

УДК 532.528

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПОГРУЖЕНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО КЛИНА

Ю. А. СЕМЕНОВ

*Институт технической механики НАН и НКА Украины, Днепропетровск*

*Получено 12.03.2003*

Представлен метод решения двумерных автомодельных задач входа тел в воду. Метод основывается на построении выражений комплексной скорости и производной комплексного потенциала в области параметрического переменного. Метод применен для решения задачи погружения несимметричного клина. Жидкость предполагается идеальной невесомой и несжимаемой. Представлены результаты вычисления гидродинамических характеристик для случая вертикального входа несимметричного клина в полупространство жидкости.

Представлено метод рішення двовимірних автомодельних задач входу тіл у воду. Метод ґрунтується на побудові комплексної швидкості та похідної комплексного потенціалу в області параметричного змінного. Метод застосований для рішення задачі занурення несиметричного клину. Рідина припускається ідеальною, невагомю та нестисливою. Представлено результати обчислення гідродинамічних характеристик у разі вертикального входу несиметричного клину у півпростір рідини.

A method for solving two dimensional similar water entry problems is presented. The method is based on the expressions of a complex velocity potential and a derivative of the complex potential constructed in the parameter domain. The method is used for solving the water entry problem of an asymmetric wedge. The fluid is assumed to be ideal, weightless and incompressible. The calculated hydrodynamics characteristics are presented for the cases of the asymmetric wedge entering vertically into a half-space of a liquid.

### ВВЕДЕНИЕ

Процессы входа тел в воду представляют интерес в судостроении (задачи глиссирования, проектирования полупогруженных гребных винтов) и авиации (посадка гидросамолета) для расчета нагрузок, возникающих при взаимодействии высокоскоростных потоков жидкости с элементами конструкций. Изучение этих процессов во многих случаях приводит к задачам входа тела в полупространство жидкости.

Задачи входа тел в воду являются существенно нестационарными и нелинейными. Теоретическое изучение этого класса задач было начато Вагнером [1], получившим приближенное решение задачи для входа в воду клина с малыми углами килеватости. Исследования были продолжены, в частности, Гарабедяном [2], Боргом [3], Моисеевым и др. [4]. Основываясь на введенной в рассмотрение Вагнером функции, Добровольская [5] получила точное решение задачи для случая симметричного погружения клина с постоянной скоростью путем нахождения функции Вагнера по ее действительной части на границе области. С использованием интеграла Шварца, Добровольская получила сингулярное интегральное уравнение и представила результаты вычислений для углов клина  $< 60^\circ$ . Численное решение полученного сингулярного интегрального уравнения для больших углов клина

представлено в работе Кидай и Фоукес [6]. Асимптотическая теория погружения тонких клиньев рассматривалась Гонором [7] и Френкелем [8].

Теория входа в жидкость тел конечных размеров, для которых предположения теории Вагнера не выполняются, разработана Логвиновичем [9]. Теоретические оценки, сделанные Логвиновичем, сравнение их с экспериментальными данными, а также широкое практическое использование таких оценок показывают обоснованность сделанных предположений. Силы, возникающие при проникании в воду тел с большими скоростями, могут значительно превосходить соответствующие стационарные значения. В этом случае могут проявляться сжимаемость жидкости и упругость тел. Эти вопросы рассматривались в работах Сагомоняна [10], Ерошина и др. [11], Кубенко [12], Коробкина [13]. Моделирование процессов формирования газонаполненных каверн при входе осесимметричных тел в жидкость представлено Савченко и Семененко [14]. Достаточно полный обзор работ по проблеме входа тел в жидкость представлен Коробкиным [15].

Несмотря на сохраняющийся интерес многих исследователей к задачам входа тел в жидкость, точного аналитического решения задачи погружения несимметричного клина в жидкость до настоящего времени не представлено. Численные методы решения нестационарных задач со свободной границей разрабатываются достаточно интенсивно,

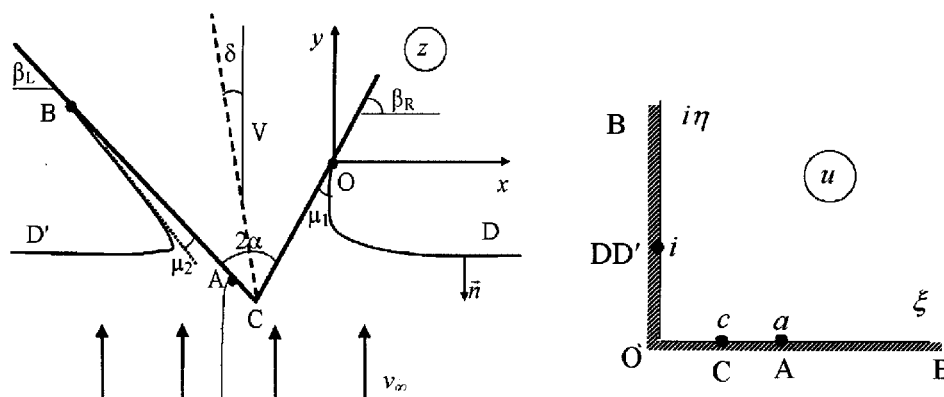


Рис. 1. Натекание полупространства жидкости на несимметричный клин:  
 а – физическая область течения; б – область параметра

в том числе для задач входа тел в воду. Предложенные Жао и Фалтинсен [16], Иафрати [17] методы позволяют достаточно точно вычислить характеристики течения в случае симметричного погружения клина. Для несимметричного погружения Жао и Фалтинсен [16] не представили результатов расчетов, а результаты Иафрати [17], как показано в данной работе, имеют расхождение с полученными результатами вблизи вершины клина. Одной из причин этого является появление сингулярности в вершине в случае погружения несимметричного клина. Порядок сингулярности без аналитического исследования задачи неизвестен, что существенно затрудняет получение точных численных результатов.

Представленное решение основывается на методе построения выражений комплексной скорости и производной комплексного потенциала для нелинейных задач нестационарных течений со свободной границей [18]. В эти выражения в явном виде входит модуль скорости на свободной границе  $v$  и введенная в рассмотрение функция  $\theta = \arctan(v_s/v_n)$ , где  $v_s$  и  $v_n$  – соответственно касательная и нормальная компоненты скорости на свободной границе. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению указанных функций по заданным граничным условиям. Для рассмотренного случая автомодельной задачи гидродинамические характеристики зависят только от отношений  $x/v_0t$ ,  $y/v_0t$ , где  $x$ ,  $y$  – декартовы координаты;  $t$  – время;  $v_0$  – характерная скорость течения. При использовании автомодельных переменных кинематическое и динамическое гранич-

ное условие сводятся к интегральному и интегродифференциальному уравнению для определения неизвестных функций  $v$  и  $\theta$ .

Представлены результаты расчетов свободной поверхности, распределения давления на щеках клина, угла контакта свободной границы с клином и коэффициентов гидродинамических сил для различных значений угла клина и угла отклонения оси симметрии клина от вертикали.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая формулировка автомодельной задачи погружения клина дана в работах Вагнера [1], Добровольской [5] (для клина, проникающего в неподвижную жидкость). В данной работе при построении выражения комплексного потенциала течения удобнее рассматривать обратное течение, реализующееся в результате натекания полупространства жидкости на покоящийся клин. Схема течения представлена на рис. 1.

Клин фиксирован. Начало системы координат находится в точке контакта свободной поверхности с клином  $O$ . Идеальная несжимаемая и невесомая жидкость имеет на бесконечности скорость  $v_\infty$ , направленную вдоль оси  $y$ . Клин имеет при вершине угол  $2\alpha$ . Ось клина отклонена от оси  $y$  на угол  $\delta$ . Угол килеватости справа и слева выражаются соотношениями  $\beta_R = 90^\circ - \alpha + \delta$  и  $\beta_L = 90^\circ - \alpha - \delta$ . Введением в рассмотрение безразмерных координат  $\tilde{x} = x/v_0t$ ,  $\tilde{y} = y/v_0t$  область течения в физической плоскости, изменяемая во

времени, преобразуется в стационарную область в плоскости переменных  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ . Однако форма свободной поверхности неизвестна заранее и должна быть определена из решения задачи.

Комплексный потенциал автомодельного течения можно представить в виде [5]

$$W(z, t) = \phi(z, t) + i\psi(z, t) = v_0^2 t \tilde{W}(\tilde{z}) = \quad (1)$$

$$= v_0^2 t \left[ \tilde{\phi}(\tilde{z}) + i\tilde{\psi}(\tilde{z}) \right],$$

где  $\tilde{z} = x + i\tilde{y}$ .

Комплексная скорость и производная комплексного потенциала ищется в области параметрического переменного  $u = \xi + i\eta$ . Соответствие точек в физической области и в области параметра показано на рис. 1. Вследствие несимметричного обтекания клина, точка торможения потока находится на одной из щек клина, а скорость в вершине клина обращается в бесконечность. Модуль скорости на свободной поверхности изменяется от значения  $v_0$  в точке контакта с клином  $O$  до значения  $v_\infty$  на бесконечности в точке  $D$ . Для границы  $DB$  модуль скорости изменяется от значения  $v_\infty$  в точке  $D$  до значения  $v_B$  в точке  $B$  контакта свободной поверхности с клином. Для течений с движущимися свободными границами в работе [18] представлен вид регулярной части выражения комплексной скорости и производной комплексного потенциала. Применяя метод особых точек Чаплыгина [19] для учета особых точек рассматриваемого течения, можно получить окончательное выражение комплексной скорости и производной комплексного потенциала в виде

$$\frac{d\tilde{W}}{d\tilde{z}} = \left( \frac{u-a}{u+a} \right) \left( \frac{u+c}{u-c} \right)^{(1-2\alpha/\pi)} \times \quad (2)$$

$$\times \exp \left[ -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta} \ln \left( \frac{i\eta-u}{i\eta+u} \right) d\eta - i(\pi - \beta_L) \right],$$

$$\frac{d\tilde{W}}{du} = N u^{(2\mu_1/\pi-1)} \frac{u^2-a^2}{(1+u^2)^2} \times \quad (3)$$

$$\times \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\theta}{d\eta} \ln(\eta^2+u^2) d\eta \right],$$

где  $N$  – масштабный множитель; функция  $\theta(\eta) = \arctan(v_s/v_n)$  выражается через касательную  $v_s(\eta)$  и нормальную  $v_n(\eta)$  компоненты скорости на свободной границе. Полагая в выражении

(2) поочередно  $u = \xi$  и  $u = i\eta$ , можно увидеть, что на смачиваемых участках клина  $\arg(d\tilde{W}/d\tilde{z}) = -\beta_R$  при  $0 < \xi < c$ ,  $\arg(d\tilde{W}/d\tilde{z}) = -(\pi - \beta_L)$  при  $c < \xi < \infty$ . На свободных границах модуль комплексной скорости равен заданной функции  $v(\eta)$ , которая будет определена ниже с использованием динамического граничного условия. Проверив аналогично выражение производной комплексного потенциала (3), можно видеть, что на смачиваемых участках клина производная комплексного потенциала действительна, а на свободных поверхностях выполняется условие  $\frac{Im d\tilde{W}}{Re d\tilde{W}} = \frac{v_n}{v_s}$ , что соответствует определению комплексного потенциала.

Из выражений (1) и (2) можно получить выражение

$$\frac{d\tilde{z}}{du} = N u^{(2\mu_1-\frac{1}{2})} \frac{(u+a)^2}{(1+u^2)^2} \left( \frac{u-c}{u+c} \right)^{(1-\frac{2\alpha}{\pi})} \times$$

$$\times \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\theta}{d\eta} \ln(\eta^2+u^2) d\eta + \right. \quad (4)$$

$$\left. + \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta} \ln \left( \frac{i\eta-u}{i\eta+u} \right) d\eta + i(\pi - \alpha_2) \right],$$

интегрированием которого в области параметра можно рассчитать форму свободной поверхности, а также, с учетом выражения (2), вычислить гидродинамические характеристики течения.

Неизвестные параметры  $a$ ,  $c$ ,  $N$  могут быть определены из условия для скорости на бесконечности, заданной длины смоченной части щеки клина  $OC$  и условия, что координата  $y$  свободной границы на бесконечности справа и слева одинакова. Эти условия имеют вид:

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta} \ln \left| \frac{\eta-1}{\eta+1} \right| d\eta + \left( 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right) \times \quad (5)$$

$$\times \left( 2 \arctan \frac{1}{c} - \pi \right) - 2 \arctan \frac{1}{a} + \pi/2 + \alpha_1 = 0,$$

$$\int_0^c \left| \frac{d\tilde{z}}{du} \right|_{u=\xi} d\xi = v_0, \quad (6)$$

$$Im \left( \oint_{u=i} \frac{d\tilde{z}}{du} du \right) = 0. \quad (7)$$

Для решения системы уравнений (4) - (6) необходимо получить уравнения для определения неизвестных функций  $v(\eta)$  и  $\theta(\eta)$ .

## 2. ДИНАМИЧЕСКОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ

Интеграл Коши-Лагранжа, записанный в физической области для точки  $O$  и произвольной точки области течения, имеет вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_z + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} + \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_a}{\rho}. \quad (8)$$

На свободной поверхности  $p = p_a$ . Рассмотрим форму свободной поверхности как функцию дуговой координаты  $s$  вдоль свободной поверхности и времени  $t$ , то есть  $z = z(s, t)$ . Вводя автономную переменную  $\tilde{s} = s/(v_0 t)$ , можно выразить форму свободной границы  $z = z(s, t)$  в физической области в виде

$$z(s, t) = v_0 t \tilde{z}(\tilde{s}),$$

где  $\tilde{z} = \tilde{z}(\tilde{s})$  - форма свободной границы в стационарной области  $\tilde{z} = \tilde{z}(u)$ .

Используя очевидные соотношения

$$W = W(s, t), \quad dW = \frac{\partial W}{\partial s} \Big|_t ds + \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_s dt,$$

$$z = z(s, t), \quad dz = \frac{\partial z}{\partial s} \Big|_t ds + \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_s dt,$$

можно найти производную потенциала по времени в физической плоскости при  $z = \text{const}(dz = 0)$ :

$$\frac{\partial W}{\partial t} \Big|_z = \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_s + \frac{\partial W}{\partial s} \Big|_t \left( - \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_s / \frac{\partial z}{\partial s} \Big|_t \right) = \quad (9)$$

$$= \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_s - \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_t \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_s.$$

Учитывая, что  $\frac{\partial W}{\partial z} \Big|_t = \bar{V}$  - комплексно сопряженная скорость, а  $\frac{\partial z}{\partial t} \Big|_s = V$  - скорость жидкости, последнее выражение преобразуется к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} \Big|_z = \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_s - v^2, \quad (10)$$

где  $v^2 = \bar{V}V$  - квадрат модуля скорости. Учитывая, что  $W(s, t) = v_0^2 t \tilde{W} \left( \frac{s}{v_0 t} \right)$ , можно найти

$$\frac{\partial W}{\partial t} \Big|_s = v_0^2 \tilde{W}'(\tilde{s}) - v_0^2 \frac{d\tilde{W}}{d\tilde{s}} \tilde{s}. \quad (11)$$

Выделяя действительную часть выражений (9) и (10), подставляя ее в уравнение (7) и полагая  $W(0, t) = 0$ , получим уравнение для скорости на свободной поверхности в виде

$$v^2 = v_0^2 \left( 1 + 2\tilde{\phi} - 2 \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{s}} \tilde{s} \right). \quad (12)$$

Поскольку  $v = \sqrt{v_s^2 + v_n^2}$ , из определения функции  $\theta = \arctan(v_s/v_n)$  следует

$$v_s = v \sin \theta, \quad v_n = v \cos \theta. \quad (13)$$

Дифференцируя выражение (11) по  $\tilde{s}$ , учитывая  $d\tilde{\phi}/d\tilde{s} = v_s/v_0$  и выражение (12), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{d\tilde{s}} = - \frac{v \tilde{s} \cos \theta}{v/v_0 + \tilde{s} \sin \theta} \frac{d\theta}{d\tilde{s}}. \quad (14)$$

Умножая выражение (13) на  $d\tilde{s}/d\eta$ , окончательно получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{d \ln v}{d\eta} = - \frac{\tilde{s} \cos \theta}{v/v_0 + \tilde{s} \sin \theta} \frac{d\theta}{d\eta}, \quad (15)$$

где  $\tilde{s}(\eta) = \int_0^\eta \left| \frac{dz}{du} \right|_{u=i\eta} d\eta$ .

Для решения задачи необходимо получить второе уравнение, связывающее функции  $v(\eta)$  и  $\theta(\eta)$ .

**Кинематическое граничное условие.** Элемент свободной границы  $dz$  и скорость жидкости на нем можно выразить следующими очевидными соотношениями:

$$V = v e^{i\gamma}, \quad dz = e^{i\chi} ds,$$

где  $\gamma$  - аргумент вектора скорости;  $\chi$  - аргумент элемента  $dz$ ;  $ds = |dz|$ .

На свободной границе давление постоянно, поэтому ускорение жидкой частицы перпендикулярно свободной поверхности, то есть

$$\text{Re} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \bar{dz} \right) = 0. \quad (16)$$

Дифференцируя  $V = v e^{i\gamma}$  по времени,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{d\eta} \frac{d\eta}{d\tilde{s}} \frac{d\tilde{s}}{dt},$$

$$\frac{dV}{d\eta} = v e^{i\gamma} \left( \frac{d \ln v}{d\eta} + i \frac{d\gamma}{d\eta} \right)$$

и подставляя полученное выражение в выражение (15), получаем следующее уравнение:

$$\cos(\gamma - \chi) \frac{d \ln v}{d\eta} - \sin(\gamma - \chi) \frac{d\gamma}{d\eta} = 0. \quad (17)$$

Из выражения (4) при  $u = i\eta$  можно найти  $\chi = \pi/2 - \theta + \gamma$ . Определяя аргумент комплексной скорости  $\gamma$  из выражения (2) при  $u = i\eta$ , дифференцируя функцию  $\gamma(\eta)$  по  $\eta$  и подставляя результат в уравнение (16), получаем следующее интегральное уравнение относительно функции  $d \ln v / d\eta$ :

$$\begin{aligned} -\operatorname{tg} \theta \frac{d \ln v}{d\eta} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d \ln v}{d\eta'} \frac{2\eta'}{\eta'^2 - \eta^2} d\eta' = & \quad (18) \\ = \frac{2a}{a^2 + \eta^2} + 2 \left( \frac{2\alpha}{\pi} - 1 \right) \frac{2c}{c^2 + \eta^2}. \end{aligned}$$

Система уравнений (4) – (6), (14), (17) является замкнутой и позволяет определить параметры  $a$ ,  $c$ ,  $N$  и функции  $v(\eta)$  и  $\theta(\eta)$ .

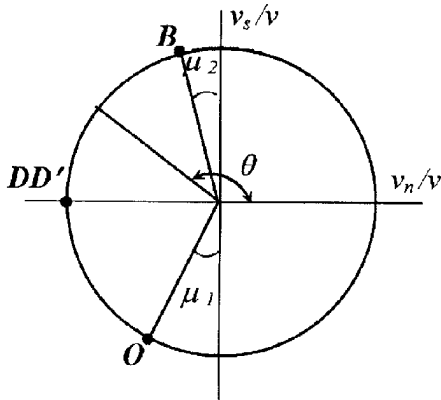


Рис. 2. Область изменения функции  $\theta$

На рис. 2 представлена область изменения функции  $\theta(\eta)$ . В точке  $O$  касательная и нормальная компоненты скорости в проекции на элемент свободной границы  $ds$  отрицательна, поэтому точка  $O$  на рис. 2 расположена в 3 квадранте.

В бесконечности (точка  $D$ )  $v_s = 0$ ,  $v_n = -v_\infty$ , что соответствует  $\theta(1) = \pi$ . На левой части свободной границы  $v_s > 0$ ,  $v_n < 0$ , то есть  $\pi/2 < \theta(\eta) \leq \pi$ . На сторонах клина нормальная

компонента скорости равна нулю. Таким образом, углы контакта свободной поверхности с клином  $\mu_1$  и  $\mu_2$  определяются как

$$\mu_1 = \frac{3}{2}\pi - \theta(0), \quad \mu_2 = \theta(\infty) - \pi/2.$$

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА ЩЕКАХ КЛИНА

Интеграл Коши-Лагранжа (7) позволяет рассчитать давление на щеках клина. Для этого необходимо вычислить производную потенциала течения  $\partial\phi/dt$  в физической области течения через потенциал  $\tilde{\phi}$  в стационарной области. Координаты щек клина  $z = z(s, t)$  можно выразить следующими соотношениями:

для правой щеки клина

$$z(s, t) = v_0 t \left( 1 - \frac{s}{v_0 t} \right) e^{i\beta_R}, \quad 0 < s < v_0 t,$$

для левой щеки клина

$$z(s, t) = v_0 t \left( \frac{s}{v_0 t} - 1 \right) e^{i\beta_L},$$

$$v_0 t < s < (v_0 + v_B)t,$$

где координата  $s$  отсчитывается от точки  $O$ .

Из последних выражений следует  $\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_s = v_0$  для правой щеки клина и  $\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_s = -v_0$  для левой щеки клина. Подставляя полученные значения  $\partial z / \partial t$  в выражение (8) и учитывая, что мнимая часть комплексного потенциала на щеках клина равна нулю, получаем

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_z = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_s - v v_0 = v_0^2 \tilde{\phi} + v_0 v \tilde{s} - v_0 v,$$

$$0 \leq \tilde{s} \leq 1,$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_z = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_s + v v_0 = v_0^2 \tilde{\phi} - v_0 v \tilde{s} + v_0 v,$$

$$1 \leq \tilde{s} \leq 1 + v_B/v_0.$$

Подставляя найденные выражения в интеграл Коши-Лагранжа (7), получаем:  
для правой стороны клина

$$P_R(\tilde{s}) = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = \tag{19}$$

$$= -\frac{2(\tilde{\phi} + \tilde{s}v/v_0) + (1 - v/v_0)^2}{(v_\infty/v_0)^2},$$

для левой стороны клина

$$P_L(\tilde{s}) = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = \tag{20}$$

$$= -\frac{2(\tilde{\phi} - \tilde{s}v/v_0) + (1 + v/v_0)^2}{(v_\infty/v_0)^2},$$

$$1 \leq \tilde{s} \leq 1 + v_B/v_0.$$

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Численное решение системы уравнений (14), (17) осуществляется методом последовательных приближений. В качестве начального приближения принимается  $v(\eta) \equiv v_0$ ,  $\theta(\eta) \equiv \pi$ . Система нелинейных уравнений (4) – (6) решается на каждой итерации. На мнимой оси области параметра выбраны фиксированные точки  $0 < \eta_i < 1$ ,  $i = 1, N/2$ , соответствующие правой части свободной границы. Значение задавалось  $\eta_1 = 10^{-5}$ . Точки, соответствующие левой части свободной границы, заданы как  $\eta_i = 1/\eta_{N-i}$ ,  $i = N/2 + 1, N$ . Число точек дискретизации  $N = 300$  обеспечивает достаточно высокую точность вычислений.

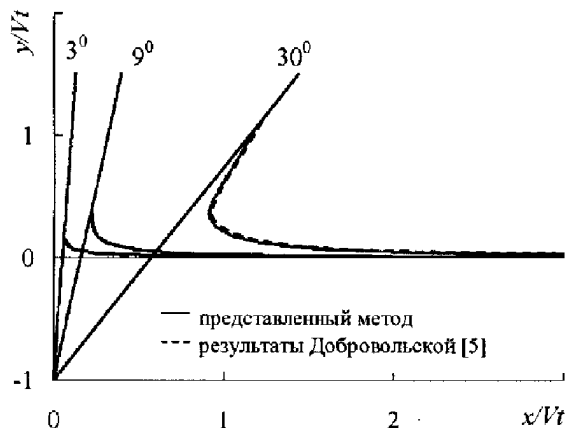


Рис. 3. Формы свободных границ при погружении симметричного клина

На рис. 3 сравнивается рассчитанная форма свободной поверхности с результатами работы [5]

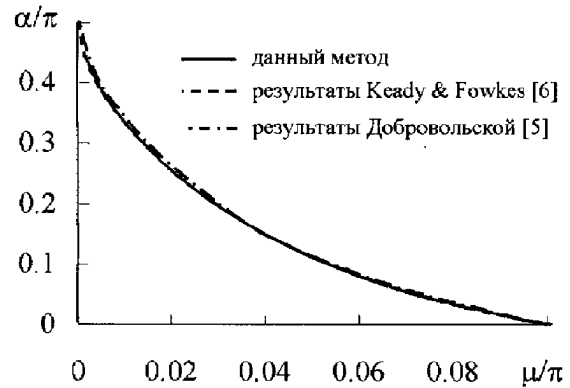


Рис. 4. Полуугол симметричного клина как функция угла контакта свободной границы

для случая симметричного входа клина в жидкость. На рис. 4 сравниваются рассчитанные зависимости угла контакта свободной поверхности с клином с результатами решения задачи методом Добровольской [5, 6]. Можно видеть, что численная процедура обеспечивает достаточно высокую точность решения системы уравнений (14), (17).

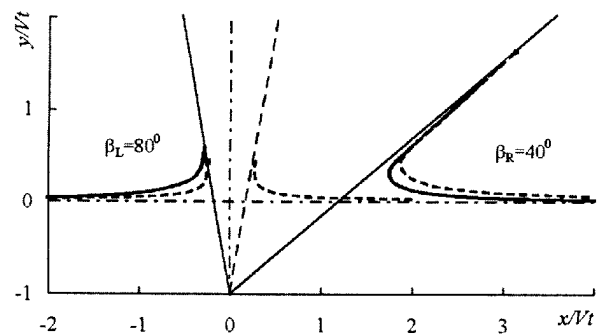


Рис. 5. Формы свободных границ при погружении несимметричного клина

На рис. 5 представлены форма свободной поверхности для несимметричного входа клина с углом  $2\alpha = 60^\circ$  и углом отклонения оси клина от вертикали  $\delta = -20^\circ$ , а также форма свободной границы, соответствующая входу симметричного клина с углом  $2\alpha = 20^\circ$  и  $2\alpha = 100^\circ$ . Отличие свободной границы при входе несимметричного клина (сплошные линии) от соответствующей границы для симметричного клина (пунктирные линии) при равных углах килеватости показывает взаимовлияние щек клина на свободную границу.

Угол контакта свободной границы и щетки кли-

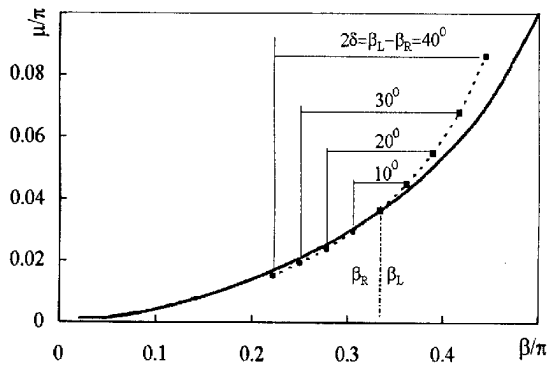


Рис. 6. Угол контакта свободной границы с клином при погружении несимметричного клина как функция угла килеватости

на как функция угла килеватости представлена на рис. 6. Сплошная линия соответствует входу симметричного клина, символами показан угол контакта на правой стороне (квадраты) и соответствующие им значения угла контакта на левой стороне клина (кружочки) для клина  $2\alpha = 60^\circ$  при различных отклонениях оси клина от вертикали. Можно видеть, что для несимметричного клина на стороне с большим углом килеватости угол контакта  $\mu_1$  превосходит значение, соответствующее симметричному клину с тем же углом килеватости. Для стороны с меньшим углом килеватости угол контакта  $\mu_2$  близок к значению, соответствующему симметричному клину.

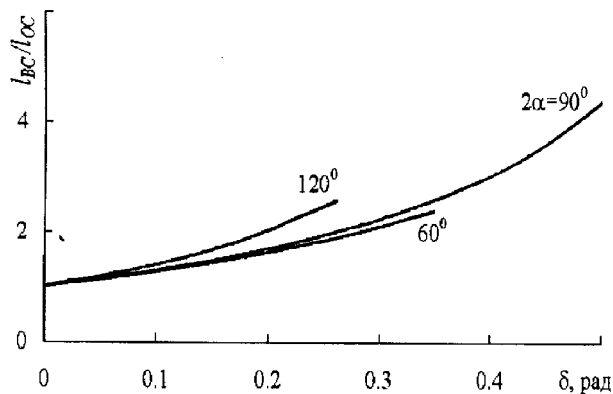


Рис. 7. Отношение длин смоченной части сторон клина как функция угла отклонения оси клина от вертикали

Смоченная длина щек клина определяется скоростью жидкости в точке контакта свободной поверхности с клином  $l_{OC} = v_{ot}$ ,  $l_{BC} = v_{bt}$ . На рис.

7 представлено отношение  $l_{BC}/l_{OC} = v_B/v_O$  как функция угла отклонения оси клина от вертикали.

Распределение давления на щеках клина показано на рис. 8 для случая малого отклонения оси клина от вертикали ( $\delta = 5^\circ$ ). Там же показаны пунктиром результаты численного метода Иафрати [17]. Можно видеть, что имеется удовлетворительное согласование пиков давления, вызванных большим ускорением жидкости на свободной поверхности вблизи клина. Вблизи вершины клина имеется расхождение полученных результатов с результатами работы [17]. Данных по распределению давления на клине при больших значениях отклонения оси клина от вертикали в литературе не приведено.

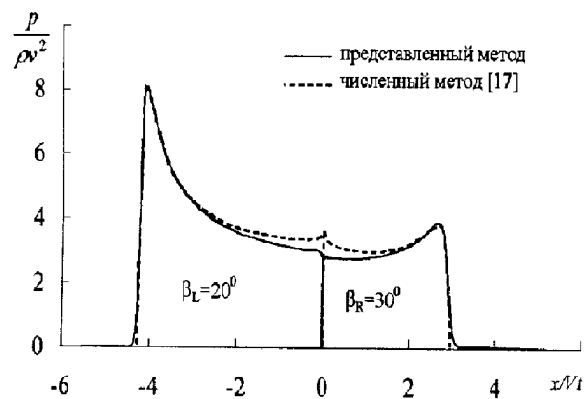


Рис. 8. Распределение давления на сторонах клина при малом угле отклонения оси клина от вертикали

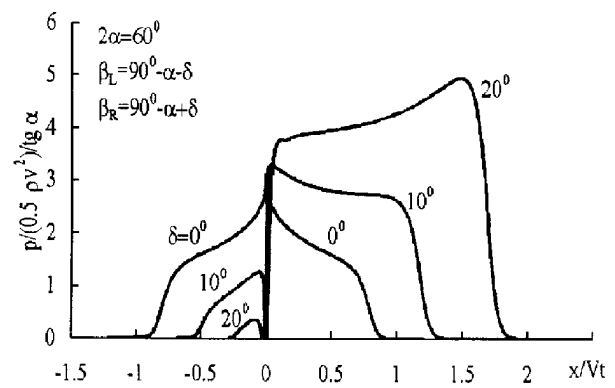


Рис. 9. Распределение давления на сторонах клина, отнесенное к  $\text{tg } \alpha$ , при различных углах отклонения оси клина от вертикали

На рис. 9 представлены результаты расчета коэффициента давления для клина с углом при вершине  $2\alpha = 60^\circ$  и углом отклонения оси клина от

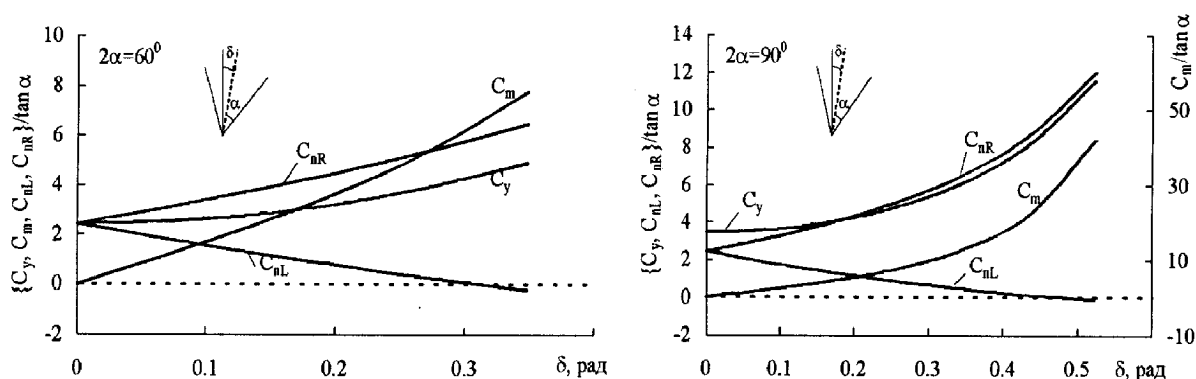


Рис. 10. Коэффициенты гидродинамических сил, отнесенных к  $\tan \alpha$  как функции угла отклонения оси клина от вертикали

вертикали  $\delta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ . Как ожидалось, с увеличением угла  $\delta$  коэффициент давления на одной стороне клина увеличивается, в то время как на другой уменьшается. При максимальном значении  $\delta_{\max}$ , для которого получены численные результаты, угол килеватости справа не достигает значения  $90^\circ$ . По всей видимости, для значений  $\delta > \delta_{\max}$ , при которых коэффициент силы, нормальной к стороне клина, становится отрицательным, предположение о безотрывном обтекании вершины клина не выполняется. При этом реализуется режим течения, когда только одна сторона клина находится в контакте с жидкостью, что соответствует входу в воду пластинки.

На рис. 10 представлены зависимости коэффициентов силы, нормальной к сторонам клина  $C_{nR}/\tan \alpha, C_{nL}/\tan \alpha$ , а также зависимости коэффициента  $C_y/\tan \alpha$  и коэффициента момента относительно вершины клина  $C_m/\tan \alpha$  для  $2\alpha = 60^\circ$  и  $2\alpha = 90^\circ$ . Коэффициенты вычислены в соответствии с выражениями

$$C_{nR} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 H} \int_0^c P_R(\tilde{s}) d\tilde{s},$$

$$C_{nL} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 H} \int_c^\infty P_L(\tilde{s}) d\tilde{s},$$

$$C_y = C_{nR} \sin(\alpha - \delta) + C_{nL} \sin(\alpha + \delta),$$

$$C_m = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 H^2} \left\{ \int_0^c [1 - \tilde{s}(\xi)] P_R[\tilde{s}(\xi)] \frac{d\tilde{s}}{d\xi} d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_c^\infty [1 - \tilde{s}(\xi)] P_L[\tilde{s}(\xi)] \frac{d\tilde{s}}{d\xi} d\xi \right\}.$$

В качестве характерной длины выбрано сечение клина невозмущенной свободной поверхностью

$$H = v_\infty t (\operatorname{tg}(\alpha - \delta) + \operatorname{tg}(\alpha + \delta)).$$

Можно видеть, что при значении угла  $\delta \approx \delta_{\max}$ , коэффициент давления на правой стороне клина принимает небольшие отрицательные значения. Для клина с углом при вершине  $2\alpha = 60^\circ$  зависимости  $C_{nR}/\tan \alpha, C_{nL}/\tan \alpha, C_m/\tan \alpha$  как функции угла  $\delta$  близки к линейным. При  $2\alpha = 90^\circ$  наблюдается резкое увеличение коэффициентов  $C_{nR}/\tan \alpha, C_m/\tan \alpha$  при больших значениях  $\delta$  вследствие существенного уменьшения угла килеватости на одной из сторон.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автомодельная задача входа в воду несимметричного клина решена путем построения аналитического выражения комплексной скорости и производной комплексного потенциала в области параметрического переменного. Получено интегральное и интегро-дифференциальное уравнение и разработана процедура их численного решения. Представлены результаты расчета гидродинамических характеристик и формы свободной поверхности для различных углов отклонения оси клина от вертикали.



1. Wagner H. Über Stoss- and Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. *Z. angew. Math. und Mech.* – 1932. – 12. – P. 193-215.
2. Garabedian P.R. Oblique water entry of a wedge. *Comm. Pure and Appl. Math.*, – 1953. – 6. – P. 157-165.
3. Borg S.F. Some contributions to the wedge-water entry problem. *Proc. Am. Soc. Civil Engrs, J. Engng Mech. Div.* – 1957. – 83, No. EM2, Pap. 1214.
4. Моисеев Н.Н., Борисова Е.П., Корявов П.П. Плоские и осе симметричные автомодельные задачи входа в жидкость // ПММ. – 1959. – Том 23. – С. 490-507.
5. Dobrovol'skaya Z.N. Some problems of similarity flow of fluid with a free surface // *J. of Fluid Mech.* – 1969. Vol. 36. – P. 805-829.
6. Keady G., Fowkes N. The vertical entry of a wedge into water: integral equations and numerical results // *Third Biennial Engineering Mathematics and Applications Conference (EMAC '98)*. – 1998. – Vol 1. – P. 277-281. – Adelaide, South Australia.
7. Freankel E. Problems of similarity flow of fluid with a free surface // *J. of Fluid Mech.* – 1969. Vol. 36. – P. 805-829.
8. Гонор А.Л. Проникание тонкого клина в жидкость // *ДАН СССР*. – 1986. – Том 290. – С. 1068-1072.
9. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка. – 1969. – 308 с.
10. Сагомоян А.Я. Проникание. – М.: Московск. Гос. ун-т. – 1974. – 300 с.
11. Ерошин В.А., Романенков Н.И., Серебряков И.В., Якимов Ю.Л. Гидродинамические силы при входе тупых тел в сжимаемую жидкость // *Изв. Акад. наук СССР, Мех. жид. и газов.* – 1980. – 6. – С. 44-51.
12. Кубенко В.Д. Проникание эластических оболочек в сжимаемую жидкость. – К.: Наук. думка. – 1981. – 160 с.
13. Коробкин А.А. Проникание тупых тел в слабо сжимаемую жидкость // *Жур. прикл. мех. и тех. физики.* – 1984. – 5. – С. 104-110.
14. Савченко Ю.Н., Семенов В.Н. Волнообразование на границах каверн, образующихся при входе в воду диска и конусов // *Проблемы гидродинамики больших скоростей* / Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. – 1993. – С. 231-239.
15. Korobkin A.A. and Puknachov V.V. Initial Stage of Water Impact // *Ann. Rev. Fluid Mech.* – 1988. – P. 159 -185.
16. Zhao R., Faltinsen O. Water entry of two-dimensional bodies // *J. of Fluid Mech.* – 1993. – Vol. 246. – P. 593-612.
17. Iafrati A. Hydrodynamics of Asymmetric Wedges Impacting the Free Surface // *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. ECCOMAS 2000.* – Barselona, 11-14 Sept.
18. Семенов Ю.А. Аналитический метод решения нелинейных задач нестационарных кавитационных течений // *Прикладна гідромеханіка.* – 2000. – Вып. 2(74), No.3. – С. 94-99.
19. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука. – 1979. – 536 с.