ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2012

МЕХАНІКА

УДК 539.3

Ю. П. Глухов

Динамика многослойной предварительно напряженной плиты на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена постановка пространственной задачи о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой многослойной плиты с начальными напряжениями, лежащей на жестком основании. В качестве примера рассмотрена задача для предварительно напряженного слоя, лежащего на жестком основании. В пространстве изображений получено решение в общем виде для сжимаемого и несжимаемого материала и различных условий контакта.

В данной работе в рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассматривается постановка и метод решения пространственной задачи о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой многослойной плиты на жестком основании. Аналогичная задача в различных постановках исследовалась в работах [1–3].

Многослойная плита на жестком основании. Рассмотрим многослойную плиту, состоящую из N слоев, лежащих на жестком основании. Слои пронумерованы по порядку $s = \overline{1, N}$ сверху вниз. Граничные поверхности слоев плоские и параллельные между собой. Толщина слоев произвольная и равна h_s.

Слои состоят из сжимаемых или несжимаемых предварительно напряженных изотропных материалов с произвольной формой упругого потенциала. В случае ортотропного тела будем считать, что упруго-эквивалентные направления совпадают с направлениями осей выбранной системы координат.

Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние многослойной плиты является однородным. Рассмотрим начальное состояние в виде

$$\lambda_1^{\{s\}} \neq \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}, \qquad S_0^{\{s\}11} \neq S_0^{\{s\}22} \neq S_0^{\{s\}33}. \tag{1}$$

Многослойная плита отнесена к декартовой системе координат ξ_i $(i = 1, 2, 3)$, соответствующей начальному деформированному состоянию. Координатная ось ξ_3 направлена перпендикулярно поверхностям слоев к жесткому основанию.

К свободной границе первого слоя приложена нагрузка, движущаяся с постоянной скоростью v в течение большого промежутка времени и не зависящая от координаты ξ_3. Относительно системы координат, связанной с этой нагрузкой, существует установившееся деформированное состояние. Если предположить, что нагрузка движется по прямой, расположенной под углом φ к оси ξ_1, то координаты подвижной системы координат будут определяются соотношениями

$$y_1 = \xi_1 - v\cos\varphi t, \qquad y_2 = \xi_2 - v\sin\varphi t, \qquad y_3 = \xi_3. \tag{2}$$

Также предположим, что напряжения, возникающие за счет действия нагрузки, значительно меньше начальных напряжений. Указанное предположение позволяет применять линеаризированную теорию упругости [4] для описания дополнительного напряженного состояния, вызванного действием нагрузки.

С учетом (1) и (2) основные соотношения для элементов слоистой среды можно записать в общем виде следующим образом:

уравнения движения

$$\left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=3} \widetilde{A}_{i,j,k}^{\{s\}} \frac{\partial^6}{\partial y_1^{2i} \partial y_2^{2j} \partial y_3^{2k}}\right) \Phi^{\{s\}(n)} = 0, \qquad n = \overline{1,3}, \tag{3}$$

перемещения

$$\begin{aligned} u_n^{\{s\}} = {} & \left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=2} \widetilde{C}_{i,j,k}^{\{s\}(nn)} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2i} \partial y_2^{2j} \partial y_3^{2k}}\right) \Phi^{\{s\}(n)} + \\ & + \sum_{p=\alpha,\beta} \left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=1} \widetilde{C}_{i,j,k}^{\{s\}(np)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{2i} \partial y_2^{2j} \partial y_3^{2k}}\right) \frac{\partial^2 \Phi^{\{s\}(p)}}{\partial y_n \partial y_p}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$n, \alpha, \beta = \overline{1,3}, \qquad n \neq \alpha \neq \beta \neq n,$$

напряжения

$$\widetilde{Q}_{\beta\beta}^{\{s\}} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_n} \left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=2} \widetilde{E}_{i,j,k}^{\{s\}(\beta\beta n)} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2i} \partial y_2^{2j} \partial y_3^{2k}}\right) \Phi^{\{s\}(n)},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_{\alpha\beta}^{\{s\}} = {} & \sum_{n,p=\alpha,\beta; n\neq p} \frac{\partial}{\partial y_p} \left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=2} \widetilde{E}_{i,j,k}^{\{s\}(\alpha\beta n)} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2i} \partial y_2^{2j} \partial y_3^{2k}}\right) \Phi^{\{s\}(n)} + \\ & + \frac{\partial^3}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} \left(\sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=1} \widetilde{E}_{i,j,k}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{2i} \partial y_2^{2j} \partial y_3^{2k}}\right) \Phi^{\{s\}(\gamma)}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\alpha, \beta, \gamma = \overline{1,3}, \qquad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha,$$

где коэффициенты $\widetilde{A}_{i,j,k}^{\{s\}}$, $\widetilde{C}_{i,j,k}^{\{s\}(np)}$, $\widetilde{E}_{i,j,k}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)}$ в выражениях (3)–(5) являются функциями параметров v, φ, характеризующих нагрузку, и параметров, характеризующих материал элементов слоистой среды; $\widetilde{\omega}^{\{s\}}$ — в случае сжимаемого материала и $\widetilde{\kappa}^{\{s\}}$ — в случае несжимаемого материала.

Предполагаем возможными два варианта контакта элементов плиты между собой и жестким основанием.

При $y_3 = -h_s$ условия контакта в общем виде можно записать

$$
\begin{aligned}
&u_3^{\{s\}} = u_3^{\{s+1\}}, \qquad \widetilde{Q}_{33}^{\{s\}} = \widetilde{Q}_{33}^{\{s+1\}}, \qquad \widetilde{Q}_{3n}^{\{s\}} = \theta_1^{\{s\}} \widetilde{Q}_{3n}^{\{s+1\}},\\
&(1-\theta_1^{\{s\}})\widetilde{Q}_{3n}^{\{s+1\}} = \theta_1^{\{s\}}(u_n^{\{s+1\}} - u_n^{\{s\}}), \qquad s = \overline{1, N-1},\\
&u_3^{\{N\}} = 0, \qquad (1-\theta_1^{\{N\}})\widetilde{Q}_{3n}^{\{N\}} = \theta_1^{\{N\}} u_n^{\{N\}}, \qquad n = 1, 2.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Здесь $\theta_1^{\{s\}} = 1$ соответствует жесткому контакту, а $\theta_1^{\{s\}} = 0$ — нежесткому контакту слоев между собой и жестким основанием.

Граничные условия на свободной поверхности первого слоя при $y_3 = 0$ имеют вид

$$
\widetilde{Q}_{3m}^{\{1\}} = P_m[\delta_{3m} + (1-\delta_{3m})\delta_{\theta N}]\delta(y_1)\delta(y_2), \qquad \theta = \sum_{s=1}^{N} \theta_1^{\{s\}}, \qquad m = \overline{1,3}. \tag{7}
$$

При изложенных выше условиях имеем трехмерную установившуюся задачу, состоящую в совместном решении уравнений движения (3) при соответствующих граничных условиях на свободной поверхности первого слоя (7), условий контакта элементов слоистого полупространства (6) и условия затухания на бесконечности.

Для решения задачи воспользуемся двойным преобразованием Фурье по координатам y_1 и y_2. В пространстве изображений Фурье уравнения движения (3) можно представить в виде

$$
\left(B_1^{\{s\}} \frac{d^6}{dy_3^6} - B_2^{\{s\}} \frac{d^4}{dy_3^4} + B_3^{\{s\}} \frac{d^2}{dy_3^2} - B_4^{\{s\}}\right)\Phi^{\{s\}(j)} = 0, \qquad j = \overline{1,3}, \qquad s = \overline{1,N}, \tag{8}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&B_1^{\{s\}} = \widetilde{A}_{0,0,3}^{\{s\}}, \qquad B_2^{\{s\}} = k_1^2 \widetilde{A}_{1,0,2}^{\{s\}} + k_2^2 \widetilde{A}_{0,1,2}^{\{s\}}, \qquad B_3^{\{s\}} = k_1^4 \widetilde{A}_{2,0,1}^{\{s\}} + k_2^4 \widetilde{A}_{0,2,1}^{\{s\}} + k_1^2 k_2^2 \widetilde{A}_{1,1,1}^{\{s\}},\\
&B_4^{\{s\}} = k_1^6 \widetilde{A}_{3,0,0}^{\{s\}} + k_2^6 \widetilde{A}_{0,3,0}^{\{s\}} + k_1^4 k_2^2 \widetilde{A}_{2,1,0}^{\{s\}} + k_1^2 k_2^4 \widetilde{A}_{1,2,0}^{\{s\}},
\end{aligned}
$$

k_1, k_2 — параметры двойного преобразования Фурье.

Решение преобразованных уравнений (8) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\{s\}F(j)} = {}& \delta_0^{\{s\}(j)} \{C_1^{\{s\}(j)} e^{\gamma_1^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})} + C_2^{\{s\}(j)} e^{-\gamma_1^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})} +\\
&+ [1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})](C_3^{\{s\}(j)} e^{\gamma_2^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})} + C_4^{\{s\}(j)} e^{-\gamma_2^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})}) +\\
&+ [1 - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} + (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}})\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1}) + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})^2] \times\\
&\times (C_5^{\{s\}(j)} e^{\gamma_3^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})} + C_6^{\{s\}(j)} e^{-\gamma_3^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})})\}, \quad j = \overline{1,3}, \quad s = \overline{1,N}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Здесь

$$
\delta_0^{\{s\}(j)} = 1 + \delta_{2j}(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}})^2 - (\delta_{2j} + \delta_{3j})(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}),
$$

$$\delta^{\{s\}}_{\mu_m\mu_j} = \begin{cases} 1, & \mu^{\{s\}2}_m = \mu^{\{s\}2}_j, \\ 0, & \mu^{\{s\}2}_m \neq \mu^{\{s\}2}_j, \end{cases} \qquad \gamma^{\{s\}}_j = \sigma^{\{s\}}_j \mu^{\{s\}}_j, \qquad h_0 = 0,$$

$\mu^{\{s\}2}_j$ ($j = \overline{1,3}$) — корни бикубических характеристических уравнений дифференциальных уравнений (8); $\sigma^{\{s\}}_j \equiv \sigma^{\{s\}} = |\mu^{\{s\}}_j|/\mu^{\{s\}}_j$, если $\mu^{\{s\}2}_j > 0$, $\sigma^{\{s\}}_j = i$, если $\mu^{\{s\}2}_j < 0$ и $\gamma^{\{s\}}_j = \sigma^{\{s\}} \operatorname{Re} \mu^{\{s\}}_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \mu^{\{s\}}_j$, если $\mu^{\{s\}2}_j$ принимает комплексные значения.

Введем постоянные интегрирования

$$C^{\{s\}}_j = i^{\delta_{3m}} C^{\{s\}(m)}_j, \qquad j = \overline{1,6}, \qquad m = \overline{1,3}. \tag{10}$$

Трансформанты выражений (4) и (5) с учетом (9) и (10) можно записать в виде

$$\widetilde{Q}^{\{s\}F}_{nm} = i^{\delta_{mn}+\delta_{3,n+m}} \sum_{j=1}^{6} \left[\sum_{q=1}^{3} \gamma^{\{s\}(nm)}_{jq} (y_3 + h_{s-1})^{q-1} \right] C^{\{s\}}_j e^{(-1)^{j+1}\gamma^{\{s\}}_\tau (y_3+h_{s-1})},$$

$$u^{\{s\}F}_n = i^{\delta_{3n}} \sum_{j=1}^{6} \left[\sum_{m=1}^{3} \alpha^{\{s\}(n)}_{jm} (y_3 + h_{s-1})^{m-1} \right] C^{\{s\}}_j e^{(-1)^{j+1}\gamma^{\{s\}}_\tau (y_3+h_{s-1})}, \tag{11}$$

$$n, m = \overline{1,3}, \qquad \tau = \delta_{j1} + \delta_{j2} + 2(\delta_{j3} + \delta_{j4}) + 3(\delta_{j5} + \delta_{j6}),$$

где $\alpha^{\{s\}(n)}_{jm}$, $\gamma^{\{s\}(nm)}_{jq}$ — функции параметров k_1, k_2 и параметров, характеризующих нагрузку и слоистое полупространство.

Подставляя (10) и (11) в преобразованную систему уравнений (6), (7), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C^{\{s\}}_j$

$$\sum_{n=1}^{6} \gamma^{\{1\}(3m)}_{n1} C^{\{1\}}_n = i^{-\delta_{3m}} \delta^{1-\delta_{3m}}_{\theta N} P^F_m,$$

$$\sum_{j=1}^{6} \left[C^{\{s\}}_j e^{(-1)^j \gamma^{\{s\}}_\tau \Delta h_s} \sum_{q=1}^{3} (-1)^{q-1} \alpha^{\{s\}(3)}_{jq} \Delta h^{q-1}_s - \alpha^{\{s+1\}(3)}_{j1} C^{\{s+1\}}_j \right] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{6} \left[C^{\{s\}}_j e^{(-1)^j \gamma^{\{s\}}_\tau \Delta h_s} \sum_{q=1}^{3} (-1)^{j+1} \gamma^{\{s\}(3m)}_{jq} \Delta h^{q-1}_s - \theta^{\{s\}1-\delta_{3m}}_1 \gamma^{\{s+1\}(3m)}_{j1} C^{\{s+1\}}_j \right] = 0,$$

$$m = \overline{1,3}, \qquad \Delta h_s = h_s - h_{s-1},$$

$$\sum_{j=1}^{6} \left\{ C^{\{s\}}_j \theta^{\{s\}}_1 e^{(-1)^j \gamma^{\{s\}}_\tau \Delta h_s} \sum_{q-1}^{3} (-1)^{q+1} \alpha^{\{s\}(m)}_{jq} \Delta h^{q-1}_s + [(1 - \theta^{\{s\}}_1) \gamma^{\{s+1\}(3m)}_{j1} - \right. \tag{12}$$

$$\left. - \theta^{\{s\}}_1 \alpha^{\{s+1\}(m)}_{j1}] C^{\{s+1\}}_j \right\} = 0, \qquad m = \overline{1,2}, \qquad s = \overline{1, N-1},$$

$$\sum_{j=1}^{6} C^{\{N\}}_j e^{(-1)^j \gamma^{\{N\}}_\tau \Delta h_N} \sum_{q=1}^{3} (-1)^{q-1} \alpha^{\{N\}(n)}_{jq} \Delta h^{q-1}_N = 0,$$

$$
\sum_{j=1}^{6}\left\{\sum_{q=1}^{3}(-1)^{q-1}[(1-\theta_1^{\{N\}})\gamma_{jq}^{\{N\}(3m)}-\theta_1^{\{N\}}\alpha_{jq}^{\{N\}(m)}]\Delta h_N^{q-1}\right\}\times
$$

$$
\times C_j^{\{N\}}e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{N\}}\Delta h_N}=0, \qquad m=\overline{1,2}.
$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении многослойной упругой плиты с начальными напряжениями под воздействием подвижной нагрузки в области изображений Фурье сводится к решению системы алгебраических уравнений (12) относительно неизвестных $C_j^{\{s\}}$.

Слой на жестком основании. Рассмотрим случай, когда предварительно напряженный слой толщиной h лежит на жестком основании. Систему уравнений (12) можно представить в виде

$$
\sum_{n=1}^{6}a_{jn}C_n=b_j, \qquad j=\overline{1,6}, \tag{13}
$$

где

$$
b_j=i^{-\delta_{3j}}\theta_1^{1-\delta_{j3}}P_n^F\sum_{m=1}^{3}\delta_{mj}, \qquad j=\overline{1,6}, \qquad a_{jn}=\gamma_{n1}^{(3j)}, \qquad j=\overline{1,3},
$$

$$
a_{4j}=e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{1\}}h}\sum_{m=1}^{3}(-1)^{m-1}\alpha_{jm}^{(3)}h^{m-1}, \tag{14}
$$

$$
a_{jn}=e^{(-1)^j\gamma_\tau^{\{1\}}h}\sum_{m=1}^{3}(-1)^{m-1}h^{m-1}[(1-\theta_1)\gamma_{nm}^{(3,j-4)}-\theta_1\alpha_{nm}^{(j-4)}], \quad j=\overline{5,6}, \quad n=\overline{1,6}.
$$

С учетом обозначений (14) решение системы (13) можно представить в виде

$$
C_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad j=\overline{1,6}. \tag{15}
$$

В выражениях (15) используются следующие обозначения:

$$
\Delta=\sum_{j_m=1,\,j_m\neq j_n}^{6}(-1)^{j_1+j_2+j_3}K_{j_1j_2j_3}^{(1)}K_{j_4j_5j_6}^{(2)}, \quad m,n=\overline{1,6}, \quad j_1<j_2<j_3, \quad j_4<j_5<j_6,
$$

$$
\Delta_j=\sum_{j_m=1,\,j_m\neq j_n}^{6}(-1)^{j+j_1+j_2+p}K_{jj_1j_2}^{(*)}K_{j_3j_4j_5}^{(2)}, \qquad j=\overline{1,6}, \qquad m,n=\overline{1,5},
$$

$$
p=\left\{\begin{array}{ll}0, & j<j_1, j>j_2,\\ 1, & j_1<j<j_2,\end{array}\right., \qquad K_{ijk}^{(n)}=\begin{vmatrix} a_{1+3(n-1),i} & a_{1+3(n-1),j} & a_{1+3(n-1),k}\\ a_{2+3(n-1),i} & a_{2+3(n-1),j} & a_{2+3(n-1),k}\\ a_{3+3(n-1),i} & a_{3+3(n-1),j} & a_{3+3(n-1),k}\end{vmatrix},
$$

$$
K_{jj_1j_2}^{(*)}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,j_1} & a_{1,j_2}\\ b_2 & a_{2,j_1} & a_{2,j_2}\\ b_3 & a_{3,j_1} & a_{3,j_2}\end{vmatrix}.
$$

Применив формулы (11) и (12), получим в пространстве изображений выражения для перемещений и напряжений в слое

$$u_n^F = \frac{i^{\delta_{3n}}}{\Delta} \sum_{j=1}^{6} \Delta_j e^{(-1)^{j+1}\gamma_\tau y_3} \sum_{m=1}^{3} \alpha_{jm}^{(n)} y_3^{m-1},$$

$$\widetilde{Q}_{nm}^F = \frac{i^{\delta_{nm}+\delta_{3,n+m}}}{\Delta} \sum_{j=1}^{6} \Delta_j e^{(-1)^{j+1}\gamma_\tau y_3} \sum_{q=1}^{3} \gamma_{jq}^{(nm)} y_3^{q-1}, \qquad n, m = \overline{1,3}. \tag{16}$$

Для того чтобы перейти в формулах (16) к оригиналам, следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

1. *Глухов Ю. П.* Динамика многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // Доп. НАН України. – 2010. – № 2. – С. 53–58.
2. *Глухов Ю. П.* Об одной задаче о воздействии подвижной нагрузки на многослойное основание // Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій. Зб. наук. праць. Вип. 14. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – С. 102–108.
3. *Глухов Ю. П.* Об одной динамической задаче для слоя с начальными напряжениями на жестком основании // Там само. Вип. 15. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – С. 53–59.
4. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.01.2011

Ю. П. Глухов

Динаміка багатошарової попередньо напруженої плити на жорсткій основі при дії рухомого навантаження

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута постановка просторової задачі про збурення поверхневим навантаженням, що рухається з постійною швидкістю, багатошарової плити з початковими напруженнями, яка лежить на жорсткій основі. Як приклад розглянута задача для попередньо напруженого шару, що лежить на жорсткій основі. У просторі зображень отриманий розв'язок в загальному вигляді для стисливого і нестисливого матеріалу і різних умов контакту.

Yu. P. Glukhov

The dynamics of a multilayered pre-stressed plate on the rigid base under the influence of a moving load

Within the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, a nonplanar problem of the perturbation by a surface load moving with a constant speed of the multilayered plate with initial stresses and lying on the rigid base. As an example, the problem for the pre-stressed layer with the rigid base is examined. In the space of images, the solution in the general form for compressible and incompressible materials and the various conditions of contact is obtained.