УДК 517.927.2,517.984

В. И. Могилевский

О характеристических матрицах дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Развиты известные результаты Штрауса по обобщенным резольвентам и спектральным функциям дифференциального оператора четного порядка на полуоси. В частности, получена параметризация всех характеристических матриц непосредственно в терминах спектрального параметра соответствующей граничной задачи. Такая параметризация задана посредством формулы, аналогичной формуле Крейна для обобщенных резольвент.

Пусть $l[y]$ — формально самосопряженное дифференциальное выражение четного порядка на промежутке $[0, b\rangle (b \leqslant \infty)$ и L_0 — соответствующий минимальный (симметрический) оператор. В работе [1] А. В. Штраус определил характеристическую матрицу (х. м.) $\Omega(\lambda)$, отвечающую обобщенной резольвенте оператора L_0, и построил с ее помощью все спектральные функции минимального оператора. В частном случае оператора 2-го порядка на полуоси с индексами дефекта $n_\pm(L_0) = 1$ обобщенная резольвента задается граничной задачей со спектральным параметром $\tau(\lambda)$, а х. м. $\Omega(\lambda)$ выражается в явном виде через $\tau(\lambda)$ [2]. В работе М. Л. Горбачука [3] описаны все х. м. для выражения 2-го порядка с операторным потенциалом, отвечающие распадающимся граничным условиям. В дальнейшем в ряде работ рассматривались граничные задачи со спектральным параметром либо для регулярных выражений $l[y]$, либо для сингулярных выражений с минимальными индексами дефекта оператора L_0 (см. работу [4] и приведенную там библиографию).

В настоящей работе изучаются операторы L_0 с произвольными (возможно, неравными) индексами дефекта. Наш подход основан на понятии распадающейся граничной тройки, что позволило установить связь между методом Штрауса и граничными задачами для оператора L_0. В частности, получена параметризация всех характеристических матриц $\Omega(\lambda)$ оператора L_0 непосредственно в терминах спектрального параметра соответствующей граничной задачи. Такая параметризация задается в виде блочного представления матрицы $\Omega(\lambda)$, а также посредством формулы, аналогичной известной формуле М. Г. Крейна для обобщенных резольвент.

Обозначения: $\mathfrak{H}$, $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство; $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]([\mathcal{H}])$ — множество ограниченных линейных операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ (в $[\mathcal{H}]$); $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ ($\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$) — множество замкнутых линейных отношений из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$ (в $\mathcal{H}$); $P_{\mathcal{L}}$ — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathcal{L} \subset \subset \mathfrak{H}$; $\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) — верхняя (нижняя) полуплоскость комплексной плоскости. Для оператора $T \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ будем писать $0 \in \rho(T)$, если T обратим, т. е. $T^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$.

Предварительные сведения. Пусть $\Delta = [0, b\rangle$ $(b \leqslant \infty)$ — промежуток в $\mathbb{R}$, H — сепарабельное гильбертово пространство размерности $\dim H \leqslant \infty$ и

$$l[y] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left((p_{n-k} y^{(k)})^{(k)} - \frac{i}{2} [(q_{n-k}^* y^{(k)})^{(k-1)} + (q_{n-k} y^{(k-1)})^{(k)}] \right) + p_n y - \qquad (1)$$

дифференциальное выражение четного порядка $2n$ с достаточно гладкими операторзначными коэффициентами $p_k(\cdot)$, $q_k(\cdot)\colon \Delta \to [H]$ такими, что $p_k(t) = p_k^*(t)$ и $0 \in \rho(p_0(t))$. Обозначим $y^{[k]}(\cdot)$, $k = 0 \div 2n$ — квазипроизводные функции $y(\cdot)\colon \Delta \to H$ [5, 6], и пусть

$$y^{(1)}(t) := \{y^{[k-1]}(t)\}_{k=1}^n \quad (\in H^n), \qquad y^{(2)}(t) := \{y^{[2n-k]}(t)\}_{k=1}^n \quad (\in H^n).$$

Пусть $\mathcal{K}$ — гильбертово протранство и $Y(t)(\in [\mathcal{K}, H])$ — операторное решение уравнения

$$l[y] - \lambda y = 0. \tag{2}$$

Каждому такому решению сопоставим оператор-функции

$$Y^{(1)}(t) = (Y(t)Y^{[1]}(t)\cdots Y^{[n-1]}(t))^\top, \qquad Y^{(2)}(t) = (Y^{[2n-1]}(t)Y^{[2n-2]}(t)\cdots Y^{[n]}(t))^\top,$$
$$\widetilde{Y}(t) = (Y^{(1)}(t)Y^{(2)}(t))^\top \colon \mathcal{K} \to H^n \oplus H^n, \qquad t \in \Delta,$$

где $Y^{[k]}(t)$, $k = 0 \div 2n-1$ — квазипроизводные оператор-функции $Y(t)$.

В дальнейшем полагаем $\mathfrak{H}(= L_2(\Delta; H))$ — гильбертово пространство измеримых функций $f(\cdot)\colon \Delta \to H$ таких, что $\int\limits_0^b \|f(t)\|^2 dt < \infty$. Кроме того, пусть $L_2'[\mathcal{K}, H]$ — множество всех оператор-функций $Y(t)(\in [\mathcal{K}, H])$ таких, что $Y(t)h \in \mathfrak{H}$ для всех $h \in \mathcal{K}$. Выражение (1) порождает минимальный оператор L_0 и максимальный оператор L, действующие в $\mathfrak{H}$; при этом L_0 — замкнутый плотно заданный симметрический оператор с (необязательно равными) индексами дефекта $n_\pm(L_0) \leqslant 2n \cdot \dim H$ и $L_0^* = L$ [5, 6]. Обозначим $\mathcal{D} = \mathcal{D}(L)$ — область определения оператора L.

Пусть, далее, $\mathcal{H}_0'$ — гильбертово простанство, $\mathcal{H}_1'$ — подпространство в $\mathcal{H}_0'$, $\mathcal{H}_2' := \mathcal{H}_0' \ominus \mathcal{H}_1'$, $\Gamma_0'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}_0'$ и $\Gamma_1'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}_1'$ — линейные отображения, P_j' — ортопроектор в $\mathcal{H}_0'$ на $\mathcal{H}_j'$, $j \in \{1, 2\}$. Кроме того, положим $\mathcal{H}_j = H^n \oplus \mathcal{H}_j'$ (так что $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$) и пусть $\Gamma_j\colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}_j$, $j \in \{0, 1\}$, — линейные отображения, определенные для всякого $y \in \mathcal{D}$ равенствами

$$\Gamma_0 y = \{y^{(2)}(0), \Gamma_0' y\} \qquad (\in H^n \oplus \mathcal{H}_0'), \qquad \Gamma_1 y = \{-y^{(1)}(0), \Gamma_1' y\} \qquad (\in H^n \oplus \mathcal{H}_1'). \tag{3}$$

Определение 1 (см. [7]). Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой Γ_0 и Γ_1 — линейные отображения (3), называется распадающейся D-тройкой для L, если отображение $\Gamma' = (\Gamma_0' \Gamma_1')^\top \colon \mathcal{D} \to \mathcal{H}_0' \oplus \mathcal{H}_1'$ сюръективно и справедливо тождество

$$[y, z](b) = (\Gamma_1' y, \Gamma_0' z) - (\Gamma_0' y, \Gamma_1' z) + i(P_2' \Gamma_0' y, P_2' \Gamma_0' z), \qquad y, z \in \mathcal{D}, \tag{4}$$

в котором $[y, z](b) = \lim\limits_{t \uparrow b}((y^{(1)}(t), z^{(2)}(t))_{H^n} - (y^{(2)}(t), z^{(1)}(t))_{H^n})$.

Распадающаяся D-тройка $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ удовлетворяет соотношению $\dim \mathcal{H}_1 = n_-(L_0) \leqslant n_+(L_0) = \dim \mathcal{H}_0$; поэтому в дальнейшем (без потери общности) считаем, что $n_-(L_0) \leqslant n_+(L_0)$.

Согласно [7] равенства

$$\Gamma_1 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A) = M_+(\lambda)\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A), \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$
$$(\Gamma_1 + iP_2\Gamma_0) \upharpoonright \mathfrak{N}_z(A) = M_-(z)P_1\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_z(A), \qquad z \in \mathbb{C}_-,$$

корректно задают голоморфные оператор-функции $M_+(\cdot)\colon \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ и $M_-(\cdot)\colon \mathbb{C}_- \to$ $\to [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$ (функции Вейля) с блочно-матричными представлениями

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & M_{2+}(\lambda) \\ M_{3+}(\lambda) & M_{4+}(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}_0' \to H^n \oplus \mathcal{H}_1', \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5}$$

$$M_-(z) = \begin{pmatrix} m(z) & M_{2-}(z) \\ M_{3-}(z) & M_{4-}(z) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}_1' \to H^n \oplus \mathcal{H}_0', \qquad z \in \mathbb{C}_-. \tag{6}$$

Предложение 1 [7]. *Пусть* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — *распадающаяся* D*-тройка для* L. *Тогда для всякого* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ $(z \in \mathbb{C}_-)$ *существует единственная оператор-функция* $Z_+(t,\lambda) \in L_2'[\mathcal{H}_0, H]$ $(Z_-(t,z) \in L_2'[\mathcal{H}_1, H])$, *удовлетворяющая* (2) *и граничному условию* $\Gamma_0(Z_+(t,\lambda)h_0) = h_0$, $h_0 \in \mathcal{H}_0$ *(соответственно,* $P_{\mathcal{H}_1}\Gamma_0(Z_-(t,z)h_1) = h_1, h_1 \in \mathcal{H}_1$).

Замечание 1. Формулы (5) и (6) задают неванлинновскую оператор-функцию $m(\cdot)$, которую мы называем m-функцией (подробнее см. [7]). В скалярном случае ($\dim H = 1$) для оператора L_0 с равными индексами дефекта $m(\cdot)$ совпадает с классической характеристической (Вейля–Титчмарша) функцией для распадающихся граничных условий [5].

Обобщенные резольвенты и характеристические матрицы. Пусть $\{\mathcal{H}_0 \oplus$ $\oplus\, \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — распадающаяся D-тройка (3) для L, $\tau = \{\tau_+, \tau_-\}$ — пара голоморфных функций $\tau_+(\cdot)\colon \mathbb{C}_+ \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ и $\tau_-(\cdot)\colon \mathbb{C}_- \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ неванлинновского класса $\widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ [8]. Функции $\tau_+(\cdot)$ и $\tau_-(\cdot)$ допускают представления

$$\tau_+(\lambda) = \{(C_0(\lambda), C_1(\lambda))\} := \{\{h_0, h_1\} \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1\colon C_0(\lambda)h_0 + C_1(\lambda)h_1 = 0\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \tag{7}$$

$$\tau_-(z) = \{(D_0(z), D_1(z))\} := \{\{h_0, h_1\} \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1\colon D_0(z)h_0 + D_1(z)h_1 = 0\}, \quad z \in \mathbb{C}_-, \tag{8}$$

посредством голоморфных оператор-функций $C_j(\cdot)\colon \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_0]$ и $D_j(\cdot)\colon \mathbb{C}_- \to [\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_1]$, $j \in \{0, 1\}$. Кроме того, пусть

$$C_0(\lambda) = (\widehat{C}_2(\lambda) C_0'(\lambda)) \in [H^n \oplus \mathcal{H}_0', \mathcal{H}_0], \quad C_1(\lambda) = (\widehat{C}_1(\lambda) C_1'(\lambda)) \in [H^n \oplus \mathcal{H}_1', \mathcal{H}_0], \tag{9}$$

$$D_0(z) = (\widehat{D}_2(z) D_0'(z)) \in [H^n \oplus \mathcal{H}_0', \mathcal{H}_1], \quad D_1(z) = (\widehat{D}_1(z) D_1'(z)) \in [H^n \oplus \mathcal{H}_1', \mathcal{H}_1] \text{ —} \tag{10}$$

блочно-матричные представления оператор-функций $C_j(\lambda)$ и $D_j(z)$. Обозначим также $\widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ — множество пар $\{\tau_+, \tau_-\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ вида $\tau_+(\lambda) = \tau_-(z) \equiv \theta$ $(\in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1))$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, $z \in \mathbb{C}_-$.

Для функции $f \in \mathfrak{H}$ и пары $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, заданной равенствами (7)–(10), рассмотрим следующую граничную задачу

$$l[y] - \lambda y = f, \tag{11}$$

$$\widehat{C}_1(\lambda) y^{(1)}(0) + \widehat{C}_2(\lambda) y^{(2)}(0) + C_0'(\lambda)\Gamma_0' y - C_1'(\lambda)\Gamma_1' y = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{12}$$

Функцию $y(\cdot,\cdot)\colon \Delta \times \mathbb{C}_+ \to H$ назовем решением этой задачи, если для всякого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ функция $y(\cdot, \lambda) \in \mathcal{D}$ и удовлетворяет уравнению (11) и граничному условию (12).

Предложение 2. *Пусть* $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. *Тогда:*

а) для всякой функции $f \in \mathfrak{H}$ *граничная задача* (11), (12) *имеет единственное решение* $y(t, \lambda) = y_f(t, \lambda)$;

b) равенство $(\mathbb{R}(\lambda)f))(t) = y_f(t,\lambda)$, $f \in \mathfrak{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *задает обобщенную резольвенту* $\mathbb{R}(\lambda) = \mathbb{R}_\tau(\lambda)$ *оператора* L_0. *Обратно, для всякой обобщенной резольвенты* $\mathbb{R}(\lambda)$ *существует единственное* $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ *такое, что* $\mathbb{R}(\lambda) = \mathbb{R}_\tau(\lambda)$. *При этом* $\mathbb{R}_\tau(\lambda)$ — *каноническая резольвента тогда и только тогда, когда* $\tau \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$.

В силу предложения 2 формулы (11) и (12) задают параметризацию всех обобщенных резольвент оператора L_0 посредством неванлинновского граничного параметра $\tau(\lambda)$. Эту же параметризацию можно задать посредством функции Грина. Именно, пусть $\tau = \{\tau_+,\tau_-\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ — голоморфная пара (7)–(10) и

$$\widetilde{D}_1(z) := D_0(z) \upharpoonright \mathcal{H}_1 \ (\in [\mathcal{H}_1]), \quad \widetilde{D}_0(z) := D_1(z)P_{\mathcal{H}_1} + iD_0(z)P_{\mathcal{H}_2'} \ (\in [\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]), \quad z \in \mathbb{C}_-.$$

Сопоставим паре τ семейство операторных решений $Y_{\tau+}(t,\lambda) \in [\mathcal{H}_1,H]$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, и $Y_{\tau-}(t,z) \in [\mathcal{H}_0,H]$, $z \in \mathbb{C}_-$, уравнения (2), определенных начальными условиями

$$\widetilde{Y}_{\tau+}(0,\lambda) = (-\widehat{D}_2^*(\overline{\lambda})\widehat{D}_1^*(\overline{\lambda}))^\top(\widetilde{D}_1^*(\overline{\lambda}) - M_+(\lambda)\widetilde{D}_0^*(\overline{\lambda}))^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

$$\widetilde{Y}_{\tau-}(0,z) = (-\widehat{C}_2^*(\overline{z})\widehat{C}_1^*(\overline{z}))^\top(C_0^*(\overline{z}) - M_-(z)C_1^*(\overline{z}))^{-1}, \qquad z \in \mathbb{C}_-.$$

Пусть также $Z_\pm(t,\lambda)$ — операторные решения из предложения 1. Введем оператор-функции

$$Y_\tau(t,\lambda) = \begin{cases} Y_{\tau+}(t,\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}_+,\\ Y_{\tau-}(t,\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}_-, \end{cases} \qquad Z_0(t,\lambda) = \begin{cases} Z_+(t,\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}_+,\\ Z_-(t,\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

Определение 2. Оператор-функцию $G_\tau(\cdot,\cdot,\lambda)\colon \Delta \times \Delta \to [H]$ вида

$$G_\tau(x,t,\lambda) = \begin{cases} Z_0(x,\lambda)Y_\tau^*(t,\overline{\lambda}), & x > t,\\ Y_\tau(x,\lambda)Z_0^*(t,\overline{\lambda}), & x < t, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+ \bigcup \mathbb{C}_-, \tag{13}$$

назовем функцией Грина, соответствующей паре $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$.

Теорема 1. *Пусть* $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ *и* $\mathbb{R}(\lambda) = \mathbb{R}_\tau(\lambda)$ — *соответствующая обобщенная резольвента оператора* L_0, *порожденная граничной задачей* (11), (12). *Тогда*

$$(\mathbb{R}(\lambda)f)(x) = \int\limits_0^b G_\tau(x,t,\lambda)f(t)\,dt := \lim_{\eta\uparrow b}\int\limits_0^\eta G_\tau(x,t,\lambda)f(t)\,dt, \qquad f = f(\cdot) \in \mathfrak{H}, \tag{14}$$

откуда следует, что равенства (13) *и* (14) *задают биективное соответствие между обобщенными (каноническими) резольвентами* $\mathbb{R}(\lambda)$ *и всеми парами* $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ *(соответственно,* $\tau \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$*).*

Каждой паре $\tau = \{\tau_+,\tau_-\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ сопоставим оператор-функции $\widetilde{\Omega}_{\tau+}(\lambda)$ и $\widetilde{\Omega}_{\tau-}(z)$,

$$\widetilde{\Omega}_{\tau+}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_{1+}(\lambda) & \widetilde{\omega}_{2+}(\lambda)\\ \widetilde{\omega}_{3+}(\lambda) & \widetilde{\omega}_{4+}(\lambda)\end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{15}$$

$$\widetilde{\omega}_{1+}(\lambda) = M_+(\lambda) - M_+(\lambda)(\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}M_+(\lambda), \tag{16}$$

$$\widetilde{\omega}_{2+}(\lambda) = -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_1} + M_+(\lambda)(\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}, \tag{17}$$

$$\widetilde{\omega}_{3+}(\lambda) = -\frac{1}{2} I_{\mathcal{H}_0} + (\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1} M_+(\lambda), \qquad \widetilde{\omega}_{4+}(\lambda) = -(\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}, \tag{18}$$

$$\widetilde{\Omega}_{\tau_-}(z) = (\widetilde{\Omega}_{\tau+}(\overline{z}))^*, \qquad z \in \mathbb{C}_-. \tag{19}$$

Определение 3. Оператор-функцию $\Omega(\lambda) = \Omega_\tau(\lambda)$ ($\in [H^n \oplus H^n]$), заданную равенством

$$\Omega_\tau(\lambda) = P_{H^n \oplus H^n} \widetilde{\Omega}_{\tau\pm}(\lambda) \restriction H^n \oplus H^n, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_\pm, \tag{20}$$

назовем х. м. оператора L_0, отвечающей паре $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. Х. м. $\Omega_\tau(\lambda)$ назовем канонической, если $\tau \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

Теорема 2. *Пусть $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — распадающаяся D-тройка* (3) *для L. Тогда для всякой пары $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ соответствующая функция Грина* (13) *допускает представление*

$$G_\tau(x, t, \lambda) = Y_0(x, \lambda)\left(\Omega_\tau(\lambda) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(t - x) J\right) Y_0^*(t, \overline{\lambda}), \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+ \bigcup \mathbb{C}_-,$$

в котором $Y_0(t, \lambda)$ ($\in [H^n \oplus H^n]$) — "каноническое" решение уравнения (2) *с начальным условием $\widetilde{Y}_0(0, \lambda) = I$ и $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \in [H^n \oplus H^n]$.*

Замечание 2. 1. Используя формулы (15)–(20), нетрудно показать, что $\operatorname{Im} \lambda \cdot \operatorname{Im} \Omega_\tau(\lambda) \geqslant 0$ и $\Omega_\tau^*(\lambda) = \Omega_\tau(\overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (это значит, что $\Omega_\tau(\lambda)$ — неванлинновская оператор-функция).

2. Из теоремы 2 следует, что функция $\Omega(\lambda) = \Omega_\tau(\lambda)$ совпадает с характеристической матрицей обобщенной резольвенты $\mathbb{R}(\lambda) = \mathbb{R}_\tau(\lambda)$ в смысле А. В. Штрауса [1]; при этом х. м. $\Omega_\tau(\lambda)$ является канонической тогда и только тогда, когда она отвечает канонической резольвенте. Это утверждение может служить обоснованием данного нами определения 3.

Формулы (15)–(19) и (20) описывают все х. м. оператора L_0 с помощью "граничного" параметра $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. В следующей теореме то же описание дается посредством формулы, аналогичной известной формуле М. Г. Крейна для резольвент (см., например, [9]).

Теорема 3. *Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — распадающаяся D-тройка* (3) *для L, $M_\pm(\cdot)$ — функции Вейля* (5), (6) *и*

$$S_+(\lambda) = \begin{pmatrix} -m(\lambda) & -M_{2+}(\lambda) \\ I_{H^n} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad S_-(z) = \begin{pmatrix} -m(z) & -M_{2-}(z) \\ I_{H^n} & 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}_-.$$

Кроме того, пусть A_0 — максимальное симметрическое расширение оператора L_0 с областью определения $\mathcal{D}(A_0) = \{y \in \mathcal{D}\colon y^{(2)}(0) = 0, \Gamma_0' y = 0\}$ и

$$\mathbb{R}_0(\lambda) := (A_0 - \lambda)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad \mathbb{R}_0(\lambda) := (A_0^* - \lambda)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \ - \tag{21}$$

соответствующая обобщенная резольвента. Тогда равенство

$$\Omega(\lambda) (= \Omega_\tau(\lambda)) = \Omega_0(\lambda) - S_+(\lambda)(\tau_+(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1} S_-^*(\overline{\lambda}), \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{22}$$

в котором $\Omega_0(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & -\frac{1}{2} I_{H^n} \\ -\frac{1}{2} I_{H^n} & 0 \end{pmatrix}$ — х. м. обобщенной резольвенты $\mathbb{R}_0(\lambda)$, задает биективное соответствие между всеми х. м. $\Omega(\lambda)$ оператора L_0 и всеми парами $\tau = \{\tau_+, \tau_-\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$; при этом каноническим х. м. $\Omega(\lambda)$ в (22) *соответствуют $\tau \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.*

Случай равных индексов дефекта. В случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}$ D-тройку (3) назовем распадающейся граничной тройкой для L. Для такой тройки тождество (4) принимает вид

$$[y,z](b) = (\Gamma_1' y, \Gamma_0' z) - (\Gamma_0' y, \Gamma_1' z), \qquad y,z \in \mathcal{D},$$

и, кроме того, справедливо равенство $n_+(L_0) = n_-(L_0) = \dim \mathcal{H}$. Отметим также, что распадающаяся граничная тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ является граничной тройкой (пространством граничных значений) для L [10, с. 158], в то время как оператор-функция $M(\lambda) = M_\pm(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$ (см. (5) и (6)) совпадает с функцией Вейля в смысле В. А. Деркача и М. М. Маламуда [9].

Для распадающейся граничной тройки приведенные выше результаты можно сформулировать в несколько упрощенном виде. Именно, в этом случае класс $\widetilde{R}(\mathcal{H},\mathcal{H}) =: R(\mathcal{H})$ совпадает с известным классом неванлинновских функций $\tau(\cdot)$ со значениями в $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ (см., например, [11]) и справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *— распадающаяся граничная тройка* (30) *для* L,

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & M_2(\lambda) \\ M_3(\lambda) & M_4(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}' \to H^n \oplus \mathcal{H}', \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+ \bigcup \mathbb{C}_- \ -$$

блочное представление соответствующей функции Вейля и

$$S(\lambda) \colon = \begin{pmatrix} -m(\lambda) & -M_2(\lambda) \\ I_{H^n} & 0 \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}' \to H^n \oplus H^n, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+ \bigcup \mathbb{C}_-.$$

Тогда:

1) х. м. оператора L_0, отвечающая функции $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H})$, задается равенствами

$$\widetilde{\Omega}_\tau(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) - M(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} M(\lambda) & -\dfrac{1}{2} I_{\mathcal{H}} + M(\lambda)(\tau(\lambda)+M(\lambda))^{-1} \\ -\dfrac{1}{2} I_{\mathcal{H}} + (\tau(\lambda)+M(\lambda))^{-1} M(\lambda) & -(\tau(\lambda)+M(\lambda))^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

$$\Omega_\tau(\lambda) = P_{H^n \oplus H^n} \widetilde{\Omega}_\tau(\lambda) \upharpoonright H^n \oplus H^n, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+ \bigcup \mathbb{C}_-;$$

2) резольвента $\mathbb{R}_0(\lambda)$ (21) каноническая (т. е. оператор A_0 самосопряжен) и формула (22) для х. м. принимает вид

$$\Omega(\lambda)(= \Omega_\tau(\lambda)) = \Omega_0(\lambda) - S(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} S^*(\overline{\lambda}), \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+ \bigcup \mathbb{C}_-; \qquad (24)$$

при этом роль параметра в (24) *играют функции $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H})$.*

Замечание 3. Нетрудно показать, что в случае минимальных дефектов $n_\pm(L_0) = n \cdot \dim H$ ($\dim H < \infty$) х. м. $\Omega_\tau(\cdot)$ задается правой частью равенства (23) с $M(\lambda) = m(\lambda)$. Для скалярного выражения Штурма–Лиувилля на полуоси этот результат получен А. В. Штраусом [2].

Отметим также недавние работы [11, 12], в которых показано, что всякая матрица вида (23) является функцией Вейля для самосопряженного расширения $\widetilde{A}$, задающего обобщенную резольвенту оператора A, порожденную параметром $\tau(\lambda)$ в абстрактном граничном условии.

1. *Штраус А. В.* Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1957. – **21**. – С. 785–808.

2. *Штраус А. В.* О спектральных функциях дифференциальных операторов // Там же. – 1955. – **19**. – С. 201–220.
3. *Горбачук М. Л.* О спектральных функциях дифференциального уравнения второго порядка с операторными кэффициентами // Укр. мат. журн. – 1966. – **18**, № 2. – С. 3–21.
4. *Dijksma A., Langer H.* Operator theory and ordinary differential operators // Lectures on operator theory and its applications (Waterllo, ON, 1994), Fields. Inst. Monogr., 3, Amer. Math. Soc. – Providence, RI, 1996. – P. 73–139.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 528 с.
6. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их прил. – 1969. – **8**. – С. 3–24.
7. *Mogilevskii V. I.* Boundary triplets and Titchmarsh–Weyl functions of differential operators with arbitrary deficiency indices // Methods Funct. Anal. Topology. – 2009. – **15**, No 3. – P. 280–300.
8. *Mogilevskii V. I.* Nevanlinna type families of linear relations and the dilation theorem // Ibid. – 2006. – **12**, No 1. – P. 38–56.
9. *Derkach V. A., Malamud M. M.* Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. – 1991. – **95**, No 1. – P. 1–95.
10. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
11. *Derkach V. A., Hassi S., Malamud M. M., de Snoo H.* Generalized resolvents of symmetric operators and admissibility // Methods Funct. Anal. Topology. – 2000. – **6**, No 3. – P. 24–55.
12. *Derkach V. A., Hassi S., Malamud M. M., de Snoo H.* Boundary relations and generalized resolvents of symmetric operator // Rus. J. Math. Phys. – 2009. – **16**, No 1. – P. 17–60.

ГЗ “Луганский национальный университет им. Тараса Шевченко”

Поступило в редакцию 05.04.2011

В. Й. Могілевський

Про характеристичні матриці диференціальних операторів у просторі вектор-функцій

Розвинуто відомі результати Штрауса про узагальнені резольвенти та спектральні функції диференціального оператора парного порядку на півосі. Зокрема, отримано параметризацію усіх характеристичних матриць безпосередньо в термінах спектрального параметра відповідної граничної задачі. Таку параметризацію задано за допомогою формули, що є аналогом формули Крейна для узагальнених резольвент.

V. I. Mogilevskii

On characteristic matrices of differential operators in the vector-function space

We develop well-known results due to Shtraus on the generalized resolvents and spectral functions of a differential operator of even order defined on the semiaxis. In particular, we obtain a parametrization of all the characteristic matrices immediately in terms of the spectral parameter of the corresponding boundary-value problem. Such a parametrization is given by a formula similar to the Krein formula for generalized resolvents.