элементов:

$$a_{11} = r_a U_1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = \gamma[-b + U_1^2(1 - r_a)],$$

$$a_{21} = r_a U_2, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = \gamma_{12},$$

$$a_{31} = -r_a/\gamma, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = a_{11},$$

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = a_{11}, \quad b_{13} = \gamma_{12},$$

$$b_{21} = 0, \quad b_{22} = a_{21}, \quad b_{23} = \gamma[-b + U_2^2(1 - r_a)],$$

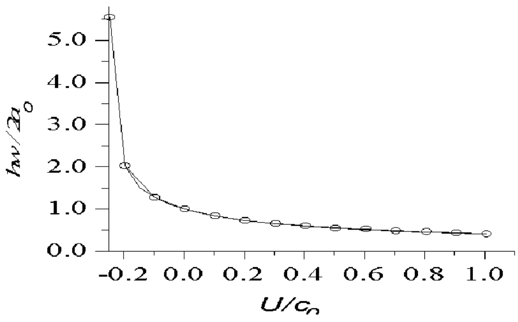


Рис. 1. Сравнение волновых высот при $kh \ll 1$; — согласно [9], -о- согласно (24)-(29)

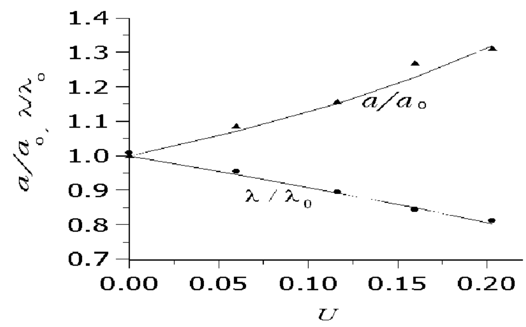


Рис. 2. Изменение относительных высот и относительных длин волн на постоянном по глубине течении. Треугольники и квадратики – экспериментальные данные [15]

$$b_{31} = 0, \quad b_{32} = a_{31}, \quad b_{33} = a_{21}, \qquad (28)$$

где

$$\gamma_{12} = \gamma U_1 U_2 (1 - r_a), \qquad \gamma = \omega_a / g.$$

В одномерном случае в качестве численного эксперимента было рассмотрено изменение высот короткой гармонической волны (распространяющейся вдоль оси $x$) на однородной глубине ($h = \mathrm{const}$) при условии течения $\{U_1, 0\}$ в направлении движения волны ($U_1 > 0$) и против направления распространения волны ($U_1 < 0$). В последнем случае предполагается $|U_1| < cg$. Для численной реализации эксперимента была использована явная двухшаговая одномерная схема Лейтса [14] второго порядка точности:

$$\vec{W}_i^{k+1} = L_x \vec{W}_i^k \, ,$$

$$L_x = E - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A \delta_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 A^2 \delta_x^+ \delta_x^- , \qquad (29)$$

где $\delta_x, \delta_x^+, \delta_x^-$ – соответственно центрально-разностная и конечно-разностные аппроксимации вперед и назад для первой производной. При этом для устойчивости схемы (29) требуется выполнение условия Куранта $c < \Delta x / \Delta t$.

Для случая глубокой воды на рис. 1 показано сравнение значений (-о-) относительной волновой высоты $hw/2a_0$ как функции от $U/c_0$, полученных с помощью конечно-разностной аппроксимации (29) и соотношения (13), ($j$=1) с учетом (25) и аналитического решения, приведенного в [9]:

$$hw/2a_0 = (g/\omega_0)/[c_r(c_r + 2U)]^{1/2}, \qquad (30)$$

где

$$c_r = c_0 \cdot 0.5[1 + (1 + 4U/c_0)^{1/2}], c_0 = g/\omega_0.$$

Индекс "0" соответствует $U = 0$. Для численной реализации конечно-разностной аппроксимации (28) на входной границе задавалось значение амплитуды, определяемой из закона сохранения волнового действия (17) для случая глубокой воды:

$$hw/2a_0 = ((\omega_r/\omega_0) c_{gr0}/(c_{gr} + U))^{1/2}. \qquad (31)$$

Здесь $c_{gr} = c_r/2$; $\omega_r = (g \cdot k)^{1/2}$; $kh \ll 1$, волновое число $k$ определяется из дисперсионного соотношения (5). Как видно из рис. 1, значения относительных волновых высот, построенных по соотношению (30) и полученных для глубокой воды в настоящей работе, численно практически совпадают.

Экспериментальное исследование распространения поверхностных регулярных волн на переменных по глубине течениях проведено в работе [15] на основе эксперимента Томаса [17] для нелинейных волн. В настоящей работе сравнение относительных высот и длин волн на постоянной глубине с экспериментальными исследованиями Томаса [16] для линейного взаимодействия хроматических волн с однородными по глубине течениями показано на рис. 2. Здесь $h = \mathrm{const}$ =0.57 м, $a_0$ = 0.00918 м (при $U = 0$), $\omega_r = 2\pi \cdot 0.8 Hz$. Расчетные значения длин волн определялись из дисперсионных соотношений (2), (5). При этом $\lambda_0$ =2.2452 м (при $U = 0$). На входной границе задавалось значение амплитуды $a$, определяемой из закона сохранения волнового действия [3] в случае постоянной глубины. Соответствующие значения волновых высот рассчитывались из соотношений (24), (27)–(29).

Для этих же параметров на рис. 3 – 5 представлено вертикальное распределение горизонталь-

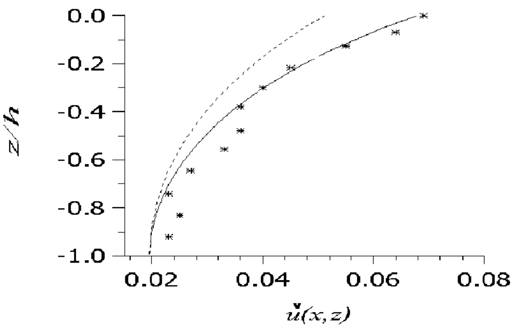


Рис. 3. Вертикальное распределение горизонтальной скорости для случая однородного по глубине течения, направленного в сторону, противоположную распространению волны: $U=-0.1598$м/с, —$U=0$, звездочки – экспериментальные данные [15]

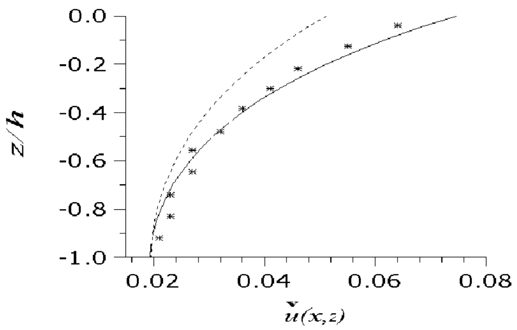


Рис. 5. Вертикальное распределение горизонтальной скорости для случая однородного по глубине течения, направленного в сторону, противоположную распространению волны: $U=-0.203$ м/с, —$U=0$, звездочки – экспериментальные данные [15]

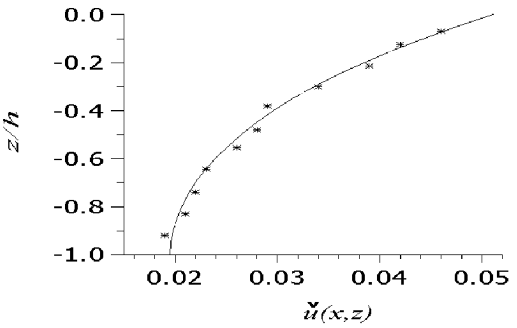


Рис. 4. Распределение по глубине для $U=0$ горизонтальной скорости частиц жидкости (м/с); Звездочки – экспериментальные данные [15]

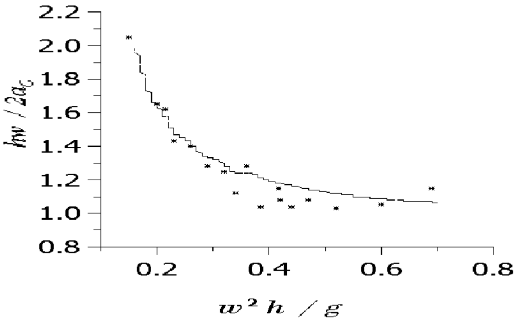


Рис. 6. Сравнение численных результатов моделирования (24)–(29) и лабораторных данных [18]

ной скорости частиц жидкости, моделируемое соотношениями (24)–(29).

В качестве теста на переменной глубине (рис. 6) было проведено сравнение с данными лабораторных измерений Sakai для нелинейного взаимодействия коротких волн и течений, движущихся в противоположных направлениях на уклоне ($s = 1/30$), приведенными в работе [18] для случая необрушения. Ширина и длина волнового лотка составляют 0.36 м и 24 м, удельный расход течения равен 0.0297 м$^2$/с. Начальная глубина и глубина на мелкой воде равны соответственно 0.5 и 0.1 м. Волновой период $T = 1.6$ с.

При выполнении численного эксперимента направление движения волны по уклону предполагалось нормальным, распределение скорости течения определялось из осредненного по глубине уравнения для закона неразрывности жидкости. На рис. 6 показано неплохое соответсвие расчетных данных согласно численной аппроксимации (29) и лабораторных данных Sakai, приведенных в [18]. Здесь $\omega = 2\pi/T$.

В двумерном случае изменения глубины был имитирован залив (прибрежный уклон $s$=0.01) с устьем реки, впадающей в этот залив. Батиметрия рассматриваемой области представлена на рис. 6. В численном эксперименте рассмотрено распространение под углом $\theta = 0$ к берегу гармонической волны с периодом $T$=7 с и амплитудой $a_0 = 0.5$ м. Ось $x$ направлена к берегу. Глубина изменяется от 20 м у открытой границы до 0.3 м у берега. Размеры рассматриваемой области составляют 2000 и 1200 м в направлении осей $x$ и

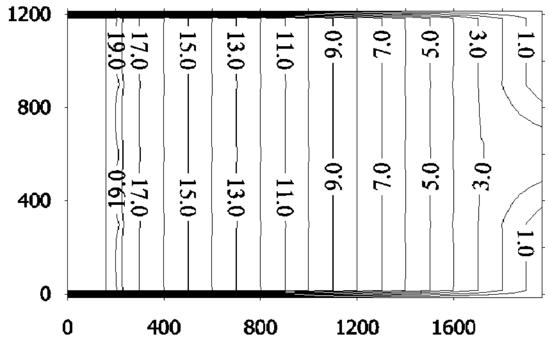


Рис. 7. Батиметрия имитируемого залива

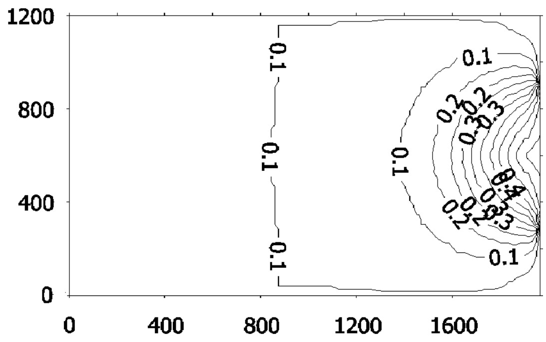


Рис. 8. Поле модуля горизонтальной скорости течения

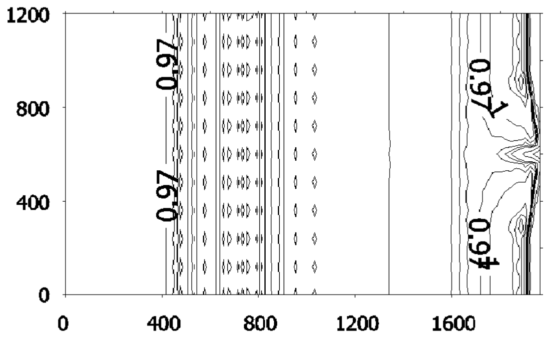


Рис. 9. Относительные высоты волн в заливе (течение отсутствует)

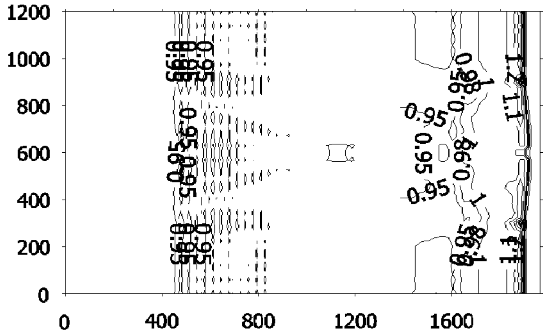


Рис. 10. Относительные высоты волн в заливе (течение не равно нулю)

$y$ соответственно. Максимальная глубина постоянна на протяжении 200 м, начиная от плоскости $x = 0$. Устье реки представляет собой канал с параболическим профилем в поперечном сечении и максимальной глубиной, равной 3 м. Ширина канала равна 600 м. Волна предполагается необрушивающейся. Поле течения $\{U_1, U_2\}$, осредненное по вертикали, есть функция координат $x, y$. Горизонтальные скорости течения для области глубин, приведенной на рис. 7, рассчитывались через функцию тока, аналогично [13]. Максимальная скорость течения достигается у берегов канала и составляет 0.7 м/с. Модуль скорости течения значительно затухает с удалением от берега и на глубине 20 м практически равен нулю. Предполагая, что волновое число есть функция, медленно изменяющаяся во времени, распределение волнового числа и угла волнового вектора определим из дисперсионного уравнения с учетом течений (5) и уравнения

$$\frac{\partial(k\cos\theta)}{\partial y} - \frac{\partial(k\sin\theta)}{\partial x} = 0 \qquad (32)$$

неразрывности волнового числа. Уравнения (5), (32) были решены с использованием численной схемы, приведенной в [19].

В точке $x = 0$ возвышение свободной поверхности и функция потока определялись из уравнений (13, j=1), (19). На выходной границе было использовано условие абсорбции, а на боковых границах – условие непрерывности. Для численной аппроксимации системы уравнений (28) была использована двухшаговая явная двумерная факторизованная схема Лейтса [14] (при условии выполнения условия Куранта по каждому из направлений $x, y$):

$$\vec{W}_{ij}^{k+1} = L_y L_x \vec{W}_{ij}^{k}. \qquad (33)$$

Здесь оператор $L$ имеет строение, аналогичное оператору $L$ в уравнении (29).

На рис. 9 (течение отсутствует) и на рис. 10 представлено для сравнения распределение волновых высот. Во втором случае (течение не равно нулю) волновое число больше в устье реки. Поэтому в этой области длина волны уменьшается, а высота волны соответственно возрастает. Этот эффект с помощью изолиний показан на рис. 10. Относительные высоты волны осреднены по волновому периоду. Распределение высот на рис. 9, 10 соответствует моменту времени 40 $T$.

В заключение отметим, что полученное гиперболическое приближение распространения гармонических волн на течениях в случае пологих склонов позволяет расширить область применения таких задач в прибрежной зоне шельфа, что в свою очередь приводит к поиску новых экспериментальных и натурных исследований полученных результатов.


1. *Liu P.* Wave-current interaction on a slowly varying topography // J.Geophysical Research.– 1983.– **88**, N C7.– C. 4421-4426.
2. *Kirby J.T.* Higher-order approximation in parabolic equation method for water waves // J.Geophysical Research.– 1986.– **91**, N 1.– C. 933-952.
3. *Jonson I.J.* Booij's current-wave equation and the ray approximation // Progr. Rep.– Inst. Hydrodyn. And Hydraul. Eng. Techn. Univ. Denmark.– 1981.– P. **54**.7-20
4. *Berkhoff J.C.W., Booy N., Radder A.C.* Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves // Coastal Eng. Amsterdam.– 1982.– **6**.– P. 253-279.
5. *Berkhoff J.C.W.* Mathematical models for simple harmonic linear water waves. Wave diffraction and refraction// Delft Hydraulic Laboratory, Publ.–1976.– P. 263.
6. *Copeland,G.J.M.* A practical alternative to the mild-slope wave equation // Coastal Eng.Amsterdam.– 1985.– **9**.– P. 125-149.
7. *Ito Y.,Tanimoto K.* A method of numerical analysis of wave propagation-aplication to wave diffraction and refraction// Proc. Conf. Coastal Eng. 13th, Chapter 26.–1976.–P. 121-143.
8. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1979.– 207 с.
9. *Некрасов А.В., Пелиновский Е.Н.* Практикум по динамике океана.– Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат, 1992.– 320 с.
10. *Демченко Р.И., Железняк М.И.* Гиперболическая модель рефракционно-дифракционной трансформации волн на течениях прибрежной зоны// Сб. трудов научной конференции "Диагноз состояния экосистемы Черного моря и зоны сопряжения суши и моря".– 1997. – С. 94-96.
11. *Демченко Р.И.* Моделирование рефракционно-дифракционной трансформации волн на течениях прибрежной зоны с помощью гиперболической аппроксимации уравнения "пологих склонов" // Математические машины и системы.– 1999.– 3.– С. 3-14.
12. *Giginyak V., Shepeleva T., Zheleznyak M* Modeling of nearshore transport of radionuclides and sediments under joint action of waves and currents // Intern. Symposium on Marine Pollution, IAEA.– Monaco, 1998.– P. 690-691.
13. *Demchenko R., Dzyuba N.,Kuzmenko Y.,Mezhueva I.,Tkalich P.,Zheleznyak M.* Mathematical modeling of radionuclide dispersion in the water bodies of the Chernobil NPP zone and in the Dnieper reservoirs // Workshop on Gydrological impact of nuclear power Plants, UNESCO.– Paris, 1993.– P. 173-185.
14. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика/ Перевод с англ. под ред.П.И.Чушкина.– М.: Мир, 1980.– 616 с.
15. *Swan C., Cummins I.P. and James R.L.* An experimental study of two-dimensional surface water waves propagating on depth- varying currents. Part 1. Regular waves. // J. Fluid Mech.– 2001.– **428**.– P. 273-304.
16. *Thomas G.P.* Wave - current interactions: an experimental and numerical study. Part 1. Linear waves // J. Fluid Mech.– 1981.– **110**.– P. 457-474.
17. *Thomas G.P.* Wave-current interactions: an experimental and numerical study. Part 2. Nonlinear waves // J. Fluid Mech.– 1990.– **216**.– P. 505-536.
18. *Yu X., Isobe M., Watanabe A.Jonson I.J.* A nonlinear model of monochromatic waves on stedy currents over gradually varying bottoms // Coastal Engineering Journal.– 1998.– **40**, N 3.– P. 265-290.
19. *Chen Y.H.,Wang H.* Numerical model for nonstationary shallow water wave spectral transformation // J. Geophysical Research.– 1983.– **88**, N C14.– P. 9851-9863.