

К. М. Довбня, І. В. Гур'єва

## Дослідження впливу зміцнення матеріалу на напружений стан пружно-пластичної оболонки з наскрізними тріщинами

(Представлено академіком НАН України В. П. Шевченком)

Задача про пружно-пластичну оболонку з двома колінеарними тріщинами за допомогою аналога  $\delta_c$ -моделі, узагальненого на матеріали зі зміцненням, була зведена до задачі про пружну оболонку з однією тріщиною невідомої довжини. Отриману систему сингулярних інтегральних рівнянь чисельно розв'язано методом механічних квадратур. Досліджено вплив зміцнення матеріалу на довжину пластичної зони та розкриття тріщини.

Найпоширенішою моделлю дослідження тріщин з розвиненими в околі їх вершин пластичними деформаціями є модель Леонова–Панасюка–Дагдейла ( $\delta_c$ -модель) [1, 2]. Аналог цієї моделі застосовувався при розв'язанні ідеально пружно-пластичних оболонок з наскрізними та ненаскрізними тріщинами [3–6]. Для врахування випадків, в яких матеріал в пластичній області може деформуватися за межу пластичності [7], було запропоновано узагальнення аналогу  $\delta_c$ -моделі на матеріали зі зміцненням [8, 9] для оболонок з однією тріщиною. Нижче ця модель застосовується для випадку двох тріщин.

**Постановка задачі.** Розглядається пружно-пластична полого ізотропна оболонка, виготовлена з матеріалу зі зміцненням, яка послаблена двома колінеарними наскрізними тріщинами відриву, кожна довжиною  $2l_0$  (рис. 1). Під дією симетричного розтягуючого навантаження на подовженні лінії тріщин виникають зони пластичних деформацій, які поширюються вузькими смугами по всій товщині оболонки.

Будемо розглядати випадок, коли перетинка між тріщинами повністю знаходиться в пластичній течії, тобто розмір внутрішньої зони пластичності  $l_{in}$  дорівнює половині довжини перетинки. Береги тріщин у процесі деформації не контактують між собою.

Для розв'язання задачі застосовується аналог  $\delta_c$ -моделі, узагальнений на матеріали зі зміцненням, відповідно до якого зони пластичних деформацій моделюються поверхніми розриву переміщень й кутів повороту, а реакцію матеріалу внутрішньої та зовнішньої пластичних зон на невідомі нормальне зусилля та згинальний момент вважаємо розподіленою лінійно:

$$T(x) = Pb(x), \quad M(x) = Hb(x), \quad b(x) = (1 - m^*)(|x| - s_1)/(s_2 - s_1) + m^*,$$

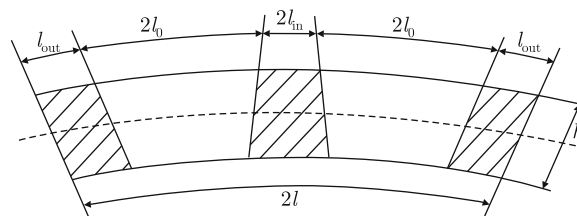


Рис. 1

де  $m^* = \sigma_B/\sigma_\tau$ ,  $\sigma_B$  — межа міцності матеріалу;  $\sigma_\tau$  — межа текучості;  $x$  — координата, вздовж якої розташована тріщина. Для зовнішньої зони пластичності  $s_1 = d - l_0$ ,  $s_2 = 0$ ; для внутрішньої —  $s_1 = d + l_0$ ,  $s_2 = l$ , де  $d = l_0 + l_{in}$ ;  $P$  та  $H$  — невідомі сталі, які відповідають умові пластичності Треска:

$$\frac{P}{h\sigma_\tau} + \frac{6|H|}{h^2\sigma_\tau} = 1.$$

Отже, замість двох тріщин відомої довжини вводимо фіктивну тріщину невідомої довжини  $2l$ ,  $l = d + l_0 + l_{out}$  ( $l_{out}$  — довжина зовнішньої зони пластичності), на берегах якої виконуються умови:

$$F_i(x) = \begin{cases} F^i b_{out}(x) - F_i^*, & d + l_0 \leq |x| \leq l, \\ -F_i^*, & d - l_0 \leq |x| \leq d + l_0, \\ F^i b_{in}(x) - F_i^*, & |x| \leq d - l_0, \end{cases} \quad i = 1, 3, \quad (1)$$

де  $F_1(x) = T(x)$ ,  $F_3(x) = M(x)$ ,  $F^1 = H$ ,  $F^3 = P$ , а  $F_1^* = T_2^*$ ,  $F_3^* = M_2^*$  — зусилля та момент у суцільній оболонці на лінії тріщини,

$$b_{out}(x) = (1 - m^*) \frac{(|x| - \tau_{out})}{(1 - \tau_{out})} + m^*, \quad b_{in}(x) = \frac{m^* - 1}{\tau_{in}} |x| + 1, \\ \tau_{out} = \frac{d + l_0}{l}, \quad \tau_{in} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tau_{out}, \quad \gamma = \frac{d}{l_0}.$$

**Розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).** Використання  $\delta_c$ -моделі дозволяє звести задачу про пружно-пластичну оболонку з двома колінеарними тріщинами до задачі про пружну оболонку з однією тріщиною невідомої довжини, тобто до розв'язання такої системи СІР типу Коші [5] з граничними умовами (1):

$$\sum_{j=1,3} \int_{-1}^1 K_{ij}(x-s) \psi_j(s) ds = -\pi \Phi_i(x), \quad i = 1, 3, \quad (2)$$

де  $\Phi_1(x) = T(x)$ ,  $\Phi_3(x) = c^2 R_2 M(x)$ . Ядра системи такі:

$$K_{11}(y) = \frac{1}{y} - 2\beta^2 y \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(\beta|y|), \quad K_{13}(y) = \frac{K_{31}(y)}{(1-\nu)(3+\nu)}, \\ K_{31}(y) = 2\beta^2 y \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)}(\beta|y|), \quad K_{33}(y) = \frac{1}{y} + \frac{2\beta^2 y}{(1-\nu)(3+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)}(\beta|y|), \\ a_n^{(1)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d|^2 \cos^3 \theta \cos(2n-1)\theta \operatorname{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\theta, \\ a_n^{(2)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d^2 \cos \theta (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) \cos(2n-1)\theta \operatorname{Re} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\theta,$$

$$a_n^{(3)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) \frac{\cos(2n-1)\theta}{\cos \theta} \operatorname{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\theta,$$

$$d^2 = \cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta, \quad \beta = cl, \quad c^2 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{R_2 h}, \quad \lambda = \frac{R_2}{R_1}.$$

Невідомі функції мають вигляд:

$$\psi_1(s) = \frac{Eh}{4l} \frac{d[\nu]}{ds}, \quad \psi_3(s) = \frac{D(1-\nu)(3+\nu)}{4l} R_2 c^2 \frac{d[\theta_2]}{ds}.$$

Щоб зробити можливим чисельний розв'язок поставленої задачі, позбудемося розриву у правих частинах системи (2), подаючи невідомі функції у вигляді:

$$\psi_j(s) = g_j(s) + f_j h(s), \quad j = 1, 3, \quad (3)$$

де  $f_1 = t = P/T_2^*$ ,  $f_3 = m = c^2 R_2 H/T_2^*$ ; функція  $h(s)$  — це аналітичний розв'язок рівняння:

$$\int_{-1}^1 \frac{h(s) ds}{s-x} = \pi f(x), \quad f(x) = \begin{cases} b_{\text{out}}(x) - a, & \tau_{\text{out}} < |x| < 1, \\ -a, & \tau_{\text{in}} < |x| < \tau_{\text{out}}, \\ b_{\text{in}}(x) - a, & |x| < \tau_{\text{in}}. \end{cases} \quad (4)$$

Цей розв'язок існує, якщо виконується додаткова умова  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$  [10], з якої визначається константа  $a$ :

$$a = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1-m^*}{1-\tau_{\text{out}}} \left( \sqrt{1-\tau_{\text{out}}^2} - \arccos(\tau_{\text{out}}) \right) + \arccos(\tau_{\text{out}}) + \frac{1-m^*}{\tau_{\text{in}}} \left( \sqrt{1-\tau_{\text{in}}^2} - 1 \right) + \arcsin(\tau_{\text{in}}) \right].$$

Формула для  $a$  є трансцендентним рівнянням відносно  $\tau_{\text{out}}$ , яке можна розв'язати при конкретних значеннях інших параметрів для ізотропної пластини з системою тріщин.

Отже, розв'язок рівняння (4) має вигляд  $h(s) = h_s(s) + s h_n(s)$ , де

$$\begin{aligned} h_s(s) &= \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\tau_{\text{in}} + s}{\tau_{\text{in}} - s} \frac{1 - s\tau_{\text{in}} + \sqrt{(1-s^2)(1-\tau_{\text{in}}^2)}}{1 + s\tau_{\text{in}} + \sqrt{(1-s^2)(1-\tau_{\text{in}}^2)}} \right| - \\ &\quad - \frac{m^* - \tau_{\text{out}}}{\pi(1-\tau_{\text{out}})} \ln \left| \frac{\tau_{\text{out}} + s}{\tau_{\text{out}} - s} \frac{1 - s\tau_{\text{out}} + \sqrt{(1-s^2)(1-\tau_{\text{out}}^2)}}{1 + s\tau_{\text{out}} + \sqrt{(1-s^2)(1-\tau_{\text{out}}^2)}} \right|, \\ h_n(s) &= \frac{m^* - 1}{\pi\tau_{\text{in}}} \left( \ln \left| \frac{1 - (s\tau_{\text{in}} + \sqrt{(1-s^2)(1-\tau_{\text{in}}^2)})^2}{(\tau_{\text{in}} - s)(\tau_{\text{in}} + s)} \right| - 2 \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-s^2}}{s} \right| \right) + \\ &\quad + \frac{m^* - 1}{\pi(1-\tau_{\text{out}})} \ln \left| \frac{1 - (s\tau_{\text{out}} + \sqrt{(1-s^2)(1-\tau_{\text{out}}^2)})^2}{(\tau_{\text{out}} - s)(\tau_{\text{out}} + s)} \right|. \end{aligned}$$

Підставивши (3) у систему (2) та врахувавши (1), після деяких перетворень маємо систему з неперервними правими частинами відносно невідомих  $t$ ,  $m$ ,  $g_1(s)$ ,  $g_3(s)$ . Далі цю систему методом механічних квадратур для функцій, обмежених на кінцях проміжку інтегрування, зводимо до сумісної та невідродженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку розв'язуємо методом Гаусса. Точність розв'язку регулюємо за допомогою умови пластичності

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1,3} \sum_{k=1}^n K_{1j}(x_m - y_k)(1 - y_k^2)\varphi_j(y_k) + \frac{m}{n+1} \sum_{k=1}^n K_{13}(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + \\ + t \left[ \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n K_{11}^r(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + a \right] = 1, \\ \frac{1}{n+1} \sum_{j=1,3} \sum_{k=1}^n K_{3j}(x_m - y_k)(1 - y_k^2)\varphi_j(y_k) + \frac{t}{n+1} \sum_{k=1}^n K_{31}(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + \\ + m \left[ \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n K_{33}^r(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + a \right] = 0, \end{array} \right.$$

де  $m = \overline{1, n+1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Величину відносного розкриття тріщини знаходимо за формулою

$$\delta(x, \widehat{\gamma}) = \frac{4n_0}{\tau_{\text{out}}} \sum_{k=1}^n \left( \frac{2}{n+1} \left( \varphi_1(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + \text{th}(y_k) \pm \widehat{\gamma} \frac{\sqrt{12(1 - \nu^2)}}{(1 - \nu)(3 + \nu)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\varphi_3(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + mh(y_k)) \right) \sum_{m=1}^n \sin(m \arccos y_k) \int_{-1}^x \sin(m \arccos s) ds \right).$$

**Результати чисельного дослідження.** Чисельний аналіз проведено для псевдосферичної оболонки при таких значеннях параметрів:  $\nu = 0,3$ ,  $R_2/h = 50$ ,  $l_0/R_2 = 0,2$ ,  $n_0 = \sigma_0/\sigma_\tau = 0,4$ . На рис. 2, 3 зображено залежність розміру зовнішньої пластичної зони  $\tau_{\text{out}}$  та розкриття тріщини  $\delta$  від відстані між центрами тріщин  $\gamma$  у псевдосферичній оболонці. Відносне розкриття  $\delta$  розраховувалося на серединній поверхні оболонки в  $\tau_{\text{out}}$ .

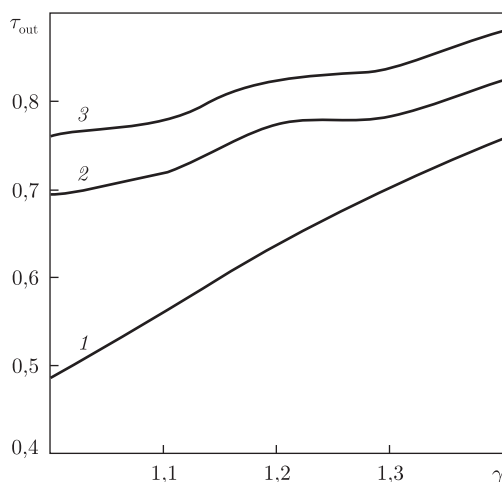


Рис. 2

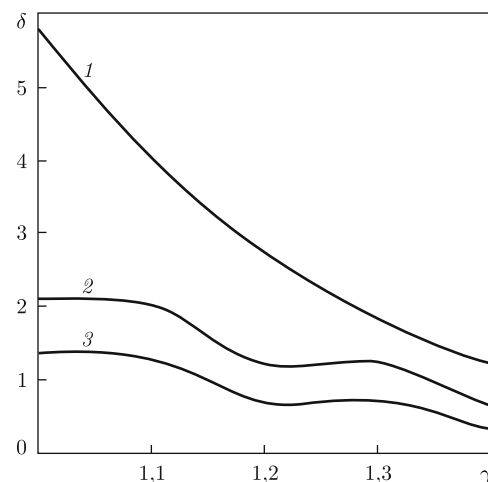


Рис. 3

Криві 1–3 відповідають значенням параметра зміцнення  $m^* = 1; 1,5; 2$ . Дані, отримані при  $m^* = 1$  (ідеальний пружно-пластичний матеріал) та при  $\gamma = 1$  (випадок однієї тріщини), збігаються з одержаними в [6].

Виходячи з рисунків, можна зробити висновок, що як і у випадку однієї тріщини ( $\gamma = 1$ ), так і при збільшенні відстані між тріщинами ( $\gamma = 1,1-1,4$ ), зміцнення матеріалу зменшує розмір пластичної зони ( $1 - \tau_{out}$ ) та відносне розкриття тріщини  $\delta$ .

1. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
2. *Dugdale D. S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – 8, No 2. – P. 100–104.
3. *Кушнір Р. М., Николішин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
4. *Довбня Е. Н., Корохина О. А.* Методика расчета напряженного состояния упруго-пластической оболочки произвольной кривизны в рамках  $\delta_c$ -модели // Мат. моделирование в образовании, науке и промышленности: Сб. науч. тр. – Ст-Петербург: МАН ВШ, 2005. – С. 28–32.
5. *Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А.* Ортоотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Механика композитов. В 12 т. – Т. 7 / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев: А. С. К., 1998. – С. 212–249.
6. *Гордієнко, М. М., Довбня К. М.* Напружено-деформований стан пружно-пластичної ортоотропної оболонки довільної кривини з тріщинами: Дис. . . канд. фіз.-мат. наук. – Донецьк, 2009. – 149 с.
7. *Ишминский А. Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. – 1954. – 6, № 3. – С. 314–317.
8. *Каминский А. А., Галатенко Г. В.* Исследование роста усталостных трещин в материалах с упрочнением // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 4. – С. 54–60.
9. *Осадчук В. А., Николішин М. М., Шабо А. Г., Маселко Т. Е.* Предельное равновесие ослабленных трещинами оболочек из упрочняющегося материала // Там же. – 1991. – No 2. – С. 67–72.
10. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

Донецький національний університет

Надійшло до редакції 21.04.2011

**К. Н. Довбня, И. В. Гурьева**

### **Исследование влияния упрочнения материала на напряженное состояние упруго-пластической оболочки со сквозными трещинами**

*Задача об упруго-пластической оболочке с двумя коллинеарными трещинами при помощи аналога  $\delta_c$ -модели, обобщенного на материалы с упрочнением, сведена к задаче об упругой оболочке с одной трещиной неизвестной длины. Полученная система сингулярных интегральных уравнений численно решена методом механических квадратур. Исследовано влияние упрочнения материала на длину пластической зоны и раскрытия трещины.*

**К. М. Dovbnya, I. V. Gurieva**

### **Investigation of the influence of the material hardening on the stressed state of an elastic-plastic shell with through cracks**

*The problem of an elastic-plastic shell with two collinear cracks is reduced to the problem of an elastic shell with one crack with unknown length by using an analog of the  $\delta_c$ -model generalized for materials with hardening. The system of singular integral equations is solved numerically by the mechanical quadratures method. The influence of the material hardening on the opening displacement of cracks and the length of the plastic zone is studied.*