лев, РФ), главный конструктор ракетного комплекса «Энергия», д-р техн. наук; Александр Алексеевич Негода — генеральный директор Национального космического агентства Украины, д-р экон. наук.

В разное время эти люди тесно занимались проблемами баллистики и динамики полета и при консультациях специалистов школы Н.Ф. Герасюты успешно решали возникшие проблемы и защищали диссертации.

Научной школой Н.Ф. Герасюты подготовлено более 60 ученых и высококлассных специалистов. Воспитанники этой школы опубликовали свыше 1000 научных статей, издали 15 монографий и получили около 400 авторских свидетельств на пионерские технические решения.

В 1987 г. Николай Федорович ушел из жизни. Созданная им научная школа продолжает его традиции, растет и развивается.

Получено 24.05.2007

І.Ф. Федоренко

М.Ф. Герасюта та його науково-технічна школа

Ракетобудівна тематика в Дніпропетровському державному університеті дала поштовх розгортанню досліджень з різних напрямків. Саме в той час із середини 50-х років в університеті починають зароджуватися нові наукові школи. Дана стаття присвячена історії виникнення й розвитку наукової школи М.Ф. Герасюти — школи балістики, динаміки польоту й керування ракетами.

А.Н. Глебова

Б.Н. Пшеничный — основатель научной школы по оптимизации, теории оптимального управления и теории дифференциальных игр

Рассматриваются труды академика НАН Украины Б.Н. Пшеничного (1937—2000) и членов его научной школы по оптимизации, теории оптимального управления и теории дифференциальных игр, работа руководимого им отдела вычислительных методов Института кибернетики им.В.М. Глушкова НАН Украины.

В настоящее время киевская научная школа оптимизации пользуется мировой известностью. Зарождение и расцвет этой школы неразрывно связаны с деятельностью выдающегося украинского ученого, специалиста в области прикладной математики Бориса Николаевича Пшеничного (1937 — 2000) [1].

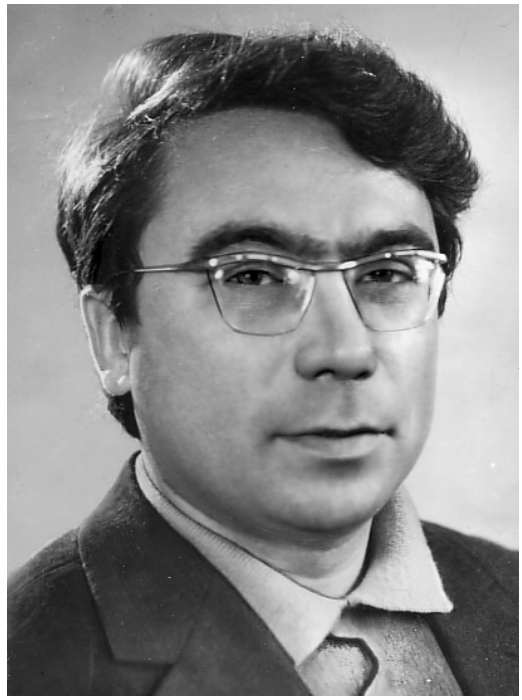
Вклад Б.Н. Пшеничного в отечественную науку выразился в создании им научной школы по теории необходимых условий экстремума, теории дифференциальных игр и численным методам оптимизации; в разработке фундаментальных методов и алгоритмов, доказательстве основных теорем, которые получили дальнейшее развитие и обоснование в работах его учеников; в организации ряда исследовательских структур и подготовке научных кадров [2]. Научные труды Б.Н. Пшеничного — более 170 статей и 8 монографий [1, л.25—40] — вошли в золотой фонд украинской и мировой науки. Монографии Б.Н. Пшеничного [3—7], изданные на русском языке, впоследствии были переведены на английский, немецкий и французский языки и вышли в издательствах “Мир” (Москва), “Марсель Деккер” (США), “Шпрингер” и “Тюбнер” (Германия) [1, л.107 об.].

Борис Николаевич Пшеничный родился в Киеве 24 апреля 1937 года, в 1941—1946 гг. вместе с семьёй проживал в г. Саратове, откуда по окончании войны вернулся на Украину, в г. Львов. Здесь он закончил среднюю школу и в 1954 году поступил на механико-математический факультет Львовского государственного университета им. И. Франко. Свою дипломную работу он выполнил у известного специалиста в области дифференциальных уравнений Я.С. Лопатинского. После окончания университета в 1959 г. Б.Н. Пшеничный, получив специальность «математик», был направлен на работу в Киев, в Вычислительный центр АН УССР, который впоследствии был переименован в Институт кибернетики АН Украины. Вся научная деятельность Б.Н. Пшеничного связана с этим институтом, где он прошел путь от инженера (в отделе В.Е. Шаманского, куда он попал по распределению) до заведующего отделом.

В соответствии с личным делом Б.Н. Пшеничного [1, л. 4, 111] его «послужной список» в Институте кибернетики следующий: 08.1959 — 12.1959 — инженер; 12.1959 — 06.1960 — младший научный сотрудник; 06.1960 — 03.1961 — старший инженер; 03.1961 — 09.1964 — ведущий инженер; 09.1964 — 10.1970 — исполняющий обязанности завотделом; 10.1970 — 17.10.2000 — заведующий отделом вычислительных методов.

Одновременно с 1996 года Б.Н.Пшеничный заведовал отделом численных методов оптимизации в Институте прикладного системного анализа НАН и Министерства образования Украины [1, л.103].

В 1964 г. Б.Н. Пшеничный защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Вычислительная математика». В 1970 г. он получил степень доктора физико-математических наук по специальности «Дифференциальные уравнения». В 1974 г. Б.Н. Пшеничному было присвоено звание профессора по специальности «Математическая кибернетика» [1, л.3]. 28 марта 1985 г. Б.Н.Пшеничный был избран членом-корреспондентом АН УССР по специальности «Математика». Постановлением Общего собрания НАН Украины от 25 ноября 1992 г. Б.Н.Пшеничный избран действительным членом (академиком) по специальности «Системы управления подвижными объектами» Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации НАН Украины [1, л.1, 91, 98].



Борис Николаевич Пшеничный

Для оценки деятельности Б.Н. Пшеничного как основателя научной школы характерно заключение Экспертной комиссии Отделения математики и кибернетики АН УССР, подписанное академиком Ю.А. Митропольским [1, л.91]:

«Б.Н. Пшеничный — известный ученый в области теории оптимального управления, теории дифференциальных игр, математического программирования и численных методов. По всем этим направлениям математических наук им получены результаты, в значительной степени определившие их становление и развитие. Он является признанным главой украинской школы по теории оптимального управления и дифференциальных игр. Благодаря введению новых классов функций и новых методов исследования многозначных отображений ему удалось развить идеи и методы, которые обусловили в значительной мере современные успехи в такой области, как теория необходимых условий экстремума. Разработанные Б.Н. Пшеничным численные алгоритмы решения экстремальных задач нашли широкое применение в практике».

В наградном листе от 26.10.1998 г. Б.Н. Пшеничный представлен как «руководитель украинской школы по теории методов решения проблем оптимального управления и дифференциальных игр» [1, л.107].

Школу Б.Н.Пшеничного представляют: А.А. Чикрий, Ю.М. Данилин, В.М. Панин, Ю.Н. Онопчук, В.В. Остапенко, Е.Е. Кирик, Э.И. Ненахов, Р.А. Хачатрян, В.С. Кирилюк, Э. Махмудов, А.П. Яковлева, В.Н. Гуров, С. Очилов, М. Колжанов, Г.Ц. Дзюбенко, М.И. Сагайдак, В.Г. Покотило, Л.А. Соболенко, Н.Н. Редковский, И.Ф. Ганжела и др.

Основы практически всех направлений научной школы Б.Н. Пшеничного заложены в трудах самого Бориса Николаевича, который плодотворно работал во многих областях математики. С большим энтузиазмом занимаясь прикладными проблемами математики, Б.Н. Пшеничный сохранял при этом изначальную склонность к «чистой математике», к аналитическому подходу при решении любых практических задач. Круг научных интересов Б.Н. Пшеничного необычайно широк. Он включает в себя проблемы проектирования сетей, теорию графов, задачи оптимального управления, математическое программирование и численные методы минимизации функций, выпуклый анализ и необходимые условия экстремума, дифференциальные игры, многозначные отображения и дифференциальные включения, модели экономической динамики, минимаксное оценивание параметров, проблемы поиска движущихся объектов, решение вариационных неравенств, методы укладки геометрических фигур.

Первые исследования Б.Н. Пшеничного касались расчета энергетических сетей, в частности городских газопроводов высокого и среднего давления, оптимального выбора диаметров труб. Первая его публикация по этой тематике появилась в 1962 г. Ее целью было продемонстрировать и обосновать применение методов нелинейного программирования к задаче распределения потоков, сформулированной как оптимизационная задача на графе, и на этой основе предложить конкретные численные алгоритмы расчетов с использованием ЭВМ. Совокупность результатов по этому вопросу была представлена в кандидатской диссертации Бориса Николаевича «Численные методы расчета транспортных сетей» (Киев, 1963). Впоследствии Б.Н. Пшеничный неоднократно возвращался к этой тематике. В итоге на основе четкой формализации задач расчета потоков им совместно с Е.Е. Кирик были предложены строгие теоретические методы анализа сетей, которые позволили охватить многочисленные нестандартные задачи на сетях [8].

Задача расчета энергетических систем (электрических, газовых, гидравлических) в диспетчерском режиме, когда структура сети остается неизменной, но в течение короткого времени меняются нагрузки на систему, была решена Б.Н. Пшеничным и А.М. Вартаняном в 1984 году [9,10]. Такие энергетические системы аналогичной структуры описываются системой алгебраических уравнений, имеющих одинаковый характер вхождения переменных в уравнения, но отличающихся численными значениями различных параметров.

В работе [9] исследованы разреженные системы уравнений большой размерности и предложен подход к решению этих систем, основанный на анализе структуры вхождения переменных в уравнения. Показано, что при использовании метода Гаусса решения систем уравнений (когда некоторая переменная с помощью выбранного уравнения выражается через другие и подставляется в оставшиеся уравнения) характер вхождения переменных во время преобразований зависит только от заданной первоначальной структуры этого вхождения и порядка исключения переменных. Предложены правило преобразования системы уравнений и способ выбора последовательности исключения переменных, которые обеспечивают слабозаполненность информационной матрицы системы в течение всего процесса исключения и заранее информируют об объеме требуемой памяти и количестве вычислений в процессе счета на ЭВМ. В качестве реального примера применения разработанного подхода приведена задача расчета установившихся режимов электрических сетей.

В 1964—1965 годах Б.Н. Пшеничный опубликовал цикл работ по методам решения задач оптимального управления. Наиболее общий результат получен в работе [11], где показано, что, используя принцип максимума Понтрягина, задачу оптимального управления можно свести к решению некоторой краевой задачи.

Особо интересен этот подход при решении задач с фиксированным концом, так как решение такой задачи, например, градиентными методами сводится к решению последовательности задач со свободным концом, что существенно увеличивает трудоемкость решения. Большинство методов решения краевой задачи используют производные от решения соответствующей системы дифференциальных уравнений по начальным значениям. Классическая теорема, дающая условия существования таких производных, требует достаточной гладкости правых частей дифференциальных уравнений по своим переменным. Однако это условие заведомо не выполняется в задачах оптимального управления, так как решения, удовлетворяющие принципу максимума, как правило, принадлежат к классу кусочно-разрывных функций.

Б.Н. Пшеничным совместно с Ю.М. Данилиным была доказана теорема и получены соотношения, позволяющие определять производные от решения системы дифференциальных уравнений по начальным значениям в случае, когда правые части уравнений терпят разрывы на некоторых поверхностях. Это открыло новые возможности решения краевых задач, вытекающих из принципа максимума.

Результаты мирового уровня были получены Б.Н. Пшеничным в области теории необходимых условий экстремума. В статье [2, с.4] отмечается, что когда в начале 70-х годов наметился определенный бум в развитии данной теории и методов оптимизации, представителям киевской школы было отведено одно из лидирующих мест благодаря работам Б.Н. Пшеничного, И.В. Сергиенко, Ю.М. Ермольева, Н.З. Шора и других ученых.

В 1964 г. Борису Николаевичу удалось получить результаты, касающиеся выпуклого программирования в пространстве Банаха и проблем двойственности в экстремальных задачах, что принесло молодому автору мировую известность. Выпуклое программирование является наиболее законченной частью математического программирования. Здесь основополагающими являются результаты Г. Куна и А. Таккера, рассмотревших в 1959 г. линейные неравенства с точки зрения задачи выпуклого программирования.

Б.Н. Пшеничный развил наиболее общий оригинальный подход, охватывающий многие классические результаты и позволяющий получить необходимые и достаточные условия разрешимости задачи выпуклого программирования в дифференциальной форме.

Наряду с выпуклыми функционалами Б.Н. Пшеничный ввёл новый достаточно широкий класс квазидифференцируемых функционалов. Понятие квазидифференцируемой функции позволило описать функцию, локальное поведение которой подобно выпуклой функции. Это функция, чья производная в точке x по любому направлению существует, конечна и является по направлению положительно однородной, выпуклой и замкнутой функцией. Такое определение позволило, с одной стороны, существенно расширить класс изучаемых функций, а с другой, использовать для их изучения технику, подобную той, которая применялась для выпуклых функций. В частности, это сделало возможным переформулировать необходимые условия экстремума в задачах математического программирования для невыпуклых функций. Определение субдифференциала для квазидифференцируемой функции и его описание при различных операциях с функциями имели важное значение и для построения численных методов оптимизации, основанных на субградиентном спуске.

Разработанная методика с успехом была применена Б.Н. Пшеничным для получения необходимых условий экстремума в общих задачах математического программирования, обобщающих обычное правило множителей Лагранжа на широкий класс задач. Здесь его результаты тесно связаны с теорией Милютина—Дубовицкого [12], которые впервые осуществили вложение теории оптимального управления в общую теорию необходимых условий экстремума. Дальнейшее развитие теории необходимых условий экстремума в связи с теорией оптимального управления можно найти в работах Л. Нейштадта и Х. Халкина, определивших в 1966 году общие необходимые условия, применимые при решении широкого класса задач, в том числе и задач оптимизации. Сравнительный анализ и обобщение этих результатов содержатся в монографии Б.Н. Пшеничного [3], переведенной на многие языки мира.

«Задачи на экстремум — не новость для математики, — писал Б.Н. Пшеничный в предисловии к первому изданию этой книги. — Они встречались и решались на протяжении всей истории математики. Однако интенсивное и последовательное их изучение началось сравнительно недавно, когда, с одной стороны, запросы экономики и автоматического управления сделали решение этих задач неотложным делом, а, с другой стороны, появление ЭВМ дало в руки исследователей мощное средство, с помощью которого решение может быть доведено до конечного итога — численного результата.

Сейчас трудно назвать какую-либо область знаний, где в той или иной форме не возникали бы экстремальные задачи... Все науки выдвигают свои экстремальные задачи и ждут ответа на два вопроса: каков качественный характер решения и как его найти? Первый из этих вопросов... побуждает математиков искать наиболее полные необходимые условия экстремума, ибо именно эти условия позволяют предсказать общую структуру решения» [3, с.7—8].

Ценность монографии [3] не исчерпывается нахождением формальных условий экстремума и развитием соответствующего аппарата техники вычислений. «Всякая общая теория ценна лишь постольку, поскольку она позволяет охватить единой точкой зрения достаточно широкий класс задач», — отмечает Б.Н. Пшеничный [3, с.11]. В книге [3] с единых позиций подробно изучены задачи математического программирования с бесконечным числом ограничений, задачи чебышевского приближения, задача оптимального управления с фазовыми ограничениями, принцип максимума для дискретных и непрерывных систем управления, доказаны теоремы о минимаксе в теории игр, даны критерии разрешимости систем выпуклых неравенств и установлена их связь с проблемой моментов.

Что же касается проблемы двойственности, то Б.Н. Пшеничный получил здесь важный результат, утверждающий, что исходной задаче выпуклого программирования можно поставить в соответствие другую задачу выпуклого программирования с более сложной целевой функцией, но с простыми ограничениями, решение которой эквивалентно решению исходной задачи. Из классической теории линейного программирования известно, что двойственная задача подчас оказывается более удобной для решения, чем исходная. Важная особенность двойственной задачи состоит в том, что она конечномерна, даже если исходная задача не была таковой. Именно этот факт широко используется в ряде алгоритмов для решения линейных задач оптимального управления.

Монография [3], вышедшая в 1969 году, стала значительной вехой в научной деятельности Б.Н.Пшеничного и во многом определила его дальнейшие научные интересы. Основу первого издания этой книги составили лекции, которые автор прочел в 1967 году в Киевском государственном университете и во Второй всесоюзной школе по методам оптимизации (г. Шемаха). В книге использован дедуктивный принцип изложения материала: сначала излагаются формальные условия экстремума и общие результаты, а потом показывается, как эти результаты могут быть конкретизированы в частных задачах и даётся техника вычислений. Во втором издании, переработанном и дополненном (1982 г.), учтен «большой путь интенсивного развития теории необходимых условий экстремума за прошедшие 14 лет»: введены единая терминология и обозначения, которые установились к этому времени; добавлено рассмотрение многозначных отображений и их применение к решению параметрических задач выпуклого программирования; рассмотрено применение данной теории к проблеме равновесных цен в модели экономики, описывающей процесс производства и обмена [3, с.5].

Со временем появились монографии Ж.-Л. Лионса, посвященные управлению системами с распределенными параметрами. В отделе, возглавляемом Б.Н. Пшеничным, это вызвало большой интерес, и в течение длительного времени сотрудник отдела В.Н. Горчаков реферировал эти работы на семинаре. Стало ясно, что упомянутые задачи не охватываются разработанной техникой получения необходимых условий экстремума. Для того, чтобы их можно было рассматривать с единой позиции, потребовалось развитие теории необходимых условий экстремума для случая, когда ограничение задано с помощью нелинейного отображения одного топологического пространства в другое. Б.Н. Пшеничным совместно с его учеником Э.И. Ненаховым были построены необходимые условия экстремума в задачах с операторными ограничениями [13].

Разработка численных методов и алгоритмов решения задач нахождения экстремума функций, возникающих в математическом программировании, экономике, теории оптимального управления и в других областях науки и практики, составила предмет монографии [4], написанной Б.Н. Пшеничным совместно с Ю.М. Данилиным. При отборе алгоритмов, включённых в данную книгу, авторы исходили из критерия точности результата и быстроты сходимости итерационного процесса: преимущество отдается алгоритмам с высокой скоростью сходимости, практически удобным для реализации на ЭВМ. Для упрощения вычислений и понимания изложенных результатов рассматривается случай конечномерного пространства векторов и используются главным образом алгоритмы, требующие вычисления только значения функции или ее первых производных. Основная проблема, поставленная и успешно разрешенная авторами книги, — эффективное нахождение минимума функции как без ограничений на независимые переменные, так и с учетом различных ограничений.

В дальнейшем теория необходимых условий экстремума прошла большой путь интенсивного развития при активном участии Б.Н. Пшеничного. В первую очередь следует выделить углубленное исследование структуры выпуклых функций и дальнейшее изучение различных классов недифференцируемых функций. Это изучение позволило Б.Н. Пшеничному ввести одно из важнейших понятий для формулировки необходимых условий экстремума негладких и невыпуклых функций — понятие верхней выпуклой аппроксимации функции.

Очевидно, что для того, чтобы можно было выписать необходимые условия экстремума, нужно, чтобы функции, фигурирующие в задаче, обладали некоторыми специальными свойствами. В частности, в окрестности точки минимума они должны допускать аппроксимацию некоторыми более простыми и сравнительно легко вычислимыми функциями. Так, например, гладкие функции допускают линейную аппроксимацию, выпуклые функции достаточно хорошо аппроксимируются выпуклыми положительно однородными функциями — производными по направлению. Однако негладкие и невыпуклые функции уже невозможно приблизить в окрестности некоторой точки выпуклыми положительно однородными функциями. Для таких функций вводится понятие верхней выпуклой аппроксимации, которая определяется неоднозначно: для получения содержательных условий экстремума, как правило, необходимо знать достаточно широкое семейство верхних выпуклых аппроксимаций. По сути главная верхняя выпуклая аппроксимация характеризует то, насколько хорошо поведение исходной функции в окрестности точки может быть описано некоторой положительно однородной выпуклой функцией. Поэтому для формулировки содержательных условий экстремума невыпуклых и нелипшицевых функций используется целое семейство главных верхних выпуклых аппроксимаций.

Следует отметить, что понятие субдифференциала для упомянутых ранее квазидифференцируемых функций и функций, допускающих верхнюю выпуклую аппроксимацию, впервые было введено Б.Н. Пшеничным, аналогичное понятие для липшицевых функций — Ф.Н. Кларком в работе «Оптимизация и негладкий анализ».

Общие необходимые условия экстремума позволили Б.Н. Пшеничному сформулировать необходимые условия экстремума для негладких и невыпуклых функций в задачах условной оптимизации при ограничениях типа равенств и неравенств. В дальнейшем созданная Б.Н. Пшеничным теория была развита его учениками для исследования негладких задач оптимизации (Р.А. Хачатрян), задач со связанными ограничениями и для получения теорем о неявных функциях для многозначных отображений (В.С. Кирилюк и др.).

Одним из любимых направлений в научной работе Б.Н. Пшеничного была теория многозначных отображений и их различные приложения. Здесь в полной мере засверкал его талант тонкого аналитика. Многозначные отображения позволяют взглянуть с единой точки зрения на многие экстремальные задачи, углубить понимание процессов нахождения экстремума и зачастую упростить доказательства. Следует отметить, что различные аналитические свойства многозначных отображений и их связь с теорией оптимизации рассмотрены А.Д. Иоффе, В.М. Тихомировым, В.И. Аркиным и В.Л. Левиным, Ж.-П. Обеном, И. Экландом, В.Ф. Демьяновым, Л.В. Васильевым, В.Л.Макаровым, А.М.Рубиновым, Б.Ш.Мордуховичем.

В монографии [5] Б.Н.Пшеничный вводит важное понятие локально сопряженного отображения, близкого в идейном смысле к понятию производной многозначного отображения. Это понятие оказалось плодотворным, так как оно обладает рядом удобных свойств и позволяет, в частности, сформулировать необходимые условия экстремума в задачах оптимизации с ограничениями, задаваемыми многозначными отображениями. Введенные понятия позволили Б.Н. Пшеничному сформулировать теорему двойственности для выпуклых многозначных отображений, из которой следуют многие факты выпуклого анализа и теории экстремальных задач, в частности, теорема о минимаксе и теорема Фенхеля—Моро о равенстве выпуклой замкнутой собственной функции своей дважды сопряженной.

Книга [5] возникла в результате систематизации материала лекций, которые автор читал в течение восьми лет на факультете кибернетики и на механико-математическом факультете Киевского университета им. Т.Г. Шевченко. Первые четыре главы книги составляют самостоятельное целое и посвящены общей теории выпуклого программирования, при изложении которой сделан упор на теорию многозначных отображений. «Это позволило существенно сократить и унифицировать доказательства и показать, что многие известные теоремы есть в сущности различные формулировки одного и того же факта выпуклого анализа», — отмечает Б.Н. Пшеничный [5, с.5].

Пятая глава является дальнейшим развитием теории необходимых условий экстремума и содержит ряд результатов, полученных разными авторами в 1970-е годы, то есть уже после выхода в свет монографии [3]. В качестве объекта применения разработанной техники вычислений в шестой главе рассматривается задача оптимального управления — традиционный объект исследования для теории экстремума. Фактически это широкий класс задач, неизбежно возникающих при разработке математических моделей экономических и производственных процессов. Нетрадиционной является постановка задачи оптимального управления в книге [5]: в виде экстремальной задачи для дифференциальных включений. Это позволило рассмотреть негладкие задачи оптимального управления и одновременно проиллюстрировать, как работает понятие локально сопряженного отображения в приложении к многозначному отображению.

Результаты, полученные Б.Н. Пшеничным в [5], были развиты впоследствии его учениками Э. Махмудовым, А.П. Яковлевой, В.Н. Гуровым, С. Очиловым, М. Колжановым в различных направлениях.

Одним из важных и актуальных направлений научных исследований Б.Н. Пшеничного были задачи математической экономики. Вместе с В.М. Глушковым им была построена модель экономической динамики, учитывающая смену технологий, технологический прогресс и появление с течением времени новых технологий [14]. В модели явно учитываются наличие двух сфер — производства и потребления, а также ограниченность трудовых ресурсов. В 1981 году Б.Н. Пшеничным впервые была предложена статическая модель производства—обмена с доплатой, в которой нет деления на производителей и потребителей, а расходы на приобретение ресурсов включаются в общий расход, который несет каждый участник. Им была изучена связь оптимума по Парето с равновесным распределением ресурсов в этой модели: найдется по крайней мере один участник экономики, для которого бюджетное ограничение выполняется как строгое неравенство. Это есть принципиальное отличие от классических моделей, в которых каждый участник экономики использует весь свой начальный бюджет и всякое оптимальное по Парето распределение является оптимальным.

Были изучены динамические модели производства—обмена с доплатой на конечном интервале времени, допускающие и внутренний рынок, а также без кредита, бюджетных ограничений и без внутреннего рынка ресурсов. Для модели производства—обмена с доплатой в случае линейных функций предпочтения установлена единственность равновесных цен, монотонность функции избыточного спроса, обеспечивающая возможность численного отыскания равновесных цен.

Одной из самых ярких страниц в научной деятельности Б.Н. Пшеничного являются его работы в области дифференциальных игр. После выхода в США монографии Р. Айзекса (первой в мире по теории дифференциальных игр) в СССР наметился подъем в данном направлении исследований. Особенно активными в этом процессе были три научные школы: московская (Л.С. Понтрягин и его ученики), свердловская (Н.Н. Красовский и ученики) и киевская (Б.Н. Пшеничный и ученики). Аналогичные исследования велись и в Ленинграде (Л.А. Петросян и его ученики, Н.Н. Петров). Достаточно заметить, что в 70-е годы примерно треть публикаций в центральных журналах по прикладной математике составляли работы по теории дифференциальных игр.

Суть задачи, возникающей в теории дифференциальных игр, изложена во введении к книге Б.Н. Пшеничного и В.В. Остапенко [7, с.6—7]: «Пусть на плоскости движутся два объекта, которые могут управлять в каждый момент времени своими скоростями. Эти скорости ограничены по величине, причем первый объект может развивать бóльшую скорость. Спрашивается, как должен двигаться первый объект, чтобы догнать второй?» Эта задача хорошо известна и решается достаточно просто при условии, что догоняющий знает в каждый момент времени как свои координаты, так и координаты противника. Отказ от предположения об информированности догоняющего резко усложняет задачу. В этом случае решение задачи поимки противника и время преследования будут зависеть от того, как ведет себя убегающий. Оптимальность решения «будет оцениваться тем, обеспечивает ли оно седловую точку. А именно, управление оптимально, если оно обеспечивает поимку до некоторого момента времени при любом поведении противника, но у последнего есть управление, которое обеспечивает ему избежание поимки до этого момента времени». Задача убегания или уклонения от встречи состоит в выяснении вопроса о том, при каких условиях у второго игрока имеется такая стратегия, которая позволяет ему не дать совершиться поимке при любых начальных позициях игроков.

Задачи, которые можно отнести к дифференциальным играм, возникали и раньше, но скорее как развлекательные упражнения, чем предмет некоторой математической теории. Самостоятельной научной дисциплиной теория дифференциальных игр стала благодаря работам Н.Н. Красовского и Л.С. Понтрягина, а также их учеников и последователей, содержащим прямые методы анализа дифференциальных игр. Первые работы Б.Н. Пшеничного в данной области были связаны с правилом экстремального прицеливания Н.Н. Красовского, сформулированным применительно к игровым задачам о встрече движений [15], и максиминным временем, введенным Д.Л. Келенджеридзе [16]. Один из главных результатов Б.Н. Пшеничного [17] касается достаточных условий окончания игры за время первого поглощения и соответствует регулярному случаю по Н.Н. Красовскому. Сформулированная Б.Н. Пшеничным теорема о времени, достаточном для окончания игры [2, с.14—15], обосновала, в частности, позиционный закон преследования по погонной кривой или кривой Эйлера.

Теорема о достаточных условиях нашла свое развитие и в других задачах, рассмотренных учениками Б.Н. Пшеничного. Так, Ю.Н. Онопчук [18] использовал ее в случае интегральных ограничений на управления, Г.Ц. Дзюбенко [19] — в ситуации с запаздыванием информации, А.А. Чикрий [20] и И.С. Раппопорт — в задачах группового позиционного управления, А.Е.Перекатов — в задачах поочередного преследования. А.А. Чикрий получил условия полной конфликтной управляемости, а в работах К.Ю. Волянского исследованы интегральные и интегро-дифференциальные игры.

В работе [17] Б.Н. Пшеничный определил условия окончания игры за максиминное время. Этот подход, по существу, отражает принцип динамического программирования Беллмана. Для преодоления трудностей в игровых динамических задачах, связанных с невозможностью определения позиционных стратегий, часто используют приём, состоящий в дискриминации одного из игроков. Одну из попятных процедур (соответствующую случаю дискриминации убегающего) впервые применил Л.С. Понтрягин в линейном случае при построении альтернированного интеграла — верхнего интеграла Понтрягина. Нижний интеграл Понтрягина впоследствии был построен М.С. Никольским и А. Азамовым. Для дискретных систем попятная процедура построения верхнего и нижнего интегралов в линейной минорантной и мажорантной игре использована А.А.Чикрием.

Б.Н.Пшеничный обобщил метод альтернированного интеграла на нелинейный случай при нефиксированном времени окончания игры. Он ввёл так называемые ε-стратегии [21], позволяющие упростить построение операторов, вскрывающих структуру игры. Совместно с М.И. Сагайдак [22] он изучил линейные игры с фиксированным временем, где полугрупповое свойство обеспечивает условие выпуклости разности некоторых двух опорных функций множеств. Как показал А.А. Чикрий [23], оно эквивалентно соответствующему условию полного выметания для множеств в терминологии П.Б. Гусятникова, М.С. Никольского. Далее операторная конструкция развивалась В.В. Остапенко в направлении получения оценок операторов, аналитического описания множеств при условии *H*-выпуклости, конструктивного описания стратегий игроков. Были получены различные обобщения на игры в банаховом пространстве (Е.В. Остапенко, И.В. Грабовой), исследованы дифференциально-разностные системы (В.В. Остапенко, О.П. Шелепало), импульсные системы (В.В. Остапенко). Операторные конструкции исследовались также П.Б. Гусятниковым и Е.С. Половинкиным, в случае фазовых ограничений — Б.Н. Пшеничным и Г.Ц. Дзюбенко [24].

В 1969 году в «Докладах АН СССР» появилась первая работа Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко, посвященная решению линейной глобальной задачи убегания — задачи об убегании из любых начальных состояний на полубесконечном интервале времени. Это вызвало большой интерес Б.Н. Пшеничного. Его ученикам пришлось многократно реферировать на семинарах всю серию статей Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко. В результате в 1974 году появилась совместная работа Б.Н. Пшеничного и А.А. Чикрия [25], в которой был разработан метод убегания по направлению и получена формула для представления проекции решения нелинейной системы в виде аналога формулы Тейлора, положившая, по существу, начало развитию нелинейной теории убегания. Это представление проекции траектории системы в определенном смысле заменяет формулу Коши для линейных систем и является ключевым при решении задачи убегания.

В работе [25] был сформулирован общий результат, касающийся достаточных условий убегания, через определение трех условий (A, B, C) и доказательство теоремы о возможности убегания в классе ε-стратегий либо ε-контрстратегий [2, с.17]. Б.Н. Пшеничный доказал теорему убегания в позиционных стратегиях при условиях А и С, а также в предположении линейности по z правой части, использовав при этом аналог маневра уклонения Л.С. Понтрягина. Впоследствии этот случай без предположения о линейности был изучен П.Б. Гусятниковым и В.В. Остапенко [26]. В случае условий А и В теорема доказана В. Жимовски. При более жестких предположенях в обоих случаях теорема доказана в работах А.А. Чикрия [27]. Им же предложен метод переменных направлений, ослабляющий условия данной теоремы, и исследованы условия высших порядков, а также условия убегания при наличии фазовых ограничений. Частные случаи в задаче убегания (при условиях В и С) рассмотрены П.Б. Гусятниковым, В.В. Остапенко, В. Жимовски.

В дальнейшем Б.Н. Пшеничный и А.А. Чикрий [28] разработали метод инвариантных подпространств в задаче убегания. При специальном условии инвариантности для разрешимости задачи убегания оказалось достаточно преимущества убегающего только на некотором одномерном подпространстве либо равенства по ресурсам в проекции на конечное число направлений, образующих набор Каратеодори. Основываясь на исследованиях В. Жимовски, Е.В. Губарев и А.А. Чикрий разработали рекурсивный метод.

Оригинальные подходы к решению задачи убегания были предложены М.С. Никольским, Л.П. Югаем, А. Азамовым.

В обобщающей монографии [7] рассмотрены эффективные методы решения задач сближения-уклонения в дифференциальных играх. Показано, что в случае линейных дифференциальных игр полное решение получается только для задач с простым движением, когда игроки управляют своими скоростями. Для нелинейных игр построена общая конструкция решения на основе специально определенных стратегий противников и доказано, что в этих стратегиях игра на оптимальное время преследования всегда имеет седловую точку. Разработан подход к анализу структуры дифференциальной игры, основанный на построении полугруппы операторов, отображающих множество в множество. Рассмотрен вопрос конструктивного описания данной полугруппы и построения на ее основе стратегий игроков.

В книге [7] достаточно подробно исследованы конкретные классы задач дифференциальных игр, для которых можно эффективно получить решение и произвести вычисления в явном виде. Предложены приближённые методы решения дифференциальных игр с фиксированным и нефиксированным временем окончания, игр с фазовыми ограничениями, игр с терминальным функционалом платы и др. Изучен вопрос о возможности замены игры с непрерывным временем некоторым её дискретным аналогом и о сходимости решений дискретного аналога к решению исходной игры. В задаче убегания или уклонения от встречи рассмотрены достаточные условия убегания, обобщенные маневры «уклонения» и «разгона», построение управления убегания в неавтономной задаче, в задаче с запаздыванием и в задаче убегания без дискриминации противника. Вместе с тем отмечается, что «построение решения достаточно общих дифференциальных игр остается до настоящего времени нерешенной проблемой» [7, с.4].

В 1974 году на игровой конференции в Одессе независимо П.Б. Гусятниковым и А.А. Чикрием была поставлена и решена задача об убегании от группы преследователей [27]. Основываясь на этом решении, Б.Н. Пшеничный уже через несколько дней предложил блестящее решение задачи группового преследования для простых движений с равными максимальными скоростями. Оно состоит в следующем: если начальное положение убегающего принадлежит внутренности выпуклой оболочки, натянутой на начальные положения преследователей, то возможна поимка. В противном случае возможно убегание. Эта ситуация «окружения» дает ответ на вопрос о разрешимости задачи группового преследования для гораздо более общих динамических управляемых систем, чем простое движение. По существу, в этом простом по форме результате неявно содержится обоснование классического правила параллельного преследования, хорошо известного инженерам—проектировщикам ракетной и космической техники.

Впоследствии Б.Н. Пшеничный, А.А. Чикрий, И.С. Раппопорт [29] развили общий метод решения линейных задач группового преследования, в том числе с фазовыми ограничениями. Важные результаты в задаче группового преследования ранее получил Н.Л. Григоренко [30], работая с помощью аналогичной техники, а также Н.Н. Петров, исследовавший задачи с фазовыми ограничениями.

С использованием исходных идей Б.Н. Пшеничного А.А. Чикрий разработал метод разрешающих функций [31, 32] в задаче сближения и показал, что в его схеме существенную роль играют обратные функционалы Минковского. Из доказанной им общей теоремы о траектории квазилинейного конфликтно управляемого процесса вытекает множество интересных следствий и обобщений. Так, в частности, она дает полное обоснование классического правила параллельного преследования. Схема метода тесно связана с первым прямым методом Л.С. Понтрягина, который был перенесен на системы с переменной структурой (Н.Л. Григоренко, И.И. Матичин), нестационарные игры (М.В. Питцык), дифференциально-разностные игры (Г.Ц. Чикрий, Л.В. Барановская), нелинейные системы (Н.Л. Григоренко, Н.Б. Шишкина), интегральные и интегро-дифференциальные игры (С.Д. Эйдельман, А.А.Чикрий, А.Г. Руренко), игры с интегральными ограничениями (В.Н. Безмагорычный), игровые задачи с терминальным функционалом (И.С. Раппопорт), игры с интегральным блоком управления (А.Г. Руренко). Введено обобщающее интегральное условие Понтрягина и исследованы колебательные процессы (Ю.В. Пилипенко), получены условия полной конфликтной управляемости (А.А. Белоусов), изучены сопряженные дифференциальные игры (О.М. Патланжоглу, А.А. Чикрий). А.В. Хомин (в настоящее время проживающий и работающий в Англии) изучил структуру экстремальных селекторов, а С.Ф. Калашникова (в настоящее время проживающая в Канаде) распространила метод на задачи поочередного преследования, представляющие собой усложненную динамическую задачу коммивояжерного типа.

Идеи метода использованы при изучении проблемы взаимодействия группировок, названной однажды Е.Ф. Мищенко, в присутствии Л.С. Понтрягина, вершиной теории дифференциальных игр. Так, в работе [27] была высказана гипотеза о разрешимости задачи убегания в случае $2n$ преследователей и 2 убегающих с простыми движениями и равными максимальными скоростями. При $n = 2$ в 1987 году эту гипотезу подтвердили А.А. Чикрий и П.В. Прокопович, а недавно в случае $n = 3$ задачу решил студент КПИ А.П. Игнатенко. Для $n > 3$ проблема остается открытой.

В последнее время на основе метода разрешающих функций активно изучаются игровые задачи для систем с дробными по Риману—Лиувиллю и Джрбашяну—Нерсесяну производными произвольного порядка (С.Д. Эйдельман, А.А. Чикрий [33, 34]), где существенно используются функции типа Миттаг—Леффлера и их асимптотические представления.

Одним из важнейших разделов теории конфликтно управляемых процессов являются задачи поиска движущихся объектов. Здесь основополагающими считаются работы Б. Купмана, Л. Стоуна, Ш. Гала, О. Хеллмана, В.И. Аркина и др. Суть этих задач состоит в том, что вместо точного состояния объекта игрокам становится известной только плотность распределения положения игроков. Ее эволюция с течением времени подчиняется уравнению Фоккера—Планка—Колмогорова.

Б.Н. Пшеничный и А.А. Чикрий вместе с группой сотрудников (Н.Н. Редковский, Е.В. Клименко, А.Е. Перекатов и др.) разработали подход, связанный с дискретизацией процесса поиска как по времени, так и по состоянию. Предложенная ими клеточная модель поиска позволяет достаточно эффективно решать задачи поиска с дискретным временем и конечным числом позиций. Вместо уравнений движения игроков на конечном множестве состояний задается закон преобразования функции распределения состояния, причем переходная стохастическая матрица зависит от управлений игроков. Такой процесс является билинейным и марковским. Для оптимизации вероятности обнаружения используется дискретный принцип максимума Понтрягина или принцип динамического программирования Беллмана. Предлагается схема, позволяющая свести вычисление вероятности обнаружения за конечное время к отысканию минимакса или максимина известной функции [35, 36].

Помимо задач поиска отдельных объектов на рубеже, в заданном районе и по вызову рассмотрен поиск группы объектов с обменом и без обмена информацией в группе, скрытный поиск, учтена зависимость радиуса обнаружения от скоростей, исследована проблема поиска при взаимодействии группировок. Задача поиска в заданном районе сведена к задаче конфликтного управления конечным состоянием билинейного дискретного процесса. Обзор по этим вопросам представлен в [37].

Клеточная модель поиска нашла свое развитие в работах А.Е. Перекатова, Е.В. Клименко, Н.Н. Редковского, И.Б. Шишкиной. Для непрерывной задачи поиска на основе необходимых условий экстремума Б.Н. Пшеничного получены необходимые условия оптимальности вероятности обнаружения за конечное время в работе Г.Ц. Чикрий [38]. Различные аспекты непрерывного поиска изучались А.Э. Грицевским.

В начале 1978 года у Б.Н. Пшеничного возник интерес к задачам оценивания параметров динамических систем. Катализатором этого интереса послужила опубликованная в 1977 году книга А.Б. Куржанского «Управление и наблюдение в условиях неопределенности». Б.Н. Пшеничный предложил своему ученику В.Г. Покотило (тогда студенту) изменить тематику дипломной работы и вместо проблем теории дифференциальных игр заняться минимаксным оцениванием. Последующие работы Б.Н. Пшеничного и В.Г. Покотило, посвященные изучению свойств минимаксных (гарантированных) оценок, позволили открыть новое научное направление в деятельности отдела и получить ряд оригинальных результатов, которые заняли достойное место в ряду многочисленных публикаций, посвященных гарантированному оцениванию. Залогом успеха послужило свойственное Б.Н. Пшеничному стремление и умение упростить сложную задачу, проверить сложные математические построения на простых примерах, сформулировать привлекательную и продуктивную идею.

Идея Б.Н. Пшеничного состояла в том, что минимаксные оценки, будучи по своей природе грубыми со стохастической точки зрения (вообще говоря, минимаксная оценка не использует знаний о распределении шумов и строится в предположении, что шумами распоряжается «противник»), тем не менее имеют ряд привлекательных с точки зрения математической статистики свойств и, в частности, могут быть асимптотически точными (состоятельными). Эта идея оказалась правильной, и свойства состоятельности минимаксных оценок были впоследствии обоснованы для достаточно широкого класса линейных и нелинейных систем при следующих достаточно естественных условиях: 1) «непреднамеренность» возмущений; 2) отсутствие систематических ошибок в описании системы и возможных возмущений; 3) рекуррентная наблюдаемость, т.е. возможность восстанавливать неизвестные параметры по идеальному сигналу вне зависимости от момента начала измерений.

В конце 80-х — начале 90-х годов в работе [39] были поставлены и решены задачи, связанные с управлением наблюдениями, т.е. выбором оптимальных измерителей из заданного множества возможных «измерителей» с целью минимизировать ошибку минимаксной оценки. Такие задачи, формально говоря, можно отнести к теории планирования эксперимента, однако результаты, полученные Б.Н. Пшеничным, В.Г. Покотило и их учениками, основывались на применении аппарата многозначного анализа и привели к оригинальным результатам, которые характеризуют так называемые точные планы эксперимента.

В последние годы жизни Б.Н. Пшеничный активно работал совместно с академиком В.М. Кунцевичем [40, 41]. Цикл их работ содержит важные результаты, касающиеся решения игровых задач сближения в условиях неполной информации о состоянии, а также структуры инвариантных и стационарных множеств нелинейных дискретных систем. Сформулированные в этих работах теоремы позволяют получить ряд нетривиальных результатов о минимальных инвариантных множествах для систем с ограниченной нелинейностью, систем с мультипликативными и аддитивными возмущениями, систем с разрывными нелинейностями, а именно, релейных систем управления.

Проблема управления при наличии неполной информации о координатах объекта и о положении цели представляет большие трудности как с точки зрения ее практического решения, так и для разработки соответствующего математического аппарата. Это связано с тем, что выбор управления в данный момент зависит не только от текущих фазовых координат, но и от всей информации, полученной от измерительных приборов, начиная с момента начала движения и до текущего момента времени. Один из таких примеров, а именно решение задач сближения объектов в условиях неопределенности, рассмотрен в работе В.М. Кунцевича и Б.Н. Пшеничного [42].

Одним из важнейших направлений научной деятельности Б.Н. Пшеничного были численные методы оптимизации как естественное продолжение исследований, связанных с необходимыми условиями экстремума. Кроме самостоятельных исследований, Б.Н. Пшеничный длительное время плодотворно работал вместе с одним из ближайших своих учеников профессором Ю.М. Данилиным.

Основные результаты Б.Н. Пшеничного и Ю.М. Данилина суммированы в их монографии [4], переведенной на многие языки и являющейся одной из лучших книг в области численных методов оптимизации.

В 1960—1970 годах резко усилился интерес к разработке алгоритмов, более эффективных по сравнению с существовавшими на то время (в основном это были градиентные методы и метод Ньютона). В первую очередь проблема коснулась задач гладкой безусловной оптимизации. Выдвигались следующие требования: методы по трудоемкости итерации должны приближаться к градиентным, трудоемкость которых сравнительно невелика, а по скорости сходимости — к методу Ньютона. Наиболее полно предъявляемым требованиям удовлетворяли методы, получившие название квазиньютоновских. При использовании этих методов высокая скорость сходимости и снижение трудоемкости итерации достигались за счет отказа от непосредственного вычисления вторых производных (что во многих экстремальных задачах является наиболее трудоемким).

В работе Б.Н. Пшеничного и Ю.М. Данилина [4] разработаны алгоритмы, удовлетворяющие отмеченным выше требованиям, для минимизации гладких сильно выпуклых функций. Эти алгоритмы обладают в сравнительном плане определенными преимуществами: они не требуют точного вычисления минимума функции в направлении движения, что значительно сокращает вычисления; их скорость сходимости выше.

Параллельно с разработкой методов безусловной оптимизации Б.Н. Пшеничным разрабатывались и методы оптимизации при наличии ограничений. Один из наиболее общих результатов Б.Н. Пшеничного в этой области, получивший мировую известность, — метод линеаризации, универсальный метод решения задач математического программирования, применимый для решения задач безусловной оптимизации, линейного и нелинейного программирования, систем равенств и неравенств, минимаксных задач и ряда других проблем. Впервые метод линеаризации был опубликован Б.Н. Пшеничным в 1970 г., и затем он развивал и совершенствовал его вместе со своими сотрудниками на протяжении всей своей научной деятельности [6].

Разработанный Б.Н. Пшеничным метод линеаризации является результатом поиска такого арсенала вычислительных средств, который позволяет эффективно решать достаточно общие реальные задачи, содержащие сложные нелинейности, с получением численного результата в разумное для конкретной задачи время. Этот метод тесно связан с методом Ньютона решения систем уравнений, с методом штрафных функций и с методами недифференцируемой оптимизации. Успешное применение метода линеаризации невозможно без решения задач квадратичного программирования, что связывает его с методами сопряжённых градиентов и переменной метрики. Необходимость решения задач большого объема требует привлечения аппарата линейного программирования, а именно приёмов работы с разреженными матрицами, мультипликативного представления обратных матриц и др. Наконец, исследование области и скорости сходимости данного метода невозможно без привлечения теории необходимых условий экстремума, функций Лагранжа и представлений о двойственной задаче. Весь этот широкий круг понятий нашел отражение в монографии [6], содержащей изложение и глубокий анализ метода линеаризации, выяснение его свойств, возможностей и преимуществ, которые он может дать на практике.

Изложение в книге [6] доведено до стадии описания конкретных алгоритмов для решения конкретных задач. Б.Н. Пшеничный доказал сходимость к стационарным точкам различных вариантов метода линеаризации и изучил вычислительные аспекты реализации данного метода. Серьезное внимание Б.Н. Пшеничный уделял вопросам ускорения сходимости метода линеаризации, в частности разработке таких вариантов метода, которые обладают сверхлинейной скоростью сходимости. Фундаментальным результатом является доказанная Б.Н. Пшеничным теорема о том, что при выполнении необходимых условий экстремума определенного вида и достаточных условий локального минимума метод линеаризации локально сходится со скоростью геометрической прогрессии. Правда, практическая реализация требований этой теоремы весьма затруднительна. В дальнейшем этот результат был усилен в работе Б.Н. Пшеничного, В.М. Панина и Л.А. Соболенко [43]. Для несколько отличного варианта метода (в котором регулировка шага подобна тому, который рассматривается в методах безусловной минимизации) аналогичный результат получен Ю.М. Данилиным. В работах Ю.М. Данилина идеи линеаризации используются в сочетании с модифицированными функциями Лагранжа, что дает возможность разработать алгоритмы, свойства которых адекватны соответствующим методам безусловной оптимизации.

Метод линеаризации продемонстрировал свою высокую эффективность при решении широких классов научных и прикладных задач математического программирования. На его основе разработан пакет программ (Л.А. Соболенко), который, в частности, используется в учебных курсах Киевского политехнического института.

Одно из возможных применений метода линеаризации к решению задач большой размерности было изучено Б.Н. Пшеничным совместно с Е.Е. Кирик [44]. Специфика решения таких задач состоит в том, что при увеличении объёма задачи нередко возникают затруднения, связанные с ограниченностью времени и конечностью объема оперативной памяти ЭВМ. Поэтому для решения заведомо больших задач, а также задач специальной структуры целесообразным оказывается применение алгоритмов, основанных на идее декомпозиции, то есть расчленения исходной задачи на подзадачи меньшей размерности. Разработанные ранее методы декомпозиции для задач нелинейного программирования предъявляют определенные требования к структуре задачи, в частности существенными условиями оказываются выпуклость и аддитивная сепарабельность входящих в задачу функций.

Применение метода линеаризации позволяет решать такие задачи, не делая каких-либо допущений о выпуклости встречающихся функций. При вычислительной реализации этот метод сводится к решению на каждом шаге вспомогательной задачи квадратичного программирования, для которой имеется конечношаговый декомпозиционный алгоритм. В работе [44] рассмотрена такая вспомогательная задача квадратичного программирования с блочно-диагональной структурой ограничений; предложен декомпозиционный алгоритм, основанный на идее методов расчленения; дан критерий оптимальности решения и доказана конечная сходимость построенного итерационного процесса.

В последние годы жизни Б.Н. Пшеничный особое внимание уделял распространению идей метода линеаризации на задачи, которые не укладываются в первоначальную схему этого метода. Одной из таких задач является общая задача обратно-выпуклого программирования, впервые сформулированная и изученная в работе [45]. Проведенные исследования открыли путь новому подходу к решению многих задач о размещении объектов в пространстве R^n, которые до того рассматривались и решались только аналитическими методами классической математики. Формулировка проблемы в виде общей оптимизационной задачи и использование численного метода для её решения позволили снять ряд ограничений на формы и размеры объектов, которые требуются в традиционных методах решения этих задач. Численно были решены трудные и практически важные задачи кодирования, оптимальной упаковки шаров из пространства R в параллелепипед с минимальной суммой сторон и в шар минимального радиуса, оптимальной укладки n-мерных параллелепипедов в контейнер. При этом, кроме задач в классической постановке (рассматриваемые шары одинакового радиуса, параллелепипеды — одного размера и ориентации), впервые Б.Н. Пшеничным и Л.А. Соболенко были рассмотрены и численно решены задачи упаковки шаров с различными радиусами и укладки параллелепипедов различной ориентации и неодинаковых размеров [45].

Б.Н. Пшеничным были начаты исследования по численному решению конечномерных вариационных неравенств — обширного класса задач, возникающих в моделях экономического равновесия и включающих в себя, как частный случай, задачи оптимизации. Предложенный им метод решения вариационных неравенств с сильно монотонным оператором отличается от современных алгоритмов проекционного типа теми же преимуществами, какими метод линеаризации отличается от методов проектирования в нелинейной оптимизации. Метод стимулировал разработку ряда алгоритмов решения вариационных неравенств на основе так называемого оптимизационного подхода. В этом направлении активно работает В.М. Панин.

Представители школы Б.Н. Пшеничного принимали участие в решении целого ряда прикладных задач, требующих разработки математических моделей реальных физических и биологических процессов. В качестве примера можно привести проект использования дельфинов для охраны морских объектов, который активно разрабатывался в СССР в 70-е годы. Б.Н. Пшеничный вместе с группой своего ученика профессора Ю.Н. Онопчука откликнулся на предложение ученых Института физиологии им. А.А. Богомольца принять участие в создании математических моделей основных функциональных систем (дыхания и кровообращения) дельфина с целью эффективного их использования для исследования возможностей организма при работе на глубине. В результате была разработана математическая модель процесса массопереноса газов в живом организме на дыхательном цикле, установлена роль гипоксии при физической и операторской деятельности человека, разработаны оптимальные по быстродействию алгоритмы безопасной декомпрессии акванавтов и водолазов при глубоководных погружениях, исследованы тепловые режимы организма и их регуляция в экстремальных условиях. Это новое направление и сейчас развивают ученики Б.Н. Пшеничного.

Вклад Б.Н. Пшеничного в становление и развитие каждой из ветвей созданной им научной школы подытожил, в частности, директор Института кибернетики им. В.М. Глушкова академик В.С. Михалевич, информируя в 1992 году ученый совет института о научной, научно-организационной и педагогической деятельности Б.Н. Пшеничного [1, л.98—99]. По словам В.С. Михалевича, «Пшеничный Б.Н. — известный специалист в области теории оптимального управления, численных методов оптимизации, в области теории необходимых условий экстремума, в теории дифференциальных игр». Эти же четыре основные области исследований — своих собственных и сотрудников своего отдела — выделил и сам Борис Николаевич в отчетах о работе отдела вычислительных методов за 1971—1981 гг. [1, л.68—75, 81—82]. Результаты, полученные в этих областях, Б.Н. Пшеничный кратко охарактеризовал следующим образом:

«1. Необходимые условия экстремума.

Теория необходимых условий экстремума является основой для построения вычислительных алгоритмов. В этой области в отделе были разработаны общие необходимые условия экстремума для различных задач оптимизации, включающих в себя задачи оптимального управления, чебышевские приближения, классические задачи математического программирования и др. При этом была разработана техника исследования различных классов функций, в частности выпуклых, с точки зрения их локальных дифференциальных свойств, что сделало полученные необходимые условия эффективно применяемыми в конкретных задачах. Одним из таких новых применений является получение необходимых условий экстремума в задачах управления, в которых объект описывается уравнениями в частных производных. Получены также необходимые условия в некоторых задачах математической экономики, описывающихся многозначными отображениями, для которых найден новый подход, основанный на понятии локального сопряженного преобразования.

2. Дифференциальные игры.

Сравнительно новым разделом теории оптимального управления является теория дифференциальных игр. На основе введенного понятия ε-стратегий подробно исследована структура дифференциальной игры, дана классификация различных областей пространства с точки зрения того или иного исхода игры. Доказана общая теорема о существовании цены игры. Применительно к специальному классу игр — линейным играм — даны эффективно проверяемые достаточные условия окончания игры, позволившие дать решение целого ряда модельных примеров. В частности, полностью решена задача для игр с простым движением и выпуклым терминальным множеством.

Полученные в теории дифференциальных игр с непрерывным временем результаты перенесены на случай игр с дискретным временем.

В самое последнее время проявляется значительный интерес к специальной задаче теории дифференциальных игр — задаче уклонения от встречи. В этом направлении получены новые результаты, основанные на двух различных идеях, которые позволили в целом дать достаточные условия уклонения от встречи для широких классов нелинейных объектов.

3. Вычислительные методы минимизации.

В области вычислительных методов минимизации работы отдела сконцентрированы на создании эффективных алгоритмов для решения задач среднего объема с достаточно гладкими функциями и ограничениями. Для задач минимизации без ограничений разработаны общие подходы к доказательству и оценке сходимости различных классов алгоритмов. Это позволило дать оценку скорости сходимости в различных типах методов сопряженных направлений. Созданы новые методы — методы двойственных направлений, экономичные по своей структуре и имеющие скорость сходимости более высокую, чем известные методы с таким же объемом вычислений на итерации.

Для задач с ограничениями разработан метод линеаризации, обладающий сверхлинейной сходимостью, а в некоторых случаях и квадратичной. Метод использован как основа для разработки алгоритмов решения задач оптимального управления.

4. Моделирование логико-динамически объектов.

При решении реальных задач системного оптимального проектирования, как правило, не удается ограничиться простым применением стандартных процедур оптимизации. Поэтому возникает необходимость в создании моделирующих систем, позволяющих решать задачи проектирования путем взаимодействия человека с машиной. Цель такой моделирующей системы — облегчить это взаимодействие, сделать его максимально удобным для человека или для группы проектировщиков.

В отделе разработана система моделирования, позволяющая автоматизировать процесс системного проектирования и исследования объектов, описывающихся обыкновенными дифференциальными уравнениями, логическими уравнениями и нелинейными системами алгебраических уравнений. Система эффективно эксплуатировалась для проектирования ряда технических объектов и исследования динамики биологических процессов».

Из тех же отчетов можно заключить, что любая из тем, выполняемых отделом Б.Н. Пшеничного, так или иначе включала в себя четыре указанные области исследований, при этом основное направление научной деятельности отдела состояло в разработке теории и эффективных вычислительных методов решения задач оптимизации. Б.Н. Пшеничный подчеркивал, что, «несмотря на кажущееся различие этих областей, объективно они проистекали из одного корня — попытки создания методов эффективного решения новых классов задач оптимизации, которые ставила практика. В своей деятельности и при определении тематики отдел всегда исходил из того, что важно не только решить конкретную задачу, но суметь обобщить опыт ее решения, ибо только на основе глубокого теоретического анализа можно сделать достаточно далеко идущие разработки, которые будут способствовать решению новых классов прикладных задач» [1, л.68].

Все работы в отделе по указанным направлениям велись в рамках научно-исследовательских тем, каждая из которых «в своей постановке охватывает широкий круг вопросов, начиная от самых общих вопросов теории и кончая практическими разработками в виде программ, реализующих разработанные вычислительные алгоритмы» [1, л.72].

В 1965—1967 гг., когда Б.Н. Пшеничный только приступил к исполнению обязанностей заведующего отделом, под его руководством в отделе выполнялась тема: «Развитие исследований по прикладной математике. Разработка рациональных методов численного решения и систем алгоритмов для решения научных и прикладных задач». По окончании темы был выпущен отчет в 5 томах, названия которых дают представление о характере полученных результатов и их теоретической и прикладной направленности [1, л.62]:

Том 1. Необходимые условия экстремума и двойственные алгоритмы.

Том 2. Методы минимизации с ускоренной сходимостью.

Том 3. Численные методы решения задач оптимального управления.

Том 4. Вычислительные методы в квантовой химии.

Том 5. Численные методы расчёта городских газовых сетей.

С 1967 по 1970 г. работа отдела продолжалась по теме «Исследование и разработка математических методов оптимизации применительно к решению задач оптимального планирования, управления и проектирования».

В течение 1970—1975 гг. в отделе были выполнены еще 3 бюджетные темы, после чего появилась возможность перейти к обобщающей теме, охватившей широкий круг новых теоретических идей, разрабатываемых в отделе: «Изучение свойств многозначных отображений применительно к теории необходимых условий экстремума и дифференциальных игр и разработка новых численных методов решения сложных оптимизационных задач» [1, л.74—75]. Успешное выполнение этой темы было подготовлено опытом всей предыдущей работы отдела и рядом результатов его сотрудников, опубликованных в отечественных и зарубежных изданиях.

Все теоретические разработки отдела Б.Н. Пшеничного немедленно внедрялись в практику путём заключения хоздоговоров, а также путём передачи разработанных программ в Республиканский фонд алгоритмов и программ. Так, в период с 1965 по 1968 г. были заключены четыре хоздоговора с институтом Укргипрогорпромгаз по теме «Разработки численных методов расчета городских газовых сетей низкого, среднего и высокого давления». В результате выполнения работ по этой теме создана система программ, обеспечивающая автоматизацию всех основных этапов проектирования газовых сетей. Это позволило получить значительный экономический эффект за счет снижения металлоёмкости проектируемых сетей, а также быстроты и качества проектирования. В 1967 г. Министерство коммунального хозяйства УССР утвердило экономический эффект от выполнения данной темы в размере 800 тыс. руб. [1, л.63]. В течение 1976—1981 гг. в отделе под руководством Б.Н. Пшеничного были выполнены шесть хоздоговоров, эффект от внедрения которых составил 1129,9 тыс.руб. [1, л.82].

Следует отметить, что выполнением хоздоговоров не ограничивались связи отдела вычислительных методов с внешним миром. Начиная с 1962 года отдел тесно сотрудничал с Институтом физической химии АН УССР в области разработки и внедрения вычислительных методов в квантовой химии. В 1971—1975 гг. по заданию Государственного комитета по науке и технике при Совете Министров УССР в отделе выполнялись работы по системе моделирования процесса дыхания совместно с Институтом физиологии им. А.А. Богомольца. В этих исследованиях прикладного характера были достигнуты значительные успехи и получены результаты, имеющие общенаучное значение.

В течение всего периода работы под руководством Б.Н. Пшеничного отдел вычислительных методов имел широкие международные связи, в которых проявлялся интерес к работе его специалистов и их признание. Отдел посещали учёные из США, Англии, Франции, Японии, Польши, Румынии, Чехословакии [1, л.73]. Завотделом профессор Б.Н. Пшеничный постоянно выступал с докладами на международных и всесоюзных конференциях и съездах. Так, он участвовал в работе Международной конференции по вопросам вычислительных методов в задачах оптимизации (1968 г., Италия); VII Международного симпозиума по вопросам математического программирования (1970 г., Голландия); Конференции по вопросам оптимизации динамических систем (1974 г., Австрия); конференции «Математическая оптимизация — теория и приложения» (1977 г., ГДР) и многих других [1, л. 6, 8].

Для выполнения научной работы и обмена опытом Б.Н. Пшеничный неоднократно выезжал в командировки в Австрию, ГДР и другие страны [там же]. Читал лекции в Киевском университете, в университетах Донецка, Львова, Одессы и Кишенева, а также в Гарвардском университете (США), в Кембридже (Англия), в Сорбонне (Франция), в Университете им. Гумбольдта (Германия), в Международном центре им. С.Банаха (Варшава) и др. [1, л. 4, 107 об.]. Б.Н. Пшеничный был одним из ведущих лекторов в летних школах по теории оптимизации, которые с начала 70-х годов организовывал академик Н.Н. Моисеев согласно решению Отделения математики АН СССР (первая из них состоялась в Черновцах, вторая — в Шемахе, третья — в Тирасполе).

В течение своей научной деятельности Б.Н. Пшеничный занимал должность председателя Совета «Оптимизация и управление сложными динамическими системами» Комитета по системному анализу при ГКНТ СССР, был членом других научных советов, входил в состав редколлегий журнала «Кибернетика», журнала «SIAM Journal on Control», издаваемого в США, и немецкого журнала «Operation forschung und Statistik» [1, л. 73, 91].

Сотрудники отдела Б.Н. Пшеничного также активно участвовали в различных конференциях, школах и симпозиумах. Специалисты отдела входили в большинство оргкомитетов этих конференций, формируя тем самым общее направление развития теории оптимизации в СССР. Только за первые 5 лет руководства Б.Н. Пшеничного отделом вычислительных методов было опубликовано 5 монографий и 65 статей. «Следует отметить, и, думается, это видно из списка публикаций, что сотрудники отдела стремятся публиковать свои статьи в ведущих изданиях СССР», — отмечал Б.Н. Пшеничный в своем отчете о работе отдела за 1971—1975 гг. [1, л.73].

В том же отчёте представлены состав и динамика роста отдела вычислительных методов: «В настоящее время в отделе работают 18 человек. Из них — 3 старших научных сотрудника, 3 младших научных сотрудника, 1 руководитель группы, 10 инженеров, 1 техник.

Все сотрудники отдела имеют высшее образование. В отделе работают 2 доктора наук и 6 кандидатов наук. Только один кандидат наук был принят в отдел со стороны; все остальные специалисты получили свои звания, работая в отделе. За 1971—1975 гг. подготовлены в отделе: 1 доктор, 9 кандидатов наук, из них 8 человек через аспирантуру. 2 кандидата наук подготовлены для АН Молдавской ССР, остальные работают в системе АН УССР или в системе высшего образования УССР. В настоящее время в отделе имеются 4 аспиранта и 1 соискатель. Отдел обладает относительно стабильным составом. За 1971—1975 гг. из отдела уволились 3 человека, принято на работу молодых специалистов — 7 человек. Темпы роста вполне удовлетворяют нужды отдела» [1, л.74].

За все время своей работы в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова Б.Н. Пшеничный подготовил несколько десятков учеников, которые работают не только в Украине, но и за её пределами; среди них — десять докторов наук и свыше 50 кандидатов [1, л.107 об.].

Заслуги Б.Н. Пшеничного были оценены присуждением ему Государственной премии СССР (1981 г.) и Государственной премии Украины в области науки и техники (1979, 1999 гг.) [1, л.108, 111]. В 1994 г. Б.Н.Пшеничный стал лауреатом Премии им. В.М. Глушкова за цикл работ «Методы управления и обработки данных в прикладных системах» [1, л.101]; в 1971 г. — лауреатом Республиканской комсомольской премии им. Н. Островского за цикл работ «Численные методы решения задач оптимального управления» [1, л.67]. Указом от 23 апреля 1987 г. Б.Н. Пшеничный был награжден Почетной грамотой Президиума Верховного Совета УССР «За значительный вклад в развитие кибернетики и подготовку научных кадров» [1, л.97]. Ученики Б.Н. Пшеничного Ю.М. Данилин, В.М. Панин, А.А. Чикрий, Ю.Н. Онопчук также получили звания лауреатов Государственных премий Украины [2, с.28].

Сегодня ученики Б.Н. Пшеничного успешно развивают все направления созданной им научной школы и так же, как в свое время Борис Николаевич, поддерживают тесные научные связи с учёными многих стран. Упрочению этих связей во многом способствовала Международная конференция по прикладной математике, посвященная 65-летию со дня рождения Б.Н. Пшеничного, которая состоялась в Киеве 25—28 июня 2002 года. Организаторами этой конференции были Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Национальный технический университет «Киевский политехнический институт» и Институт прикладного системного анализа НАН и Министерства образования и науки Украины [46].

Работа конференции проходила в четырех секциях: нелинейный анализ и необходимые условия экстремума, численные методы оптимизации, математическая теория управления и динамические игры, моделирование и применения математической теории. Фактически это те же четыре направления исследований научной школы Б.Н. Пшеничного, которые выделил ранее сам Борис Николаевич.

В работе конференции приняли участие: 51 ученый из дальнего зарубежья, 64 — из ближнего зарубежья и 122 украинских ученых. Среди них — 11 академиков, 8 членов-корреспондентов, 75 профессоров. Научная программа состояла из 150 докладов 240 специалистов из 23 стран. Среди них такие известные ученые, как Б. Мордухович (США), А.Куржанский (Россия), В. Тихомиров (Россия), А. Рубинов (Австралия), А. Иоффе (Израиль), Ж.-П.Пено (Франция), А.Ченцов (Россия), Ф. Имадо (Япония), Л. Лин (Тайвань), Ф. Кириллова (Беларусь), А. Чикрий, В. Кунцевич, М. Згуровский, Н. Шор (Украина).

Было сделано 13 пленарных докладов, множество секционных докладов, а также представлены стендовые доклады молодых ученых и аспирантов.

Ряд докладов был сделан представителями научной школы Б.Н. Пшеничного. Так, А.А. Чикрий рассмотрел обратные функционалы Минковского в динамических играх преследования; В.С. Кирилюк — непараметрическую оценку систем с риском; Ю.М. Данилин — оптимизационный подход к решению вариационных неравенств; В.М. Панин — нелокальный метод Ньютона для монотонных вариационных неравенств; Э.И. Ненахов — модифицированный метод секущей плоскости для неограниченной минимизации; В.В. Остапенко — стационарные и динамические модели распределения гидроресурсов; Л.А. Соболенко — решение проблемы упаковки и размещения объектов с помощью метода линеаризации.

Все доклады, представленные на конференции, были опубликованы в виде тезисов [47] и свыше 50 работ опубликованы в полном объеме в юбилейных номерах (№ 2—5 за 2002 год) журнала «Кибернетика и системный анализ», неизменным членом редколлегии которого был Б.Н. Пшеничный.

Для научной молодежи эта конференция открыла уникальную возможность общения с учеными, которые в настоящее время определяют лицо кибернетики и информатики, формируют перспективу развития этих наук.

Научная направленность конференции, соответствующая тематике школы Б.Н. Пшеничного, и участие в ней большого числа известных ученых подтвердили значимость вклада в мировую науку академика Б.Н. Пшеничного, памяти которого был посвящён данный научный форум.

Краткая оценка значения научной деятельности Б.Н. Пшеничного для следующих поколений содержится в завершающих словах статьи [2]: «В научном мире имя Б.Н. Пшеничного хорошо известно, так как он внёс огромный вклад в развитие методов оптимизации и математической теории управления. На его фундаментальных монографиях вырастет ещё не одно поколение ученых».

1. *Особова* справа академіка Пшеничного Бориса Миколайовича. — Архів Президії НАН України, ф. 251.

2. *Сергиенко И.В., Чикрий А.А.* О научном наследии Б.Н.Пшеничного // Кибернетика и системный анализ.— 2002.— № 2.— С.3—31.

3. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума.— М.: Наука, 1969. — 151 с.

4. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975.— 324 с.

5. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980.— 320 с.

6. *Пшеничный Б.Н.* Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983. — 136 с.

7. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1992. — 260 с.

8. *Пшеничный Б.Н., Кирик Е.Е.* Методы нелинейного программирования и потоки в сетях // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 6. — С. 67—77.

9. *Пшеничный Б.Н., Вартанян А.М.* О решении систем уравнений заданной структуры.— Киев: ИК АН УССР, 1984. — 34 с. — (Препр.84-20). — То же. Кибернетика.— 1984. — № 2.— С.117—118.

10. В*артанян А.М.* О решении линейных уравнений электрической сети // Изв. вузов. Энергетика.— 1984. — № 6.— С.32—39.

11. *Пшеничный Б.Н.* Численный метод решения некоторых задач оптимального управления // ЖВМ и МФ. — 1964. — № 2. — С. 281—287.

12. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия экстремума в общей задаче оптимального управления. — М.: Наука, 1971. — 372 с.

13. *Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И.* Необходимые условия минимума в задачах с операторными ограничениями // Кибернетика. — 1971. — № 3. — С. 35—46.

14. *Глушков В.М., Пшеничный Б.Н.* Об одной математической модели развивающейся экономики // Там же. — 1977. — № 4. — С. 1—6.

15. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений.— М.:Наука,1970. — 420 с.

16. *Келенджеридзе Д.Л.* К теории оптимального преследования // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 138, № 3. — С. 151—155.

17. *Пшеничный Б.Н.* Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика.— 1968. — № 1. — С. 65—78.
18. *Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н.* Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями // Техн. кибернетика. — 1968. — № 1. — С. 13—22.
19. *Дзюбенко Г.Ц.* Линейные дифференциальные игры с запаздыванием информации // Кибернетика. — 1973. — № 6. — С. 81—87.
20. *Чикрий А.А.* Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Тр. Междунар. мат. центра им. С. Банаха (Варшава). Мат. теория управления. — 1985. — Т. 14. — С. 81—107.
21. *Pschenitchny B.N.* ε-Strategies in Differential Games // Topics in Differential Games. — New York; London; Amsterdam: North Holland, 1973. — P. 45—99.
22. *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 75—81.
23. *Chikrii A.A.* Conflict Controlled Processes. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 424 p.
24. *Пшеничный Б.Н., Дзюбенко Г.Ц.* О дифференциальной игре с двумя терминальными множествами // Математические методы исследования и оптимизации систем. — Киев: ИК АН УССР. 1970. — С. 3—11.
25. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А.* Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх // ЖВМ и МФ. — 1974. — № 6. — С. 1416—1428.
26. *Остапенко В.В.* Задача уклонения от встречи // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 4. — С. 16—23.
27. *Chikrii A.A.* The Problem of Avoidance for Controlled Dynamic Objects // J. Mathematics, Game Theory and Algebra. — 1998. — Vol. 7, № 2/3. — P. 81—94.
28. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А.* Дифференциальная игра уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1977. — № 1. — С. 3—10.
29. *Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Групповое преследование в дифференциальных играх // Журн. высш. техн. шк. — Лейпциг, 1982. — № 1. — С. 13—27.
30. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 198 с.
31. *Chikrii A.A.* Conflict Controlled Processes. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 424 p.
32. *Chikrii A.A.* Quasilinear Controlled Processes under Conflict, Dynamical Systems. 2 // J. Math. Sci. — 1996. — Vol. 80, № 1. — P. 1489—1518.
33. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Обобщенные матричные функции Миттаг—Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 3. — С. 3—32.
34. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана—Лиувилля // Там же. — 2001. — № 6. — С. 66—99.
35. *Дискретная* задача поиска / Б.Н.Пшеничный, А.А.Чикрий, Н.Н.Редковский и др.— Киев: ИК АН УССР, 1984.— 30 с. — (Препр.84—12).
36. *Чикрий А.А., Клименко Е.В.* Об игровой задаче поиска // Методы исследования экстремальных задач.— Киев: ИК АН УССР, 1981.— С.21—29.
37. *Чикрий А.А., Дзюбенко К.Г.* Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 1. — С. 92—107.
38. *Чикрий А.А.* О поиске неподвижной цели движущимся объектом // ПММ. — 1984.— Т. 48, № 4. — С. 580—584.
39. *Kurzhanskij A.B., Pshenichnyi B.N.. Pokotilo V.G.* Optimal Impuls for Guaranteed Identification. — Laxenburg: IIASA, 1989. — A-2361. — 45 p.
40. *Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н.* Минимальные инвариантные множества динамических систем с ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ.— 1996. — № 1. — С. 74—81.
41. *Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н.* Инвариантные и стационарные множества нелинейных дискретных систем при ограниченных возмущениях // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 1—2. — С. 35—45.
42. *Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н.* Решение одного класса задач сближения в условиях неопределенности // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 3.— С. 63—70.
43. *Pshenichnyi B.N., Panin V.M., Sobolenko L.A.* The Linearization Method in Constrained Optimization // Modern Math. Methods of Opt. / Ed. by K.-H. Elsner. — Berlin, 1993. — P. 23—42.
44. *Пшеничный Б.Н., Кирик Е.Е.* Декомпозиционный алгоритм для задачи квадратичного программирования специальной структуры.— Киев: ИК АН УССР, 1982.— 26 с. — (Препр.82—40).
45. *Пшеничный Б.Н., Соболенко Л.А.* Метод обратно выпуклого программирования и укладка параллелепипедов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. —С. 16—26.
46. *Сергиенко И.В., Чикрий А.А.* Международная конференция по прикладной математике, посвященная 65-летию со дня рождения Б.Н.Пшеничного // Кибернетика и системный анализ.— 2002. — № 4.— С.186.

47. *The International* Conference on Applied Mathematics Dedicated to the 65-th Anniversary of B.N. Pshenichnyi (1937—2000): Abstracts (June 25—28, 2002). — Kyiv, Ukraine, 2002.

Получено 25.10.2007

А.М. Глєбова

Б.М. Пшеничний — засновник наукової школи з оптимізації, теорії оптимального управління та теорії диференційних ігор

Розглядаються праці академіка НАН України Б.М. Пшеничного (1937—2000) та членів його наукової школи з оптимізації, теорії оптимального управління та теорії диференціальних ігор, робота керованого ним відділу обчислювальних методів Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України.

М.Ш. Холов

Книга «Бабур-наме» как метрологический источник

В статье впервые исследована книга правителя Ферганы, основателя государства Великих Моголов в Индии, полководца, поэта, историка и ученого XV—XVI вв. Захириддина Мухаммеда Бабура «Бабур-наме» с точки зрения метрологической науки. «Бабур-наме» является не только историческим и культурным, но и богатым метрологическим источником той эпохи, из которого мы получаем сведения о метрологии Средней Азии, Афганистана и Северной Индии XV—XVI вв.

Захир-ад-дин (Захириддин) Мухаммед Бабур — автор «Бабур-наме» («Записок Бабура») — занимает видное место среди выдающихся деятелей науки и культуры средневекового Востока XV—XVI вв. Талантливый писатель, ценитель искусства, литературы и науки, оригинальный мемуарист, Бабур, обладая широким кругозором и пытливым умом, оставил значительный след во многих областях жизни народов Средней Азии, Афганистана и Индии.

Бабур родился в г. Андижане 14 февраля 1483 г., он был старшим сыном правителя Ферганы, правнука Тимура. Бабур в 1494 г. стал правителем Ферганы, в 1526 г. в Индии основал централизованное государство Бабуридов (вошедшее в мировую историю как «империя Великих Моголов»), которое существовало до его завоевания (1848 г.) англичанами. Умер Бабур в городе Агре 26 декабря 1530 года.

Благодаря своим выдающимся способностям Бабур вошел в историю не только как полководец и правитель —