

УДК 532.528

ПОРІВНЯННЯ ОПОРУ ТОНКИХ КОНУСІВ ПРИ БЕЗВІДРИВНОМУ ТА СУПЕРКАВІТАЦІЙНОМУ РЕЖИМАХ ОБТІКАННЯ

О.А. БУРАГА, І. Г. НЕСТЕРУК, Ю.М. САВЧЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 15.01.2002

Расчитаны объемные коэффициенты сопротивления тонких конусов для суперкавитационного режима обтекания. Каверна считается частью полезного объема и определяется с помощью уравнения первого приближения. Получены аналитические формулы для объемных коэффициентов сопротивления трения и давления. Рассмотрены предельные случаи длинных и коротких каверн. Сравнение с коэффициентами сопротивления тонких осесимметричных тел при безотрывном режиме обтекания показало, что при числах кавитации, меньших 0.001, суперкавитационный режим имеет преимущества, но для больших значений числа кавитации разница в сопротивлениях может стать небольшой. Случай коротких каверн неприемлем для минимизации сопротивления.

Розраховані об'ємні коефіцієнти опору тонких конусів, які обтікаються у суперкавітаційному режимі. Каверна вважається частиною корисного об'єму і визначається за допомогою рівняння першого наближення. Отримано аналітичні формули для об'ємних коефіцієнтів опору тертя та тиску. Розглянуті граничні випадки довгих та коротких каверн. Порівняння з коефіцієнтами опору тонких осесиметричних тіл при безвідривному режимі обтікання показало, що для чисел кавітації, менших 0.001, суперкавітаційний режим має переваги, але для більших значень числа кавітації різниця в опорах може стати невеликою. Випадок коротких каверн є неприйнятним для мінімізації опору.

The volumetric drag coefficients of slender cones for supercavitation flow patterns are calculated. Cavity is assumed as a part of useful volume and determined with the use of the first approximation equation. Analytic formulas for the volumetric drag coefficients due to the friction and pressure distribution are presented. The cases of long and short cavities are considered. Comparison with the drag coefficients of slender axisymmetrical bodies with unseparated flow pattern showed, that at cavity numbers smaller than 0.001, supercavitation flow is preferable, but for larger values of the cavity number, the difference in drags can begin small. A case of short cavities is unacceptable for drag minimization.

ВСТУП

Рух у воді пов'язаний з набагато більшими витратами енергії порівняно з пересуванням у повітрі з такою самою швидкістю через те, що густина води ρ приблизно у 800 разів більша, ніж густина повітря ρ_a . Якщо врахувати також, що потужність, необхідна для подолання опору води, пропорційна величині ρU_∞^3 (див., наприклад, [1]), то стає очевидною актуальність задачі зменшення гідродинамічного опору при великих швидкостях руху U_∞ .

Один із способів вирішення проблеми полягає у зменшенні площі контакту поверхні тіла з водою (за рахунок збільшення поверхні контакту з повітрям або водяною парою). Ця ідея реалізована у суднах на підводних крилах та тілах, що обтікаються у суперкавітаційному режимі (див., наприклад, [1-5]).

Традиційний метод мінімізації гідродинамічного опору полягає у використанні спеціально підібраних форм, які мусять забезпечити безвідривний режим обтікання та максимально велику площу контакту з ламінарним примежовим

шаром. Зокрема, в [6-9] за допомогою сучасної комп'ютерної гідромеханіки розраховані осесиметричні форми, що забезпечують мінімум опору при фіксованому об'ємі для різних діапазонів чисел Рейнольдса ($Re_V = U_\infty V^{1/3}/\nu$; V – об'єм тіла; ν – кінематична в'язкість).

В роботах [10, 11] розглянуті тонкі осесиметричні тіла, зроблені оцінки коефіцієнтів опору, отримані умови безвідривного та повністю ламінарного обтікання, наведені приклади оптимальних форм. Запропоновані аналітичні формули дозволяють легко оцінити потрібні характеристики для різних значень числа Рейнольдса та параметра тонкості $\varepsilon = R_{max}/L$ (де R_{max} – максимальний радіус тіла; L – його довжина), що вигідно відрізняє [10, 11] від дещо непрозорих результатів робіт [6-9].

В [1] зроблено порівняння опору осесиметричних тіл при безвідривному та суперкавітаційному обтіканні з дуже малими числами кавітації $\sigma = 2(p_\infty - p_c)/\rho U_\infty^2$ (де p_∞ – тиск у воді далеко від тіла на глибині його руху; p_c – тиск на поверхні каверни, який можна вважати сталим через велику різницю у густинах води та газів, що заповнюють каверну). Оцінки показали, що при значеннях чи-

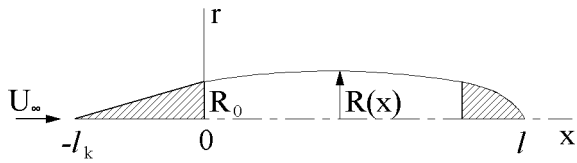


Рис. 1. Схема осесиметричного суперкавітаційного обтікання тонкого конуса

сла кавітації порядку 10^{-4} суперкавітаційний режим забезпечує значно менший опір порівняно з безвідривним.

Предметом даного дослідження є порівняння коефіцієнтів опору тонких осесиметричних тіл у різних режимах обтікання для широкого діапазону чисел кавітації та Рейнольдса.

1. КОЕФІЦІЄНТИ ОПОРУ ТОНКИХ КОНУСІВ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО СУПЕРКАВІТАЦІЙНОГО РЕЖИМУ

Обмежимося рухом тонкого конуса зі сталою швидкістю в однорідній рідині вздовж осі симетрії при достатньо великих числах Рейнольдса та малих числах Маха, що дозволяє вважати рідину поза вузьким примезовим шаром ідеальною та нестисливою, а потік в цій області – безвихровим. Крім того, обмежимося випадком великих чисел Фруда $Fr = U_\infty / \sqrt{gR_0}$ (де g – прискорення вільного падіння; R_0 – радіус основи конуса). Тоді рідину можна вважати невагомою, і всю течію – осесиметричною (рис. 1).

Циліндричні координати x, r вибрані так, як показано на рис.1. Точка сходу струменів (початку каверни) відповідає $x = 0$, всі довжини віднесені до загальної довжини системи кавітатор-каверна-замикач. За аналогією з [12] використовується несиметрична схема Рябушинського. Оскільки основа конуса не має контакту з рідиною, то парадокс Даламбера порушується, і виникає опір, пов'язаний з розподілом тиску по поверхні.

Відповідно до [13] коефіцієнт цього опору складається з двох частин:

$$C_x = \frac{2X}{\rho U_\infty^2 \Omega} = C_1 + C_2. \quad (1)$$

Тут X – складова сил тиску в напрямку осі x ; Ω – площа основи конуса. Для величин C_1, C_2 справедливі наступні формули (див. [13]):

$$C_1 = C_{x0} + \sigma, \quad C_{x0} = -2\beta^2 [\ln(0.5\beta) + 1]; \quad (2)$$

$$C_2 = \frac{\sigma [l^2 - l + l(l-2) \ln l - l_k^2 \ln l_k]}{2l_k^2 \ln \varepsilon}. \quad (3)$$

Тут β – похідна від радіуса конуса (або тангенс напівкута при його вершині); l_k – довжина конуса; $l = 1 - l_k$.

Без суттєвих втрат в точності величину ε можна замінити на β , для визначення l_k можна скористатись формулою з роботи [12] для першого наближення радіуса тонкої осесиметричної каверни

$$R^2(x) = \frac{\sigma x^2}{2 \ln \varepsilon} + 2\beta R_0 x + R_0^2. \quad (4)$$

З рівняння (4) випливає наступна формула для радіуса каверни, віднесенного до радіуса основи конуса:

$$\frac{R^2(x)}{R_0^2} = \frac{\sigma}{2 \ln \beta} \frac{x^2}{R_0^2} + 2\beta \frac{x}{R_0} + 1, \quad (5)$$

з якого шляхом прирівнювання правої частини до нуля можна знайти довжину каверни разом із замикачем L_0 , віднесено до радіуса основи конуса:

$$\frac{L_0}{R_0} = -\frac{2\beta \ln \beta}{\sigma} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\sigma}{2\beta^2 \ln \beta}} \right). \quad (6)$$

Повна довжина системи кавітатор-каверна-замикач отримується з співвідношення (6) додаванням довжини конуса l/β , тому

$$+\frac{1}{R_0} = \frac{1}{\beta} - \frac{2\beta \ln \beta}{\sigma} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\sigma}{2\beta^2 \ln \beta}} \right). \quad (7)$$

Оскільки величина l_k пов'язана з R_0 очевидним співвідношенням $l_k = R_0/\beta$, то з формули (7) випливає

$$l_k = \frac{1}{1 + \alpha \left(1 + \sqrt{1 + 1/\alpha} \right)}, \quad (8)$$

$$\alpha = -\frac{2\beta^2 \ln \beta}{\sigma}. \quad (9)$$

Рівняння (1)–(3), (8), (9) дозволяють визначити коефіцієнт опору тонкого конуса при стаціонарному обтіканні невагомою ідеальною рідиною в суперкавітаційному режимі. Приклади розрахунків можна знайти в [13]. Природно, що при фіксованому числі кавітації коефіцієнт опору C_x спадає при зменшенні параметра β .

Але на практиці цікаві не просто малі значення C_x , а мінімальний опір при фіксованому об'ємі кавітатор-каверна. Простір каверни також може використовуватись для розміщення потрібних

вантажів, а третям, яке викликане рухом газу між поверхнями твердого тіла та каверни, можна знехтувати порівняно з C_x (через велику різницю в густинах рідини і газу). При цьому газовий шар між розташованим в каверні твердим тілом та її поверхнею може бути дуже тонким, тому в подальших оцінках в якості корисного об'єму фігуруватиме весь об'єм каверни.

Для розв'язання задачі мінімізації опору при фіксованому об'ємі потрібно за аналогією з роботами [6-11] замість C_x застосувати величину C_{xV} , тобто замінити площу основи конуса Ω об'ємом системи кавітатор-каверна V' в степеню $2/3$. Зв'язок між коефіцієнтами опору має вигляд

$$C_{xV} = \frac{2X}{\rho U_\infty^2 (V')^{2/3}} = \pi C_x \left(\frac{V}{R_0^3} \right)^{-2/3}. \quad (10)$$

Згідно з рівнянням (10) для визначення величини C_{xV} достатньо вирахувати об'єм кавітатора з каверною. Якщо знехтувати величиною замикача, то

$$\frac{V}{R_0^3} = \frac{\pi}{3\beta} + \pi \int_0^{L_0/R_0} \frac{R^2(x) dx}{R_0^2 R_0}. \quad (11)$$

Інтегрування співвідношення (11) після підстановки в нього формул (5), (6) дає

$$\frac{V}{R_0^3} = \frac{\pi}{\beta} \left(\frac{1}{3} + f - \frac{f^3}{3\alpha} + f^2 \right), \quad (12)$$

$$f(\alpha) = \alpha(1 + \sqrt{1 + 1/\alpha}). \quad (13)$$

Рівняння (1)-(3), (8)-(10), (12), (13) дозволяють визначити коефіцієнт опору C_{xV} . В наступних розділах розглядатимуться граничні випадки, які дозволяють дещо спростити розрахунки.

2. ВИПАДОК ДОВГИХ КАВЕРН

Перший граничний випадок отримується при $\alpha \gg 1$. Відповідно до рівнянь (7), (9) він має місце при малих значеннях числа кавітації та не дуже тонких конусів, коли довжина каверни набагато перевищує довжину конуса. Тоді формула (13) набуває вигляду $f(\alpha) = 2\alpha$, а (12) -

$$\frac{V}{R_0^3} = \frac{4\pi\alpha^2}{3\beta}. \quad (14)$$

Рівняння (8) можна тоді записати наступним чином:

$$l_k = \frac{1}{2\alpha} = -\frac{\sigma}{4\beta^2 \ln \beta} \ll 1. \quad (15)$$

Тобто даний випадок дійсно відповідає каверні, довжина якої набагато перевищує довжину конуса. Цей факт дозволяє спростити формулу (3) до вигляду (див. також [13])

$$C_2 = \beta^2 l_k (2 \ln l_k - 3). \quad (16)$$

З врахуванням рівнянь (1), (2), (15), (16) коефіцієнт опору C_x задається формулою

$$C_x = -2\beta^2 \left[\ln(0.5\beta) + 1 + \frac{2 \ln(2\alpha) + 3}{4\alpha} \right]. \quad (17)$$

Останній член у формулі (17) в силу того, що $\alpha \ll 1$, є малим порівняно з іншими, тому C_x в цьому випадку фактично співпадає з коефіцієнтом опору при нульовому числі кавітації C_{x0} . Підстановка формул (14) та (17) у співвідношення (10) дає

$$C_{xV} = \frac{\sigma^{4/3} (18\pi)^{1/3} (\ln 2 - \ln \beta - 1)}{4(-\ln \beta)^{4/3}}. \quad (18)$$

Рівняння (18) свідчить, що об'ємний коефіцієнт опору спадає при зменшенні числа кавітації за законом $\sigma^{4/3}$. На відміну від C_x , величина C_{xV} слабо залежить від параметра тонкості конуса, оскільки формула (18) містить лише функцію $\ln \beta$, яка мало міняється в цікавому для практики діапазоні $0.01 < \beta < 0.15$ (для більших значень параметра β втрачає силу застосована в даному аналізі теорія тонкого тіла).

Приклади розрахунків коефіцієнта опору C_{xV} за рівнянням (18) наведені в табл. 1. Відсутність значень C_{xV} для деяких значень параметрів σ, β свідчить про невиконання для них умови $\alpha \gg 1$.

Наведені дані свідчать, що при дуже малих числах кавітації $\sigma < 0.001$ значення об'ємних коефіцієнтів опору набагато менші, ніж при безвідривному режимі обтікання (див. [6-11]), тобто кавітаційний режим в цьому випадку дає суттєвий вигаш в опорі тіла фіксованого об'єму. Згадані значення числа кавітації можна реалізувати лише при дуже великих швидкостях руху ($U_\infty > 400$ м/с), якщо не використовувати штучну підтримку кавітаційного режиму шляхом піддуву газу.

Для поміркованих чисел кавітації $\sigma > 0.01$ безвідривний режим обтікання може давати значення об'ємних коефіцієнтів опору, близькі та менші від кавітаційних. В цій області порушується вимога

Табл. 1.

	$\sigma = 10^{-2}$	$\sigma = 10^{-3}$	$\sigma = 10^{-4}$
$\beta = 0.15$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$6.5 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-6}$
$\beta = 0.1$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$
$\beta = 0.05$	-	$6.0 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$
$\beta = 0.01$	-	-	$2.5 \cdot 10^{-6}$

$\alpha \gg 1$, тому потрібно використовувати розрахунок за рівняннями (1)–(3), (8)–(10), (12), (13) або інший граничний випадок $\alpha \ll 1$.

3. ВИПАДОК КОРОТКИХ КАВЕРН

Граничний випадок $\alpha \ll 1$ відповідно до рівнянь (7), (9) має місце при не дуже малих значеннях числа кавітації та для дуже тонких конусів, коли довжина конуса набагато перевищує довжину каверни. Тоді формула (13) набуває вигляду $f(\alpha) = \sqrt{\alpha}$, а формула (12) –

$$\frac{V}{R_0^3} = \frac{\pi(1 + 2\sqrt{\alpha})}{3\beta}. \quad (19)$$

Рівняння (8) можна записати наступним чином:

$$l_k = 1 - \sqrt{\alpha}.$$

Тобто, даний випадок дійсно відповідає каверні, довжина якої набагато менша від довжини конуса. Оскільки $l = 1 - l_k = \sqrt{\alpha}$, то формула (3) набуває вигляду:

$$C_2 = \frac{-\sigma\sqrt{\alpha} \ln \alpha}{2 \ln \beta} \ll \sigma. \quad (20)$$

З рівнянь (2), (9) випливає, що в даному граничному випадку $\sigma \gg C_{x0}$, а з врахуванням рівнянь (1) та (20), можна отримати

$$C_x = \sigma. \quad (21)$$

Тобто опір визначається тиском газів на основу конуса. Підстановка виразів (19) та (21) у формулу (10) дає

$$C_{xV} = (9\pi)^{1/3} \sigma \beta^{2/3}. \quad (22)$$

Рівняння (22) свідчить, що об'ємний коефіцієнт опору лінійно спадає при зменшенні числа кавітації. На відміну від випадку довгих каверн, величина C_{xV} істотно залежить від параметра тонкості конуса і спадає при його зменшенні за законом $\beta^{2/3}$.

Приклади розрахунків коефіцієнта опору C_{xV} за рівнянням (22) наведені в табл. 2. Відсутність значень C_{xV} для деяких значень параметрів σ, β свідчить про невиконання для них умови $\alpha \ll 1$.

Табл. 2.

	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.01$
$\beta = 0.05$	0.041	0.021	-
$\beta = 0.01$	0.014	0.007	0.0014

Наведені дані свідчать, що при числах кавітації $\sigma > 0.05$ значення об'ємних коефіцієнтів опору перевищують C_{xV} при безвідривному режимі обтікання з достатньо великими числами Рейнольдса (див. [6–11]), тобто кавітаційний режим в цьому випадку недоцільний.

Через велику довжину конуса, близьку в даному випадку до довжини системи кавітатор-каверна-замикач, суттєве значення має тертя на його поверхні. Пов'язаний з ним додатковий опір аналізується в наступному розділі.

4. ПОРІВНЯННЯ ОПОРУ ПРИ КАВІТАЦІЙНОМУ ТА БЕЗВІДРИВНОМУ РЕЖИМАХ ОБТІКАННЯ

Якщо осесиметричне тіло обтікається у безвідривному режимі, то коефіцієнт опору, пов'язаного з тертям на його поверхні, може бути обчислений за формулою

$$C_{dL} = \frac{2D}{\rho U_\infty^2 L^2} = 2\pi \int_0^b R(x) \tau_w(x) dx. \quad (23)$$

Тут D – опір тертя; ρ – густина рідини; $R(x)$ – радіус тіла; $\tau_w(x)$ – коефіцієнт тертя на поверхні; b – довжина ділянки, омитої рідиною (зокрема, для безвідривного режиму $b = 1$, при суперкавітаційному обтіканні конуса $b = l_k$).

В роботі [10] для оцінок характеристик примежового шару на тонких осесиметричних тілах використані перетворення Манглера-Степанова та відомі формули для примежового шару на пластинці (див., наприклад [14]). Підстановка у формулу (23) запропонованих в [10] рівнянь для $\tau_w(x)$ дозволяє отримати наступну формулу для коефіцієнта опору тертя при чисто ламінарному режимі обтікання:

$$C_{dLl} = \frac{4.172}{\sqrt{Re_L}} \int_0^b R^2(x) \left[\int_0^x R^2(\xi) d\xi \right]^{-1/2} dx = \frac{4.172}{\sqrt{Re_L}} [F(b) - F(0)]; \quad (24)$$

$$F(x) = 2 \left[\int_0^x R^2(\xi) d\xi \right]^{1/2}, \quad Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

та при чисто турбулентному:

$$C_{dLt} = 0.166 Re_L^{-1/7} \int_0^b R^2(x) \left[\int_0^x R^2(\xi) d\xi \right]^{-1/7} dx = 0.166 Re_L^{-1/7} [W(b) - W(0)], \quad (25)$$

$$W(x) = \frac{7}{6} \left[\int_0^x R^2(\xi) d\xi \right]^{6/7}.$$

Для функцій $F(x)$, $W(x)$ справедливі співвідношення

$$F(0) = W(0) = 0; \quad F(b) = 2 \sqrt{\frac{V_b}{\pi}}; \quad (26)$$

$$W(b) = \frac{7}{6} \left[\frac{V_b}{\pi} \right]^{6/7},$$

де V_b – частина об'єму тіла, що омивається рідиною (зокрема при безвідривному режимі обтікання V_b співпадає з безрозмірним, віднесеним до L^3 повним об'ємом V).

Якщо замість C_{dL} та Re_L застосувати величини C_{dV} та Re_V , зв'язки між якими визначаються наступними формулами:

$$C_{dV} = \frac{2D}{\rho U_\infty^2 (V')^{2/3}} = C_{dL} V^{-2/3},$$

$$Re_V = \frac{U_\infty (V')^{1/3}}{\nu} = Re_L V^{1/3},$$

то рівняння (24), (25) з врахуванням також (26) набувають вигляду

$$C_{dVl} = \frac{4.708}{\sqrt{Re_V}} \sqrt{\frac{V_b}{V}}, \quad (27)$$

$$C_{dVt} = 0.0726 Re_V^{-1/7} V^{-13/21} V_b^{6/7}. \quad (28)$$

Формула (27) свідчить, що при ламінарному безвідривному режимі обтікання ($V_b = V$) форма тонкого осесиметричного тіла мінімального опору з фіксованим об'ємом може бути довільною і залежить лише від об'ємного числа Рейнольдса (див. також [11]):

$$C_{dVl} = \frac{4.708}{\sqrt{Re_V}}. \quad (29)$$

У турбулентному випадку з рівняння (28) випливає, що оптимальне безвідривне тіло має бути максимально тонким, оскільки

$$C_{dVt} \sim 0.07 Re_V^{-1/7} V^{5/21} \sim 0.092 Re_V^{-1/7} \varepsilon^{10/21}. \quad (30)$$

В роботі [15] проведені виміри опору осесиметричного тіла з $\varepsilon = 0.111$. Для числа $Re_V = 2200000$ експериментальне значення C_{dV} становить приблизно 0.007. В той час, як формули (29), (30) дають величини $C_{dVl} = 0.0032$ та $C_{dVt} \sim 0.0040$. Отже, формули (27)–(30) дозволяють зробити прозорі, прості та реалістичні оцінки опору тертя тонких осесиметричних тіл.

Для порівняння з опором тиску при суперкавітаційному режимі обтікання можна вибрати ламінарний безвідривний випадок, як найбільш сприятливий для мінімізації загального опору. Тоді з формули (29) для діапазону $10^6 < Re_V < 10^9$ випливає $0.00015 < C_{dVl} < 0.0047$.

Порівняння цих значень з наведеними в табл. 1 показує, що при малих значеннях числа кавітації ($\sigma < 0.001$) суперкавітаційний режим має незаперечні переваги. Для більших чисел кавітації безвідривний випадок може давати близькі значення об'ємних коефіцієнтів опору, особливо при великих числах Рейнольдса.

Як і варто було сподіватись, для випадку коротких каверн за тонким конусом ($V_b/V \sim 1$) при розрахунку загального опору суперкавітаційного режиму обов'язково слід враховувати опір тертя за формулами (27), (28). Це також необхідно робити і для довгих каверн при малих числах кавітації,

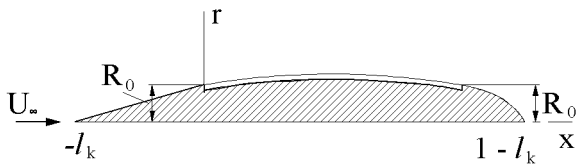


Рис. 2. Схема обтікання системи конус–замікач з нульовим опором тиску

оскільки відповідно до табл. 1 та рівнянь (27), (28) опір тертя на кавітаторі може бути одного порядку з опором тиску.

Випадок коротких каверн слід виключити з пошуків тіл мінімального опору, оскільки за формулами (27), (28) та табл. 2 кавітатор має як опір тертя, близький до безвідривного випадку, так і великий опір тиску.

Слід зауважити, що в разі реалізації схеми обтікання, показаної на рис. 2, можна позбутись опору тиску, оскільки форма каверни симетрична відносно її міделя (див. [12]), і радіус замикача в точці приєднання каверни дорівнює радіусу конуса в точці її початку. Тоді опір системи конус–замікач визначається лише тертям на твердих поверхнях, що мають контакт з рідиною, і може вираховуватись за формулами (27), (28), в яких в якості V_b слід використовувати сумарний об'єм конуса та замикача. На практиці реалізувати обтікання за схемою, зображеною на рис. 2, дуже важко через пульсації каверни, її деформації через вплив вагомості рідини та відрив примежового шару на замикачі.

5. ВИСНОВКИ

При малих значеннях числа кавітації ($\sigma < 0.001$) суперкавітаційний режим забезпечує малі значення об'ємного коефіцієнту тиску порівняно з безвідривним обтіканням з однаковими числами Рейнольдса Re_V . При виборі оптимального варіанта слід враховувати також опір тертя на конусі.

Для більших чисел кавітації безвідривний випадок може давати близькі значення об'ємних коефіцієнтів опору, особливо при великих числах Рейнольдса, тому цей випадок потребує додаткових розрахунків і порівнянь з використанням наведених у роботі аналітичних формул. Оскільки для визначення об'єму каверни застосовувалось рівняння першого наближення, за яким радіус каверни може в півтора рази перевищувати експериментальні значення (див. [12, 16]), то виникає

необхідність в уточненні наведених формул з використанням рівняння другого наближення з роботи [16].

У тих випадках, коли каверна коротка $\alpha = 2\beta^2 \ln \beta / \sigma \ll 1$, кавітаційний режим є недоцільним через великий опір порівняно з безвідривною течією.

1. Савченко Ю. Н. О движении в воде на суперкавитационных режимах обтекания // Гидромеханика.– 1996.– Вып. 70.– С. 105-115.
2. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами.– К.: Наук.думка, 1969.– 208 с.
3. Knapp R. T., Daily J.W., Hammit F.G. Cavitation.– New York: McGraw-Hill Book Co., 1970.– 687 p.
4. Эпштейн Л. А. Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов.– Л.: Судостроение, 1970.– 207 с.
5. Егоров И. Г., Садовников Ю. М., Исаев И. И. и др. Искусственная кавитация.– Л.: Судостроение, 1971.– 284 с.
6. Dodbele S.S., Van Dam C.P., Vijgen P.M., Holms B.J. Shaping of Airplane Fuselages for Minimum Drag // Journal of Aircraft.– 1987.– v.24, N 5.– P. 298-304.
7. Zedan M.F., Seif A.A. and Al-Moufadi S. Drag Reduction of Fuselages Through Shaping by the Inverse Method // Journal of Aircraft.– 1994.– v. 31, No. 2.– P. 279-287.
8. Lutz T., Schweyer H., Wagner S. and Bannasch R. Shape Optimization of Axisymmetric Bodies in Incompressible Flow // 2nd International Airship Conference.– Stuttgart/Friedrichshafen.– 3-4 July 1996.– P. 1.
9. Lutz Th., Wagner S. Drag Reduction and Shape Optimization of Airship Bodies // Journal of Aircraft.– 1998.– v. 35, N 3.– P. 345-351.
10. Нестерук І.Г. Розрахунки коефіцієнтів опору тонких осесиметричних дозвукових тіл // Прикладна гідромеханіка.– 2002.– Т. 4 (76), N 1.– С. 44-49.
11. Нестерук І.Г. Особливості турбулізації та відриву примежового шару на тонких осесиметричних дозвукових тілах // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2001.– Т. 3 (75), N 3.– С. 53-58.
12. Нестерук І.Г. К вопросу о форме тонкой осесиметричной каверны в несомой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1979.– N 6.– С. 133-136.
13. Нестерук І.Г. Некоторые задачи осесимметричных кавитационных течений // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1982.– N 1.– С. 28-34.
14. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1978.– 736 с.
15. Hansen R.J., Hoyt J.G. Laminar-To-Turbulent Transition on a Body of Revolution with an Extended Favorable Pressure Gradient Forebody // Journal of Fluids Engineering.– June 1984.– v. 106.– P. 202-210.
16. Нестерук І.Г. Об определении формы тонкой осесиметричной каверны на основе интегродифференциального уравнения // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1985.– N 5.– С. 83-90.