

УДК 551.511.001; 551.593

# ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЯ В ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЕ С ОБЪЕМНЫМ СТОКОМ И НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПРИТОКОМ ВЕЩЕСТВА КАК ВОЗМОЖНЫЙ МЕХАНИЗМ ЗАРОЖДЕНИЯ ТОРНАДО

Э. А. ПАШИЦКИЙ

Институт физики НАН Украины, Киев, 252650, Украина

Получено 04.10.2001

Получен ряд нестационарных решений уравнений Навье-Стокса и непрерывности для вихря в несжимаемой вязкой двухкомпонентной (или двухфазной) среде с объемным стоком вещества за счет фазовых превращений (например, конденсации водяного пара во влажном воздухе, охлажденном ниже точки росы) и с неограниченным притоком исходного вещества из внешней среды. Эти решения описывают экспоненциальную или "взрывную" гидродинамическую неустойчивость "твердотельного" вращения среды в сердцевине вихря под действием конвективной и кориолисовой сил. Эти силы возникают в результате нелинейного взаимодействия вращающейся среды с радиально сходящимися потоками, которые обеспечивают постоянную плотность и состав вещества (в частности, постоянную влажность воздуха). Такая гидродинамическая неустойчивость вихря рассматривается как возможный механизм зарождения и развития мощных атмосферных вихрей - торнадо и тайфунов - в процессе формирования плотных облачных систем, когда интенсивная конденсация влаги играет роль объемного стока (конвергенции) вещества.

Одержано ряд нестационарних рішень рівнянь Нав'є-Стокса та неперервності для вихорю у нестисненому в'язкому двокомпонентному (або двофазному) середовищі з об'ємним стоком речовини за рахунок фазових перетворень (наприклад, конденсації водяної пари у вологому повітрі, охолодженому нижче точки роси) та з необмеженим притоком речовини із зовнішнього середовища. Ці рішення описують експоненційну або "вибухову" гідродинамічну нестійкість "твердотільного" обертання речовини у серцевині вихорю під дією конвективної та кориолисової сил. Ці сили виникають в результаті нелінійної взаємодії обертального руху середовища з радіальним потоком, який збігається і забезпечує постійну густину та склад речовини (зокрема, постійну вологість повітря). Така гідродинамічна нестійкість розглядається як можливий механізм зародження і розвитку потужних атмосферних вихорів - торнадо і тайфунів - у процесі формування густих хмарових систем, коли інтенсивна конденсація вологи грає роль об'ємного стоку (конвергенції) речовини.

Several exact unsteady solutions of the Navier-Stokes and discontinuity equations are obtained for a vortex in incompressible viscous multi-component (or multiphase) medium with a bulk sink for the matter due to a phase transition (for instance, vapor condensation in humid air at temperatures below dew point) and with unlimited inflow of the matter from the environment. These solutions describe exponential or "explosion-type" hydrodynamic instability of a solid body rotation of the matter in vortex core caused by the action of the advective and Coriolis forces arising as the result of nonlinear interaction of the rotating matter with radial flows, which provide constant density and composition across the medium (in particular, constant air humidity). It is proposed, that such hydrodynamic instability can be considered as a possible mechanism of creation and development of powerful atmospheric vortices - tornado and typhoons - during the formation process of dense cloud systems, when the intense condensation of air moisture plays the role of a bulk sink (convergence) of the matter.

## ВВЕДЕНИЕ

Мощные атмосферные вихри – смерчи, торнадо, ураганы, тайфуны – представляют собой одно из самых грозных и загадочных явлений природы [1]. Несмотря на колоссальное количество накопленных наблюдательных данных в естественных условиях и на многочисленные попытки моделирования этих вихрей в лабораторных установках и в компьютерных расчетах [2], истинные причины возникновения и развития таких явлений, как торнадо и тайфуны, до сих пор не выяснены окончательно. Большинство развиваемых теоретических моделей для описания торнадо и тайфунов сводятся, в конечном счете, к хорошо известному в гидродинамике эффекту воронки [3, 4], кото-

рый обусловлен законом сохранения момента количества движения несжимаемой жидкости внутри заданного контура и приводит к ускорению вращения вихря при концентрации завихренности скорости потока  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ . При этом предполагается, что радиальное сжатие закрученных нисходящих потоков плотно влажного воздуха осуществляется воздушными массами, стекающими в область низкого атмосферного давления. Другой подход к проблеме торнадо заключается в решении задачи о возникновении углового момента при нулевой начальной завихренности, например, в результате неустойчивости цилиндрически симметричного потока (затопленной струи) по отношению к аксиально-несимметричным лево- и правовинтовым возмущениям с выносом вращения определенного знака на бесконечность [5].

В настоящей работе предлагается не рассматривавшийся ранее принципиально новый механизм зарождения торнадо и, возможно, тайфунов во время формирования плотных облачных систем. Этот механизм непосредственно связан с процессом интенсивной конденсации водяного пара при охлаждении влажного воздуха ниже точки росы. Фазовый переход пар–жидкость с образованием взвешенных капель воды в облаке (тумана) сопровождается резким уменьшением (почти на три порядка) удельного объема, занимаемого молекулами воды. Это означает, что конденсация пара должна приводить к существенному (почти вдвое при исходной 100%-й влажности воздуха) понижению плотности газообразной компоненты образующейся двухфазной гетерогенной системы воздух–водяные капли, по сравнению с первоначальной плотностью химически однородной газовой смеси воздух–водяной пар. Очевидно, что это эквивалентно существованию объемного стока (конвергенции) вещества внутри облака и возникновению градиента концентрации молекул воды на границе облака. Как следует из уравнений Больцмана для смеси газов с близкими по величине массами молекул [6], диффузионный поток одной из компонент под действием соответствующего градиента концентрации, в результате эффекта увлечения за счет межмолекулярных столкновений, создает средний гидродинамический поток всей газовой смеси. Поскольку облако представляет собой термодинамически неравновесную открытую систему с неограниченным притоком вещества извне, то наличие обусловленного конденсацией влаги объемного стока и градиента влажности должно приводить к появлению сходящихся диффузионных и гидродинамических потоков влажного воздуха, поступающего из окружающих слоев атмосферы. В условиях динамического равновесия такие потоки поддерживают постоянную во времени и почти однородную в пространстве среднюю плотность вещества  $\rho = \text{const}$ , что эквивалентно условию несжимаемости среды.

В данной работе в рамках гидродинамической модели несжимаемой вязкой среды с объемным стоком (конвергенцией) вещества и сходящимся радиальным потоком показано, что под действием конвективной и кориолисовой сил возникает неустойчивость вихревого "твердотельного" вращения, которая может развиваться во времени либо по экспоненциальному закону (в случае постоянного стока и притока вещества), либо по сценарию "взрывного" типа, когда бесконечная скорость вращения может быть достигнута за конечный отрезок времени (при условии одновременно-

го неограниченного нарастания скоростей стока и притока). В работе высказывается предположение, что данная неустойчивость может быть одной из причин рождения и развития мощных торнадо и тайфунов в процессе формирования плотных облачных систем.

## 1. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНОГО СТОКА

Для аксиально-симметричного плоского, независимого от координаты  $z$ , движения несжимаемой вязкой среды (газа или жидкости) радиальная ( $V_r$ ) и азимутальная ( $V_\phi$ ) компоненты гидродинамической скорости описываются уравнением Навье-Стокса в цилиндрических координатах [4, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_\phi^2}{r} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi V_r}{r} = \\ = \nu \left( \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $P$  и  $\rho$  – давление и плотность соответственно;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости среды.

Уравнения (1) и (2) получены с учетом уравнения непрерывности, которое при  $\rho = \text{const}$  сводится к условию  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ . Однако это условие в определенном смысле является избыточным, поскольку отброшенная часть вязких сил трения пропорциональна вектору  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0$ , так что формально для получения "укороченных" уравнений Навье-Стокса (1) и (2) достаточно выполнения условия

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = f(t), \quad (3)$$

где  $f(t)$  – произвольная функция времени.

Следует подчеркнуть, что условие (3) может быть выполнено только для термодинамически неравновесных открытых многокомпонентных или многофазных систем, в которых в результате каких-либо физических процессов (в частности, за счет фазовых превращений) одна из компонент вещества частично или полностью исчезает из объема (например, переходит в более плотную конденсированную фазу) или возникает в объеме (рождается из другой фазы). Если в системе существует

динамическое равновесие, то недостаток или избыток вещества в каждый момент времени полностью компенсируется притоком исходного вещества, поступающего из внешнего источника. В результате этого средняя по объему плотность среды в каждой точке пространства остается постоянной во времени  $\partial\rho/\partial t = 0$ . Если при этом градиент плотности настолько мал, что в уравнении непрерывности можно пренебречь слагаемым  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\rho)$  по сравнению со скоростью притока или стока вещества, то с большой точностью можно положить  $\rho = \text{const}$ , что эквивалентно условию несжимаемости среды.

В дальнейшем будет рассматриваться конкретная двухкомпонентная система воздух–водяные пары, которая при охлаждении ниже точки росы (при данном давлении) в результате конденсации пара переходит в двухфазную систему воздух–водяные капли (туман) в процессе формирования облаков.

Итак, предположим, что внутри несжимаемой вязкой среды существует сток (конвергенция) или источник (дивергенция) вещества в некоторой ограниченной области пространства  $r \leq R_0$ . В случае однородной и постоянной мощности стока ( $Q_0 < 0$ ) или источника ( $Q_0 > 0$ ) уравнение непрерывности (3) для цилиндрически симметричного плоского движения среды принимает вид:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &\equiv \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = \\ &= \begin{cases} Q_0/\rho = \text{const}, & r \leq R_0, \\ 0, & r > R_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

откуда получаем следующее выражение для скорости стационарного радиального потока вещества в среде:

$$\begin{aligned} V_r(r) &= \begin{cases} \beta_0 r, & r \leq R_0, \\ \beta_0 R_0^2/r, & r > R_0, \end{cases} \\ \beta_0 &= Q_0/2\rho = \text{const}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановка соотношений (5) в уравнение (1) приводит к тождественному обращению в нуль объемных сил вязкого трения.

При отличной от нуля завихренности радиальная зависимость азимутальной скорости  $V_\phi$  может быть выбрана в виде, аналогичном модели Рэнкина для гидродинамического вихря в несжимаемой идеальной жидкости [4]:

$$V_\phi(r) = \begin{cases} \Omega r, & r \leq R_0, \\ \Omega R_0^2/r, & r > R_0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\Omega$  – угловая скорость вращения вихря. На рис.

1 показано поле скоростей для вихря Рэнкина (а) и для вихря с радиальным потоком (б).

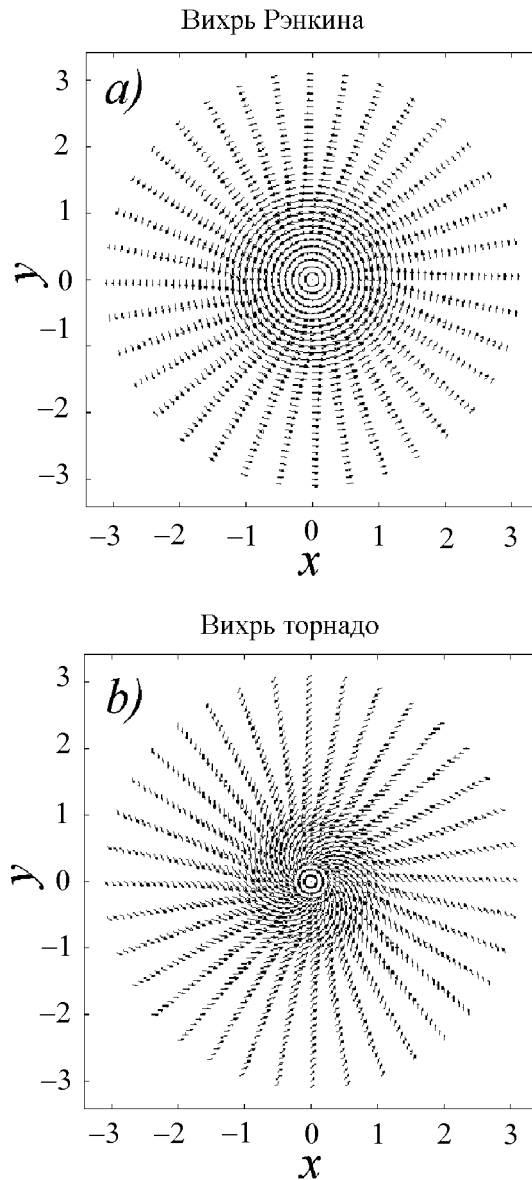


Рис. 1. Распределение поля скоростей для вихря Рэнкина (а) и для вихря с конечной скоростью сходящегося потока (б)

Подстановка соотношений (6) в уравнение (2) также обеспечивает обращение в нуль вязких сил трения во всем объеме. При этом уравнение (2) с учетом (5) и (6) приводится к следующему виду:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \begin{cases} -2\beta_0\Omega(t), & r \leq R_0, \\ 0, & r > R_0. \end{cases} \quad (7)$$

Соотношения (7) являются следствием того, что

в области  $r \leq R_0$  равные по величине конвективная и кориолисова силы имеют одинаковые знаки и суммируются, а в области  $r > R_0$  они противоположны по знаку и в точности компенсируют друг друга. Из уравнения (7) следует, что "твердотельное" вращение сердцевин вихря в области  $r \leq R_0$  при наличии объемного источника ( $Q_0 > 0$ ) и расходящегося радиального потока ( $\beta_0 > 0$ ) экспоненциально затухает во времени при ненулевом начальном значении  $\Omega(0) \neq 0$  угловой скорости:

$$\Omega(t) = \Omega(0) \exp(-2\beta_0 t), \quad (8)$$

тогда как при наличии объемного стока ( $Q_0 < 0$ ) и сходящегося радиального потока ( $\beta_0 < 0$ ) такое вращение неустойчиво и ускоряется по экспоненциальному закону

$$\Omega(t) = \Omega(0) \exp(2|\beta_0|t). \quad (9)$$

Это означает, в частности, что конденсация пара, играющая роль стока вещества во влажном воздухе, должна приводить к экспоненциальному нарастанию во времени начальной завихренности воздушных потоков в процессе образования облака.

С одной стороны, во внешней области  $r > R_0$  скорость вращения, согласно (7), остается постоянной  $\Omega(t) = \Omega(0) = \text{const}$ , что должно приводить к нарастающему во времени тангенциальному разрыву азимутальной скорости  $V_\phi$  в точке  $r = R_0$  (см. ниже).

С другой стороны, из уравнения (1) с учетом (5) и (6) следует, что в циклострофическом режиме вращения распределение давления имеет вид

$$P(r, t) = \begin{cases} P_0 + \frac{\rho}{2} [\Omega^2(t) - \beta_0^2] r^2, & r \leq R_0, \\ P_\infty - \frac{\rho}{2} [\Omega^2(0) + \beta_0^2] \frac{R_0^4}{r^2}, & r > R_0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $P_\infty$  – давление при  $r \rightarrow \infty$ . Из условия непрерывности давления (10) в точке  $r = R_0$  находим давление на оси вихря (при  $r=0$ ):

$$P_0(t) = P_\infty - \frac{\rho}{2} [\Omega^2(t) + \Omega^2(0)] R_0^2. \quad (11)$$

Отсюда следует, что в случае сохранения циклострофического режима в процессе развития гидродинамической неустойчивости вихря в системе с объемным стоком (9), по мере экспоненциального нарастания угловой скорости  $\Omega(t)$ , в некоторый момент времени  $t = t_0$ , где

$$t_0 = \frac{1}{4|\beta_0|} \ln \left[ \frac{2P_\infty}{\rho\Omega^2(0)R_0^2} - 1 \right], \quad (12)$$

давление (11) обращается в ноль. Однако следует иметь в виду, что понижение давления ниже точки кипения воды  $P_{evp}$  при данной температуре в двухфазной системе воздух – водяные капли приводит к мгновенному испарению капель и к увеличению влажности воздуха, что соответствует появлению источника (дивергенции) вещества внутри облака. В результате этого при  $t > \tilde{t}_0$ , где

$$\tilde{t}_0 = \frac{1}{4|\beta_0|} \ln \left[ \frac{2(P_\infty - P_{evp})}{\rho\Omega^2(0)R_0^2} - 1 \right] < t_0, \quad (13)$$

должно происходить расслоение вращения сердцевин вихря с замедлением вращения в приосевой области, согласно выражения (8).

## 2. "ВЗРЫВНАЯ" НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЯ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ СТОКЕ И ПРИТОКЕ ВЕЩЕСТВА

Рассмотренная в предыдущем разделе экспоненциальная неустойчивость вихря соответствует квазистационарному режиму с постоянными во времени мощностью стока ( $Q_0 = \text{const}$ ) и скорости радиального потока ( $\beta_0 = \text{const}$ ). Однако в открытой системе, в принципе, возможен нестационарный режим, когда скорости стока и притока вещества являются функциями времени  $Q(t) = 2\rho\beta(t)$  при постоянной плотности среды  $\rho = \text{const}$ .

В этом случае уравнение (1) с учетом соотношений (5) и (6) и замены  $\beta_0$  на  $\beta(t)$  принимает следующий вид:

$$\frac{d\beta(t)}{dt} + \beta^2(t) - \Omega^2(t) = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad r \leq R_0; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta(t)}{dt} - \frac{R_0^2}{r^2} [\beta^2(t) + \Omega^2(t)] = \\ = -\frac{r}{\rho R_0^2} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad r > R_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим частное решение системы уравнений (14) и (15), которое удовлетворяет условию

$$\beta^2(t) - \Omega^2(t) = 0. \quad (16)$$

При этом распределение давления, согласно

уравнений (14) и (15), имеет вид

$$P(r, t) = \begin{cases} P_0(t) - \frac{\rho r^2}{2} \frac{d\beta}{dt}, & r \leq R_0, \\ P_\infty - \rho \beta^2(t) \frac{\rho R_0^4}{2r^2} - \rho R_0^2 \frac{d\beta}{dt} \ln(r/R_0), & r > R_0. \end{cases} \quad (17)$$

где

$$P_0(t) = P_\infty - \rho \beta^2(t) R_0^2 + \frac{\rho R_0^2}{2} \frac{d\beta}{dt}. \quad (18)$$

Уравнение (7) в области  $r = R_0$  с учетом условия (16) при произвольных знаках  $\Omega(t)$  и  $\beta(t)$  приводится к виду

$$\frac{d\Omega}{dt} \pm 2\Omega^2(t) = 0. \quad (19)$$

Нетрудно убедиться в том, что при любом направлении вращения вихря и при наличии объемного источника вещества, когда  $Q(t) > 0$  и  $\beta(t) > 0$ , решение уравнения (19) имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \frac{\Omega(0)}{1 + 2|\Omega(0)|t}; \\ \beta(t) &= \frac{\beta(0)}{1 + 2\beta(0)t}. \end{aligned} \quad (20)$$

В то же время, при наличии объемного стока, когда  $Q(t) < 0$  и  $\beta(t) < 0$ , решение уравнения (19) с учетом (16), независимо от знака  $\Omega(t)$ , принимает вид

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \frac{\Omega(0)}{1 - 2|\Omega(0)|t}, \\ \beta(t) &= \frac{-|\beta(0)|}{1 - 2|\beta(0)|t}, \end{aligned} \quad (21)$$

что соответствует так называемой "взрывной" неустойчивости "твердотельного" вращения сердцевин вихря, когда угловая  $\Omega(t)$ , азимутальная  $r\Omega(t)$  и радиальная  $r\beta(t)$  скорости, а также мощность стока  $Q(t)$  формально обращаются в бесконечность в момент времени

$$t^* = \frac{1}{2|\Omega(0)|} = \frac{1}{2|\beta(0)|}. \quad (22)$$

Разумеется, реальные гидродинамические скорости должны быть конечными и в рамках приближения несжимаемой среды не могут превышать значений, сравнимых со скоростью звука  $C_s$ . Это

означает, что данная неустойчивость может развиваться в течение ограниченного отрезка времени вплоть до  $t = t_s$ , где  $t_s$  определяется из условия, что максимальная скорость  $\Omega(t_s)R_0 < C_s$ :

$$t_s \leq t^* \left[ 1 - \frac{\Omega(0)R_0}{C_s} \right] \quad (23)$$

Из уравнений (18) и (21) следует, что давление на оси вихря будет

$$P_0(t) = P_\infty - \frac{2\rho R_0^2 \beta^2(0)}{1 - t/t^*}, \quad (24)$$

так что в некоторый момент времени

$$t_0^* = t^* \left( 1 - \sqrt{2\rho R_0^2 \beta^2(0)/P_\infty} \right) \quad (25)$$

формально  $P_0(t) = 0$ . Однако, начиная с некоторого момента времени  $t_0^*$ , где

$$\tilde{t}_0^* = t^* \left( 1 - \sqrt{2\rho R_0^2 \beta^2(0)/(P_\infty - P_{evp})} \right) < t_0^*, \quad (26)$$

происходит расслоение сердцевин вихря, что также приводит к появлению и быстрому нарастанию скачков азимутальной скорости.

### 3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА СКОРОСТЕЙ И АНОМАЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ НА ГРАНИЦЕ СЕРДЦЕВИНЫ ВИХРЯ

Нарастающий во времени скачок (тангенциальный разрыв) азимутальной скорости при  $r = R_0$  должен приводить к возникновению неустойчивости коротковолновых поверхностных возмущений с длиной волны  $\lambda \ll R_0$ . Дисперсионное уравнение таких возмущений с учетом конечной вязкости имеет вид (ср. с [7])

$$\begin{aligned} (\omega - kV_0) (\omega - kV_0 + i\nu k^2) &= \\ &= -\omega (\omega + i\nu k^2), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$V_0(t) = \Omega(0)R_0 [\exp(2|\beta|t) - 1]; \quad (28)$$

$k = 2\pi/\lambda$  – волновое число ( $kR_0 \gg 1$ ).

Инкремент нарастания неустойчивых возмущений на тангенциальном разрыве, согласно (14), будет

$$\gamma(k) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{k^2 V_0^2 + \nu k^4} - \nu k^2 \right] \quad (29)$$

и в области больших  $k \gg V_0/\nu$  стремится к предельному значению (при  $k \rightarrow \infty$ )

$$\gamma_\infty = V_0^2/2\nu. \quad (30)$$

Подставляя соотношение (28) в (30), для временной эволюции амплитуды поверхностных возмущений получаем закон типа "экспонента в экспоненте":

$$\zeta(t) = \zeta(0) \times \exp \left\{ \frac{\Omega^2(0)R_0^2 t}{2\nu} [\exp(2|\beta_0|t) - 1]^2 \right\}. \quad (31)$$

При этом спектр наиболее неустойчивых возмущений экспоненциально быстро смещается в область предельно коротких длин волн порядка длины свободного пробега молекул  $l$ , где происходит быстрая диссипация энергии колебаний. Поэтому максимальное время развития такой неустойчивости по порядку величины будет

$$t_{max} = \frac{1}{2|\beta_0|} \ln \left[ \frac{2\pi\nu}{\Omega(0)R_0 l} \right], \quad (32)$$

а максимальный инкремент, согласно выражений (31) и (32), будет

$$\gamma_{max} = \frac{\Omega^2(0)R_0^2}{2\nu} \exp(4|\beta|t_{max}) = \frac{2\pi^2\nu}{l^2}. \quad (33)$$

В режиме развитой мелкомасштабной турбулентности на тангенциальном разрыве возникает аномальная турбулентная вязкость с коэффициентом

$$\nu^* \approx l^2 \gamma_{max} \approx 2\pi^2\nu. \quad (34)$$

Аналогичные оценки могут быть проведены и для "взрывной" неустойчивости вихря, когда скачок азимутальной скорости при  $r = R_0$  и амплитуда поверхностных возмущений равны:

$$V_0(t) = \Omega_0 R_0 t / (t^* - t); \quad (35)$$

$$\zeta(t) = \zeta(0) \exp \left\{ \frac{\Omega^2(0)R_0^2 t^3}{2\nu(t^* - t)^2} \right\}. \quad (36)$$

В этом случае максимальное время развития неустойчивости  $t_{max}^*$  определяется соотношением

$$t_{max}^* = \frac{t^*}{[1 + \Omega(0)R_0 l / 2\pi\nu]}, \quad (37)$$

а максимальный коэффициент турбулентной вязкости совпадает с выражением (34). Это означает, что между ускоряющейся в результате гидродинамической неустойчивости сердцевиной вихря

и внешними слоями среды возникают вязкие силы "сцепления" с аномально большим эффективным коэффициентом вязкости  $]\nu^* \gg \nu$ , что должно способствовать вовлечению внешней среды в процесс ускоренного вращения вихря и устранению тангенциального разрыва азимутальной скорости.

#### 4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АТМОСФЕРНОГО ВИХРЯ С УЧЕТОМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

Рассмотрим условия развития гидродинамической неустойчивости вихря при учете силы тяжести, действующей вдоль оси  $z$ , и при наличии восходящих или нисходящих вертикальных потоков со скоростями  $V_z > 0$  или  $V_z < 0$  соответственно. В этом случае уравнения (1) и (2) должны быть дополнены  $z$ -компонентой уравнения Навье-Стокса, которая для аксиально-симметричного потока имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} - V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) - g, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести, направленной вниз.

Уравнение непрерывности (3) с учетом объемного стока или источника в области  $r \leq R_0$  принимает вид

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &\equiv \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \\ &= \begin{cases} Q_0/\rho = \text{const}, & r \leq R_0, \\ 0, & r > R_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

Простейшее стационарное решение уравнения (39) с разделяющимися переменными при  $Q = Q_0 = \text{const}$  имеет вид

$$V_z(z) = \begin{cases} V_{z0} + \alpha_0 z, & r \leq R_0, \\ 0, & r > R_0, \end{cases}, \quad (40)$$

$$\alpha_0 = \text{const},$$

$$V_r(r) =$$

$$= \begin{cases} \tilde{\beta}_0 r, & r \leq R_0, \\ \tilde{\beta}_0 R_0^2/r, & r > R_0, \end{cases} \quad \tilde{\beta}_0 = \beta_0 - \alpha_0/2. \quad (41)$$

При этом объемные силы вязкости в уравнениях (1) и (38) тождественно равны нулю, так что с

учетом соотношений (40) и (41) получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \begin{cases} \rho r [\Omega^2(t) - \tilde{\beta}_0^2], & r \leq R_0, \\ \frac{\rho R_0^4}{r^3} [\Omega^2(t) + \tilde{\beta}_0^2], & r > R_0, \end{cases} \quad (42)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \tilde{g} - \rho \alpha_0^2 z, \quad \tilde{g} = g + \alpha_0 V_{z0}. \quad (43)$$

В то же время, уравнение (2) в области  $r \leq R_0$  с учетом выражений (6) и (41) приводится к виду

$$\frac{d\Omega}{dt} + 2\tilde{\beta}_0\Omega(t) = 0, \quad (44)$$

откуда следует, что при наличии объемного стока, когда  $\beta_0 < 0$ , инкремент неустойчивости, характеризующей экспоненциальное ускорение "твердотельного" вращения вихря, будет

$$\tilde{\gamma} = 2|\tilde{\beta}_0| = 2|\beta_0| + \alpha_0. \quad (45)$$

Как видим, под действием вертикального потока при условии  $\alpha_0 > 0$  происходит усиление гидродинамической неустойчивости вихря, тогда как при  $\alpha_0 < 0$  инкремент нарастания (45) уменьшается, а при  $|\alpha_0| > 2|\beta_0|$  меняет знак, что соответствует замедлению вращения вихря. Интегрирование уравнений (42) и (43) определяет разность давлений между двумя произвольными точками

$$P_2 - P_1 = -\rho \tilde{g} (z_2 - z_1) - \begin{cases} \left[ \frac{\rho}{2} \alpha_0^2 (z_2^2 - z_1^2) - \frac{\rho}{2} [\Omega^2(t) - \tilde{\beta}_0^2] (r_2^2 - r_1^2) \right], & |r_2 - r_1| \leq R_0, \\ \frac{\rho R_0^4}{2} [\Omega^2(t) + \tilde{\beta}_0^2] \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right), & |r_2 - r_1| > R_0. \end{cases} \quad (46)$$

Из уравнения (46) следует, что форма поверхности постоянного давления (изобары), которая соответствует точке испарения капель  $P_{evp}$ , во внутренней области  $r \leq R_0$  с учетом соотношений (10) и (11) определяется уравнением

$$z^2(r, t) + \frac{2\tilde{g}}{\alpha_0^2} z(r, t) + \frac{[\Omega^2(t) - \tilde{\beta}_0^2]}{\alpha_0^2} \times \times (2R_0^2 - r^2) - \frac{2(P_\infty - P_{evp})}{\rho \alpha_0^2} = 0, \quad (47)$$

а во внешней области  $r > R_0$ , согласно выражения (10), задается соотношением

$$z(r, t) = z_0(t) - \frac{[\Omega^2(t) + \tilde{\beta}_0^2] R_0^4}{2\tilde{g}r^2} + \frac{(P_\infty - P_{evp})}{\rho \tilde{g}}, \quad (48)$$

где функция  $z_0(t)$  подбирается из условия непрерывности изобары в точке  $r = R_0$ . Согласно уравнения (47), находим значение координаты  $z(R_0, t)$ :

$$z(R_0, t) = -\frac{\tilde{g}}{\alpha_0^2} + \sqrt{\frac{\tilde{g}^2}{\alpha_0^4} - \frac{[\Omega^2(t) - \tilde{\beta}_0^2] R_0^2}{\alpha_0^2} + \frac{2(P_\infty - P_{evp})}{\rho \alpha_0^2}}, \quad (49)$$

так что

$$z_0(t) = z(R_0, t) + \frac{R_0^2}{2\tilde{g}} [\Omega^2(t) + \tilde{\beta}_0^2] - \frac{(P_\infty - P_{evp})}{\rho \tilde{g}}. \quad (50)$$

Координата точки изобары на оси вихря при  $r = 0$ , согласно уравнений (47)–(50), определяется выражением

$$z(0, t) = -\frac{\tilde{g}}{\alpha_0^2} + \sqrt{\frac{\tilde{g}^2}{\alpha_0^4} - \frac{2R_0^2 [\Omega^2(t) - \tilde{\beta}_0^2]}{\alpha_0^2} + \frac{2(P_\infty - P_{evp})}{\rho \alpha_0^2}}. \quad (51)$$

Отсюда следует, что при  $\tilde{g} > 0$  с ростом величины угловой скорости  $\Omega(t)$  в результате развития экспоненциальной неустойчивости (при  $\tilde{\beta} < 0$ ) происходит нарастание абсолютной величины  $z(0, t)$ , что соответствует углублению минимума функции  $z(r, t)$  в области  $z < 0$  (см. ниже).

Особый интерес представляет случай нестационарного вертикального потока, когда в выражении (40) вместо константы  $\alpha_0$  содержится некоторая функция времени  $\alpha(t)$ . При этом уравнение (38) в области  $r \leq R_0$  приводится к виду

$$z \left[ \frac{d\alpha}{dt} + \alpha^2(t) \right] = - \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \tilde{g} \right). \quad (52)$$

Простейшими решениями уравнения (52) являются независимые решения уравнений

$$\frac{d\alpha}{dt} + \alpha^2(t) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} + \rho \tilde{g} = 0. \quad (53)$$

Решение первого из уравнений (53) имеет вид

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{\alpha(0)}{1 + \alpha(0)t}, & \alpha(0) > 0, \\ \frac{-|\alpha(0)|}{1 - |\alpha(0)|t}, & \alpha(0) < 0, \end{cases} \quad (54)$$

откуда следует, что при  $\alpha(0) < 0$  имеет место "взрывная" неустойчивость вертикального потока под действием конвективной силы. Если при этом возникает также "взрывная" неустойчивость вращательного движения вихря (21) при условии  $\tilde{\beta}^2(t) = \Omega^2(t)$ , где  $\tilde{\beta}(t) = \beta(t) - \alpha(t)/2$ , то совпадение моментов расходимости (разрыва) функций  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  и  $\Omega(t)$  происходит при условии

$$|\alpha(0)| = 2|\tilde{\beta}(0)| = 2|\Omega(0)|.$$

Интегрирование второго из уравнений (53) совместно с уравнениями (42) приводит к следующему выражению для определения изменяющейся во времени формы изобары, которая при всех  $t$  непрерывна в точке  $r = R_0$ :

$$z(r, t) = \frac{(P_\infty - P_{evp})}{2\rho\tilde{g}} - \begin{cases} \left( \frac{[\Omega^2(t) - \tilde{\beta}_0^2]}{2\tilde{g}} (2R_0^2 - r^2) - \frac{\tilde{\beta}_0^2 R_0^2}{\tilde{g}} \right), & r \leq R_0, \\ \frac{R_0^2 [\Omega^2(t) - \tilde{\beta}_0^2]}{2\tilde{g}}, & r > R_0. \end{cases} \quad (55)$$

Как и в случае экспоненциальной неустойчивости, по мере увеличения угловой скорости  $\Omega(t)$  в результате развития "взрывной" неустойчивости вихря происходит углубление отрицательного минимума функции  $z(r, t)$  в точке  $r = 0$ .

На рис. 2 показаны зависимости функции  $\tilde{z}(r, t) = z(r, t) - z(\infty, 0)$  от  $r$  для изобары  $p_\infty = p_{evp}$ , соответствующей нижней границе области конденсации влаги при  $r \rightarrow \infty$  и  $\tilde{g} > 0$  для разных моментов времени. Представленные на разрезе сечения поверхностей постоянного давления соответствуют равным промежуткам времени и отражают временную динамику развития "воронки" при рождении торнадо на нижней кромке конденсирующегося облака. Удлинение воронки происходит вплоть до соприкосновения ее минимума с поверхностью земли, либо до того момента времени, когда максимальная скорость вращения вихря достигает скорости звука.

Таким образом, учет силы тяжести и вертикальных потоков позволяет описать одно из самых главных наблюдаемых явлений – образование "воронки" на нижней кромке облака при возникновении и развитии торнадо.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТОРНАДО И ТАЙФУНОВ

С целью выяснения применимости полученных новых нестационарных решений уравнений Навье-Стокса и непрерывности в несжимаемой вязкой среде с объемным стоком и свободным притоком вещества для описания атмосферных вихрей (торнадо и тайфунов), проведем численные оценки характерных времен развития рассмотренных выше гидродинамических неустойчивостей вихревого движения в условиях интенсивной конденсации влаги внутри облака.

Рассмотрим медленно вращающееся в закрученном воздушном потоке круглое облако радиуса  $R_0 \approx 1$  км с равными по порядку величины начальными значениями азимутальной и радиальной скоростями на краю облака  $V_{r0} \approx V_{\phi0} \approx (1 \div 10)$  м/с. Согласно уравнений (5) и (6), это соответствует абсолютным значениям начальной угловой скорости  $\Omega(0)$  и скорости сходимости радиального потока  $\beta_0$  в диапазоне  $(10^{-3} \div 10^{-2})$  с<sup>-1</sup>. При влажности атмосферного воздуха порядка 100% его плотность почти вдвое превышает плотность сухого воздуха  $\rho = 1.3 \times 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>, так что приведенные значения параметра  $\beta_0$  эквивалентны мощности объемного стока  $Q_0$  за счет конденсации влаги порядка  $\sim 5 \times (10^{-6} \div 10^{-5})$  г/с см<sup>3</sup>. В этих условиях характерное время ускорения вращения вихря в результате экспоненциальной неустойчивости, согласно выражения (9), будет  $\tau = 1/2|\beta_0| \approx (1 \div 10)$  мин.

Такой же порядок величины, согласно уравнения (22), имеет время развития "взрывной" неустойчивости вихря  $t^*$ , а также время  $t_s$ , необходимое для достижения максимальной скорости на границе сердцевин вихря, сравнимой со скоростью звука в воздухе  $C_s \approx 330$  м/с (см. уравнение (23)).

В случае экспоненциальной неустойчивости максимальная скорость порядка  $C_s$  достигается за промежуток времени  $t \approx (3 \div 50)$  мин. Именно в таком интервале времени (от минут до часов) находятся типичные наблюдаемые времена зарождения и развития торнадо.

Для более крупномасштабных атмосферных вихрей типа циклонов, ураганов и тайфунов, заро-



### Торнадо

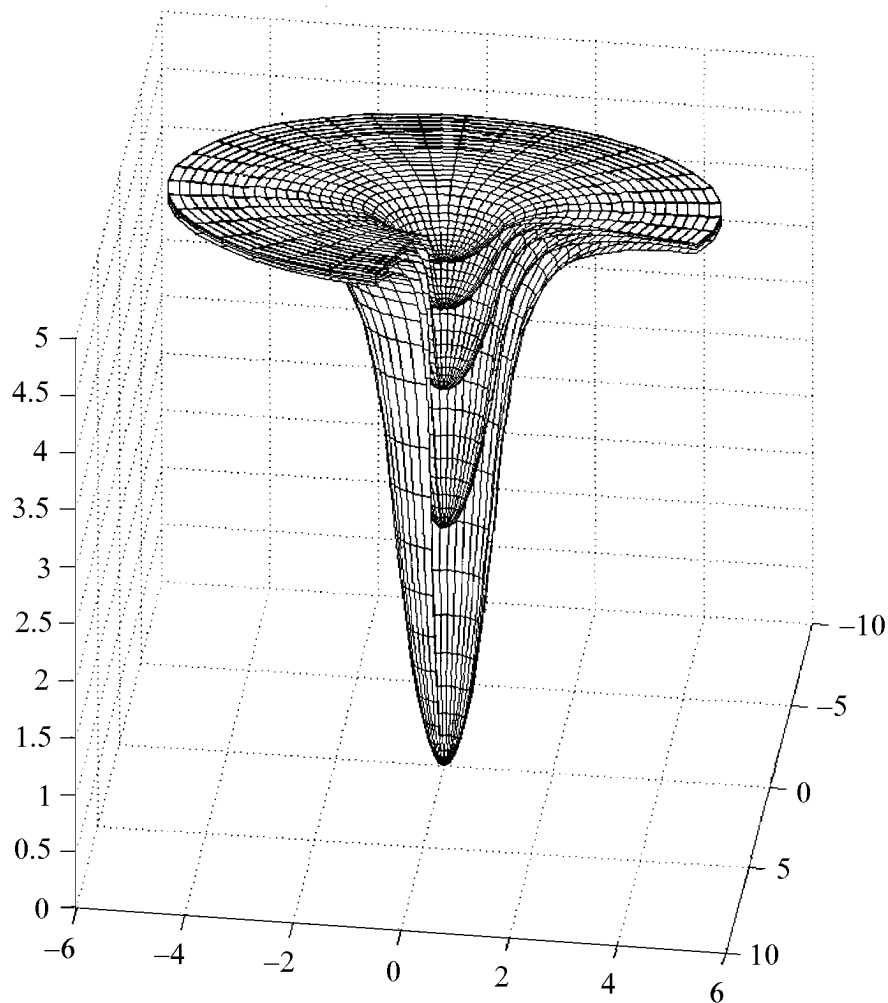


Рис. 2. Динамика формы изобары на нижней кромке области конденсации влаги в процессе формирования облака и развития гидродинамической неустойчивости вихря (торнадо)

ждающихся в облачных массивах с размерами порядка 100 км и более, характерные времена развития неустойчивости возрастают на два-три порядка и могут достигать нескольких суток, что также согласуется с наблюдаемыми временами жизни ураганов и тайфунов.

Заметим, что время развития неустойчивости тангенциального разрыва скоростей, согласно уравнения (32), при  $\nu = 0.15 \text{ см}^2/\text{с}$  и  $l = 5 \times 10^{-7} \text{ см}$  для воздуха при нормальном давлении лежит в том же интервале, что и время разгона вихря до скорости звука:  $t_{max} \approx (2 \div 45) \text{ мин}$ , так что турбулентная вязкость в узком слое на границе сердцевины вихря, по-видимому, не успевает оказать заметного влияния на движение окружающего воздуха до включения газодинамических эффектов конечной

сжимаемости и сильной турбулентности.

В то же время, обусловленное циклострофическим режимом вращения пониженное давление на оси вихря в случае экспоненциальной неустойчивости, согласно уравнений (12) и (13), при  $P_\infty = 1 \text{ бар}$  и  $\rho = 2.5 \times 10^{-3} \text{ г/см}^3$  достигается приблизительно за то же время  $t_0 = (3 \div 50) \text{ мин}$ , тогда как для "взрывной" неустойчивости, согласно (25), это время сравнимо с  $t^* = \tau$ . Именно сильным понижением давления внутри сердцевины вихря объясняется характерный для торнадо эффект "всасывания".

Кроме того, как отмечалось выше, в двухфазной системе воздух-водяные капли понижение давления ниже точки кипения воды при данной температуре должно приводить к прекращению кон-

денсации влаги и к испарению капель в приосевой области вихря. Этим объясняется образование в центральной части облачной системы прозрачного "ядра" торнадо или "глаза" тайфуна, внутри которого скорость вихревого вращения воздуха замедляется.

Можно оценить время касания "воронки" торнадо с поверхностью земли. В случае экспоненциальной неустойчивости при  $z = -H$  (где  $H$  – высота нижней кромки облака над землей), согласно уравнений (51) и (9), при условии  $\Omega^2(t) \gg \beta_0^2$  и  $\tilde{g}/\alpha_0^2 \gg H$  находим время касания

$$t_H = \frac{1}{4|\beta_0|} \ln \left[ \frac{\tilde{g}H}{\Omega^2(0)R_0^2} \right], \quad (56)$$

а для "взрывной" неустойчивости, согласно уравнений (54) и (21), получаем

$$t_H^* = t^* \left[ 1 - \Omega(0)R_0/\sqrt{\tilde{g}H} \right]. \quad (57)$$

При  $H = 1$  км для приведенных выше значений  $V_{\phi 0} = R_0\Omega(0)$  и получаем следующие оценки:  $t_H \approx (1 \div 25)$  мин и  $t_H^* \approx t^*(1 \div 10)$  мин.

В заключение данного раздела необходимо подчеркнуть, что возрастание кинетической энергии и углового момента вихря в процессе развития экспоненциальной или "взрывной" неустойчивости не противоречит законам сохранения энергии и момента количества движения, поскольку в открытой системе с объемным стоком и непрерывным притоком вещества происходит перенос необходимого количества кинетической энергии и углового момента из внешней среды с ненулевой начальной скоростью вращения  $V_{\phi 0} = \Omega(0)R_0^2/r$  в области  $r \leq R_{max}$ . Величина максимального радиуса  $R_{max}$  в естественных условиях рождения торнадо и тайфунов на свободном пространстве суши или моря фактически ограничена только конечной кривизной земной поверхности. Это означает, что максимальные значения энергии и момента импульса атмосферного вихря не могут превышать следующих величин (в расчете на единицу длины):

$$E_{kin} = \pi\rho \int_{R_0}^{R_{max}} r dr [V_{\phi}^2(r) + V_r^2(r)] = \pi\rho R_0^4 [\Omega^2(0) + \beta^2] \ln(R_{max}/R_0), \quad (58)$$

$$M_z = 2\pi\rho \int_{R_0}^{R_{max}} r^2 V_{\phi} dr = \pi\rho R_0^2 R_{max}^2 \Omega(0). \quad (59)$$

Для приведенных выше значений параметров, типичных для торнадо, и при  $R_{max} = 10^3$  км находим  $E_{max} \approx (10^8 \div 10^{10})$  Дж/м. При этом максимальная выделяемая в процессе ускорения вихря

мощность  $\left( \frac{dE_{kin}}{dt} \right)_{max} = 4|\beta_0|E_{max}$  по порядку величины составляет  $(0.4 \div 400)$  МВт в расчете на метр длины вихря, что объясняет колоссальную разрушительную силу торнадо.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведенные численные оценки показывают, что предложенный в данной работе механизм гидродинамической неустойчивости вихря в несжимаемой вязкой среде под действием конвективной и кориолисовой сил, создаваемых сходящимися радиальными потоками в открытой термодинамически неравновесной системе с объемным стоком и неограниченным притоком вещества из внешнего источника, может быть реальной причиной зарождения и развития мощных атмосферных вихрей – торнадо и тайфунов – в процессе интенсивной конденсации водяного пара из охлажденного ниже точки росы влажного воздуха при формировании плотных облаков. Как следует из полученных в разделах 1 и 2 нестационарных решений уравнений Навье-Стокса и непрерывности, такая неустойчивость может развиваться во времени либо по экспоненциальному закону при постоянном стоке и притоке вещества, либо "взрывным" образом с неограниченным нарастанием по мере приближения к некоторому моменту времени  $t^*$  как скорости вращения вихря, так и скоростей стока и притока вещества. Ускорение вращения вихря ограничивается скоростями, сравнимыми со скоростью звука, при которых включаются эффекты сжимаемости воздуха, диссипативные силы объемной вязкости и крупномасштабная турбулентность. Характерные времена развития неустойчивости вихревого движения согласуются по порядку величины с соответствующими временами зарождения и существования торнадо (от нескольких минут до часов) и тайфунов (до нескольких суток). При учете силы тяжести данная модель описывает главный феномен торнадо – образование на нижней кромке облака удлиняющейся "воронки" в результате изменения формы поверхности постоянного давления (изобары), которая ограничивает снизу область интенсивной конденсации влаги. Следует отметить, что в открытой системе не возникает проблем с законами сохранения энергии и момента количества движения, поскольку радиальные потоки могут переносить не только необходимое количество вещества, но и необходимое количество кинетической энергии и углового момента из медленно вращающейся внешней среды.

Выражаю искреннюю благодарность А.А. Авраменко, В.В. Мелешко, А.М. Пальти и А.Э. Пашицкому за полезные обсуждения рассмотренных в статье вопросов.

1. *Наливкин Д.В.* Ураганы, бури и смерчи.– Л.: Наука, 1969.– 265 с.
2. Интенсивные атмосферные вихри/ Под ред. Л. Бенгссона и Дж. Лайтхилла.– М.: Мир.– 1985.– 382 с.
3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды, Т. 1-2.– М.: Наука, 1983-84.– 696 с.
4. *Kundu P.K.* Fluid Mechanics.– San Diego, N.-Y., Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto: Academic Press Inc., 1990.– 638 p.
5. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами.– Новосибирск: Наука, 1989.– 333 с.
6. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика.– М.: Наука, 1979.– 527 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика.– М.: Наука, 1975.– 788 с.