(multi) spatial regions. To build a major integrated solutions are involved corresponding Fourier transform to Cartesian axis and semi-axles and integral Fourier transform on *n* Cartesian segment of coupling points.

Key words: *hyperbolic equations, initial and boundary conditions, matching, integral transformation, the main solution.*

Отримано: 22.05.2012

УДК 517.977.56

М. М. Копець, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України ‹‹КПІ››, м. Київ

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИНГУЛЯРНОЮ ЛІНІЙНОЮ СИСТЕМОЮ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У статті розглядається задача оптимального керування лінійною сингулярною системою з розподіленими параметрами і квадратичним функціоналом. Використовуючи метод множників Лагранжа, отримано рівняння Ейлера—Лагранжа. Для дослідження цих рівнянь виведено матричне інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті. Доведено єдиність оптимального керування.

Ключові слова: *оптимальне керування, сингулярна система лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, метод множників Лагранжа, рівняння Ейлера—Лагранжа, матричне інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті.*

1. Вступ

Дослідження систем диференціальних рівнянь, що не розв’язані відносно старших похідних, почалось ще в сорокових роках минулого століття. Однією із перших робіт, присвячених вище згаданій тематиці, є стаття академіка М. М. Лузіна [10]. Системи подібного типу розглянуті також в монографії [8, с. 348]. Однак тільки на початку 80-х років минулого століття почалось систематичне дослідження таких систем.

Значне зростання популярності подібних систем пояснюється, з одного боку, їх широким застосуванням для моделювання великого числа практичних задач у техніці, економіці, з другого боку, тією обставиною, що таким системам властиві певні особливості у порівняні із системами звичайних диференціальних рівнянь. Такі системи називають по-різному: алгебро-диференціальні системи; вироджені системи; диференціально-алгебраїчні системи; системи не типу Коші-Ковалевської; системи, не розв’язані відносно старших похідних; дескрипторні системи; сингулярні системи; системи з виродженням. Однак незалежно від назви всіх їх об’єднує одна спільна властивість: матриця при старших похідних або особлива (вироджена), або прямокутна. Тому звести таку систему до системи звичайних диференціальних рівнянь за виключенням деяких частинних випадків неможливо.

Сингулярною системою лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними будемо називати систему вигляду

$$\mathrm{C}\frac{\partial \mathrm{z}(t,x)}{\partial t} = \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{z}(t,x)}{\partial x} + \mathrm{Bz}(t,x), \tag{1}$$

де A, B, C — задані квадратні матриці порядку n, елементами яких є дійсні числа, причому $\det \mathrm{C} = 0$, тобто матриця C вироджена, $z(t,x)$ — шуканий вектор-стовпець розміру $n \times 1$. Інколи можливі випадки, коли обидві матриці A і C — вироджені. Приклад такої системи дає телеграфне рівняння [14, с. 215]

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + a\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} + bz(t,x). \tag{2}$$

Вводячи нові змінні

$$z_1(t,x) = z(t,x),\ z_2(t,x) = \frac{\partial z(t,x)}{\partial t},\ z_3(t,x) = \frac{\partial z(t,x)}{\partial x},$$

замість рівняння (2) отримаємо систему трьох рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1(t,x)}{\partial t} = z_2(t,x), \\ \dfrac{\partial z_2(t,x)}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial z_3(t,x)}{\partial x} + b\, z_1(t,x) + a\, z_2(t,x), \\ 0 = \dfrac{\partial z_1(t,x)}{\partial x} - z_3(t,x), \end{cases}$$

де матриці A, B, C відповідно мають вигляд:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У зв’язку з цим прикладом потрібно зауважити, що є сумнівним твердження про те, що найбільш адекватною назвою таких систем є назва «алгебро-диференціальні системи» [4, с. 5]. У наведеному прикладі матриця C є виродженою, всі рівняння системи — диференціальні, і нема жодного алгебраїчного рівняння.

Особливо слід відзначити, що також дуже часто до сингулярних систем приводять задачі, що розглядаються в теорії оптимального керування. Очевидно, що згадати всі роботи, присвячені дослідженню сингулярних систем, неможливо. У першу чергу потрібно згадати монографії [3—7; 12; 15—20]. В них також можна знайти досить детальні бібліографічні дані, що стосуються вивчення сингулярних систем.

Історично так склалось, що основна увага в процесі дослідження сингулярних систем була спрямована на лінійні системи із зосередженими параметрами, тобто на об'єкти, поведінка яких описується системами лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Сингулярні системи лінійних рівнянь з частинними похідними розглядались рідше. Зокрема, такі системи досліджуються в роботах [1; 2], а також в монографії [9].

2. Постановка задачі оптимального керування

Нехай об'єкт керування описується системою лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\mathrm{C}\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \mathrm{A}\frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + \mathrm{B}z(t,x) + \mathrm{D}u(t,x), \tag{3}$$

де A, B, C — задані матриці розміру $n \times n$, D — задана матриця розміру $n \times m$, причому всі ці чотири матриці – сталі (їх елементами є дійсні числа) і $\det \mathrm{C} = 0$. Змінна t асоціюється з часом, змінна x — просторова змінна, $z(t,x)$ — дійсний n-вимірний вектор-стовпець, який в подальшому називається *станом* системи (3), дійсний m-вимірний вектор-стовпець $u(t,x)$ називається *керуванням*. Вважаємо, що керування належать до класу кусково-неперервних вектор-функцій. Для системи (3) задано початкову умову

$$z(0,x) = z_0(x) \tag{4}$$

і крайові умови

$$z(t,0) = g(t),\, z(t,l) = h(t). \tag{5}$$

Дійсне число $l > 0$, n-вимірні вектор-стовпці $z_0(x)$, $g(t)$, $h(t)$ задані. Будемо припускати, що для кожного заданого керування $u(t,x)$ система рівнянь (3) має єдиний розв'язок $z(t,x)$, який задовольняє умовам (4) і (5).

Розглянемо наступний критерій оптимальності:

$$\begin{aligned} I(z,u) = {} & \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l z^*(T,x)M(x,y)z(T,y)\,dy\,dx + \\ & + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l\left[\int_0^l z^*(t,x)F(x,y)z(t,y)\,dy + u^*(t,x)Gu(t,x)\right]dx\,dt, \end{aligned} \tag{6}$$

де символ $z^*u = \langle z,u \rangle$ означає скалярний добуток векторів z і u, тобто $z^*u = \langle z,u \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i u_i$, G — задана симетрична додатно визначена матриця розміру $m \times m$ (отже, існує матриця G^{-1}) , $\mathrm{F}(x,y)$ і $\mathrm{M}(x,y)$ також задані симетричні невід'ємно визначені матриці розміру $n \times n$ ($\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{F}^*(y,x), \mathrm{M}(x,y) = \mathrm{M}^*(y,x)$), T — задане дійсне число. *Задача оптимального керування об'єктом, що описується системою співвідношень* (3)—(5), полягає в знаходженні такого керування $u^0(t,x)$, на якому функціонал (6) приймає найменше значення. Якщо таке керування $u^0(t,x)$ існує, то воно називається *оптимальним керуванням.*

3. Виведення рівнянь Ейлера — Лагранжа

У переважній більшості для знаходження розв'язків задач оптимального керування як і у випадку систем із зосередженими параметрами, так і у випадку систем з розподіленими параметрами, використовують *принцип максимуму Л. С. Понтрягина* [13, с. 183] або *метод динамічного програмування Р. Беллмана* [11, с. 291]. Для застосування обох цих методів необхідно, щоб система рівнянь, яка описує поведінку об'єкта керування, була розв'язана відносно похідних за часом. У випадку сингулярних систем такої можливості нема. Однак можна скористатися *методом множників Лагранжа* [13, с. 31]. Суть методу полягає в тому, що замість функціонала (6) розглядаємо наступний функціонал

$$J(z,\frac{\partial z}{\partial t},\frac{\partial z}{\partial x},p,u) = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l z^*(T,x)M(x,y)z(T,y)\,dy\,dx +$$

$$+\int_0^T\int_0^l \left\{ \frac{1}{2}\left[\int_0^l z^*(t,x)F(x,y)z(t,y)dy + u^*(t,x)Gu(t,x) \right] + \right. \tag{7}$$

$$\left. +p^*(x,t)\left[\mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{z}(x,t)}{\partial x} + \mathrm{Bz}(x,t) + \mathrm{Du}(x,t) - \mathrm{C}\frac{\partial \mathrm{z}(x,t)}{\partial t} \right] \right\} dxdt,$$

де $p(t,x)$ — невідома $n \times 1$ вектор-функція. Очевидно, що при виконанні співвідношень (1) значення функціоналів (6) і (7) співпадають. Тому задача на умовний екстремум для функціонала (6) зводиться до задачі на безумовний екстремум для функціонала (7). Далі знаходимо вираз для приросту функціонала (7):

$$\Delta J = J(z+\varepsilon\delta z, \frac{\partial z}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial \delta z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial \delta z}{\partial x}, p+\varepsilon\delta p, u+\varepsilon\delta u) - J(z, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial x}, p, u).$$

Очевидно, маємо:

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \left[z^*(T,x)+\varepsilon\delta z^*(T,x)\right]M\,(x,y)\left[z(T,y)+\varepsilon\delta z(T,y)\right]dy\,dx +$$

$$+\int_0^T\int_0^l \left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^l \left[\mathrm{z}^*(t,x)+\varepsilon\delta \mathrm{z}^*(t,x)\right]\mathrm{F}(x,y)\left[\mathrm{z}(t,y)+\varepsilon\delta \mathrm{z}(t,y)\right]dy +\right.\right.$$

$$\left.+\left[u^*(t,x)+\varepsilon\delta u^*(t,x)\right]\mathrm{G}\left[u(t,x)+\varepsilon\delta u(t,x)\right]\right]+$$

$$+\left[p^*(t,x)+\varepsilon\delta p^*(t,x)\right]\left[\mathrm{A}\left(\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial x}\right)+\right.$$

$$+\mathrm{B}\left[z(t,x)+\varepsilon\delta z(t,x)\right]+\mathrm{D}\left[u(t,x)+\varepsilon\delta u(t,x)\right]-$$

$$\left.\left.-\mathrm{C}\left(\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial \delta z(x,t)}{\partial t}\right)\right]\right\}dxdt - \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l z^*(T,x)M(x,y)z(T,y)\,dy\,dx$$

$$-\int_0^T\int_0^l \left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^l z^*(t,x)\mathrm{F}(x,y)z(t,y)\,dy + u^*(t,x)\mathrm{G}\,u(t,x)\right]+\right.$$

$$\left.+p^*(x,t)\left[\mathrm{A}\frac{\partial z(x,t)}{\partial x}+\mathrm{B}\,z(x,t)+\mathrm{D}\,u(x,t)-\mathrm{C}\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}\right]\right\}dxdt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l\int_0^l \left[z^*(T,x)M(x,y)\delta z(T,y)+\delta z^*(T,x)M(x,y)z(T,y)\right]dy\,dx +$$

$$+\varepsilon\left\{\int_0^T\int_0^l \left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^l \left[\mathrm{z}^*(t,x)\mathrm{F}(x,y)\delta \mathrm{z}(t,y)+\delta \mathrm{z}^*(t,x)\mathrm{F}(x,y)\mathrm{z}(t,y)\right]dy +\right.\right.\right.$$

$$\left.+\delta u^*(t,x)\mathrm{G}\,u(t,x)+u^*(t,x)\mathrm{G}\,\delta u(t,x)\right]+$$

$$+p^*(t,x)\left[\mathrm{A}\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial x}+\mathrm{B}\,\delta z(t,x)+\mathrm{D}\,\delta u(t,x)-\right.$$

$$\left.-\mathrm{C}\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial t}\right]+\delta p^*(t,x)\left[\mathrm{A}\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}+\mathrm{B}\,z(t,x)+\right.$$

$$+\delta p^*(t,x)\left[\mathrm{A}\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}+\mathrm{B}\,z(t,x)+\mathrm{D}\,u(t,x)-\mathrm{C}\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\right]dxdt\}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\int_0^l \delta z^*(T,x)\mathrm{M}(x,y)\delta z(T,y)\,dy\,dx+$$

$$+\varepsilon^2\int_0^T\int_0^l\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^l \delta z^*(t,x)\mathrm{F}(x,y)\delta z(t,y)\,dy+\delta u^*(t,x)\mathrm{G}\,\delta u(t,x)\right]+\right.$$

$$\left.+\delta p^*(t,x)\left[\mathrm{A}\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial x}+\mathrm{B}\,\delta z(t,x)+\mathrm{D}\,\delta u(t,x)-\mathrm{C}\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial t}\right]\right\}dxdt\,.$$

Очевидно, що

$$\delta z(0,x)=z_0(x)-z_0(x)=0\,,\ \delta z(t,0)=f(t)-f(t)=0$$

$$\delta\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial t}\,,\ \delta\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial x}\,.$$

Далі маємо наступні співвідношення:

$$\int_0^l\int_0^l\left[z^*(t,x)\mathrm{F}(x,y)\delta z(t,y)+\delta z^*(t,x)\mathrm{F}(x,y)z(t,y)\right]dy\,dx=$$
$$=2\int_0^l\int_0^l z^*(t,y)\,\mathrm{F}^*(x,y)\delta z(t,x)\,dy\,dx, \tag{8}$$

$$\int_0^l\int_0^l\left[z^*(T,x)\mathrm{M}(x,y)\delta z(T,y)+\delta z^*(T,x)\mathrm{M}(x,y)z(T,y)\right]dy\,dx=$$
$$=2\int_0^l\int_0^l \mathrm{z}^*(T,y)\mathrm{M}^*(x,y)\delta \mathrm{z}(T,x)\,dy\,dx, \tag{9}$$

$$\delta u^*(t,x)\mathrm{G}\,u(t,x)+u^*(t,x)\mathrm{G}\,\delta u(t,x)=2u^*(t,x)\mathrm{G}\,\delta u(t,x)\,, \tag{10}$$

$$\mathrm{A}\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial x}+\mathrm{B}\,\delta z(t,x)+\mathrm{D}\,\delta u(t,x)-\mathrm{C}\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial t}=0\,, \tag{11}$$

$$\int_0^T\int_0^l p^*(t,x)\mathrm{C}\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial t}\,dx\,dt=\int_0^l p^*(t,T)\mathrm{C}\,\delta z(T,x)\,dx-$$
$$-\int_0^l p^*(0,x)\mathrm{C}\,\delta z(0,x)\,dx-\int_0^T\int_0^l\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t}\mathrm{C}\,\delta z(t,x)\,dx\,dt= \tag{12}$$
$$=\int_0^l p^*(T,x)\mathrm{C}\,\delta z(T,x)\,dx-\int_0^T\int_0^l\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t}\mathrm{C}\,\delta z(t,x)\,dx\,dt\,.$$

$$\int_0^l p^*(t,x)\,\mathrm{A}\frac{\partial \delta z(t,x)}{\partial x}dx = p^*(t,l)\,\mathrm{A}\,\delta z(t,l) - p^*(t,0)\,\mathrm{A}\,\delta z(t,0) - \\ -\int_0^l \frac{\partial p^*(t,x)}{\partial x}\mathrm{A}\,\delta z(t,x)\,dx = -\int_0^l \frac{\partial p^*(t,x)}{\partial x}\mathrm{A}\,\delta z(t,x)\,dx. \tag{13}$$

$$\int_0^l\int_0^l \mathrm{z}^*(T,x)\mathrm{M}(x,y)\delta\mathrm{z}(T,y)\,dy\,dx = \\ = \int_0^l\int_0^l \mathrm{z}^*(T,x)\mathrm{M}(x,y)\delta\mathrm{z}(T,y)\,dxdy = \\ = \int_0^l\int_0^l \mathrm{z}^*(T,y)\mathrm{M}(y,x)\delta\mathrm{z}(T,x)\,dydx. \tag{14}$$

Беручи до уваги співвідношення (8)—(14), далі отримаємо:

$$\Delta J = \varepsilon\int_0^l\left[\int_0^l \mathrm{z}^*(T,y)\mathrm{M}^*(x,y)\,dy - \mathrm{p}^*(T,x)\mathrm{C}\right]\delta\mathrm{z}(T,x)\,dx + \\ +\varepsilon\int_0^T\int_0^l\left\{\left[\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t}\mathrm{C} - \frac{\partial p^*(t,x)}{\partial x}\mathrm{A} + p^*(t,x)\mathrm{B} + \right.\right. \\ \left. +\int_0^l z^*(t,y)\mathrm{F}^*(x,y)\,dy\right]\delta z(t,x) + \left[u^*(t,x)\mathrm{G} + p^*(t,x)\mathrm{D}\right]\delta u(t,x) + \\ \left. +\delta p^*(t,x)\left[\mathrm{A}\frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + \mathrm{B}z(t,x) + \mathrm{D}u(t,x) - \mathrm{C}\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\right]\right\}dx\,dt + \\ +\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\int_0^l \delta\mathrm{z}^*(T,x)\mathrm{M}(x,y)\delta\mathrm{z}(T,y)\,dy\,dx + \\ +\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\int_0^l\left[\int_0^l \delta\mathrm{z}^*(t,x)\mathrm{F}(x,y)\delta\mathrm{z}(t,y)\,dy + \delta\mathrm{u}^*(t,x)\mathrm{G}\delta\mathrm{u}(t,x)\right]dx\,dt. \tag{15}$$

Отриманий вираз (15) для ΔJ дає можливість сформулювати таке твердження.

Теорема 1. Єдине оптимальне керування $u^0(t,x)$, на якому реалізується мінімум функціонала (6), визначається із співвідношень

$$\begin{cases} \mathrm{C}\dfrac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \mathrm{A}\dfrac{\partial z(t,x)}{\partial x} + \mathrm{B}z(t,x) + \mathrm{D}u(t,x), \\ z(0,x) = z_0(x),\ z(t,0) = f(t), \\ \mathrm{C}^* \dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \mathrm{A}^* \dfrac{\partial p(t,x)}{\partial x} - \mathrm{B}^* p(t,x) - \int\limits_0^l F(x,y) z(t,y)\,dy, \\ \mathrm{C}^* p(T,x) = \int\limits_0^l M(x,y) z(T,y)\,dy,\ p(t,0) = p(t,l) = 0, \\ \mathrm{G}\, u(t,x) + \mathrm{D}^* p(t,x) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

де символ A^* означає транспоновану матрицю A. Аналогічно позначаються транспоновані матриці B, C і D.

Доведення. Коефіцієнт при ε у співвідношенні (8) — це перша варіація функціонала (7), при ε^2 — його друга варіація, помножена на 0,5. Необхідна умова екстремуму функціонала (7) — це рівність нулю його першої варіації. Це можливо, коли вирази при $\delta z(t,x), \delta z(T,x), \delta p^*(x,t), \delta u(x,t)$ дорівнюють нулю одночасно. Таким чином отримуємо систему рівнянь (16). Ця система рівнянь називається рівняннями Ейлера—Лагранжа. Оскільки

$$\delta^2 J = \int\limits_0^l \int\limits_0^l \delta \mathrm{z}^*(T,x) \mathrm{M}(x,y) \delta \mathrm{z}(T,y)\,dy\,dx +$$

$$+\int\limits_0^T \int\limits_0^l \left[\int\limits_0^l \delta z^*(t,x) \mathrm{F}(x,y) \delta z(t,y)\,dy + \delta u^*(t,x) \mathrm{G}\, \delta u(t,x) \right] dx\,dt \ ,$$

то з додатної визначеності матриці G та невід'ємної визначеності матриць $\mathrm{F}(x,y)$ і $\mathrm{M}(x,y)$ маємо $\delta^2 J > 0$. Це означає, що керування $u(t,x)$ реалізує мінімум функціонала (7), а отже, і функціонала (6). Доведення єдиності оптимального керування випливає із таких міркувань. Припустимо, що існує керування $\bar{u}(t,x) = u(t,x) + \delta u(t,x)$, на якому також реалізується мінімум функціонала (7). Тоді приріст (8) дорівнює нулю. Оскільки в цьому випадку $\delta J = 0$, то тоді також і $\delta^2 J = 0$. Остання рівність можлива в тому випадку, коли $\delta u(t,x) = 0$ і $\delta z(t,x) = 0$. Звідси випливає, що $\bar{u}(t,x) = u(t,x)$.

4. Виведення матричного інтегро-диференціального рівняння Ріккаті

Із останнього рівняння системи (16) виражаємо $u(t,x)$ через $p(t,x)$ ($u(t,x) = -G^{-1}D^* p(t,x)$) і підставляємо в перше рівняння. В результаті отримаємо двоточкову крайову задачу для системи двох диференціальних рівнянь з частинними похідними, де невідомими є вектор-функції $z(t,x)$ і $p(t,x)$:

$$\begin{cases} \mathrm{C}\dfrac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \mathrm{A}\dfrac{\partial z(t,x)}{\partial x} + \mathrm{B}\,z(t,x) - \mathrm{DG}^{-1}\,\mathrm{D}^*\,p(t,x), \\ z(0,x) = z_0(x),\ z(t,0) = g(t),\ z(t,l) = h(t), \\ \mathrm{C}^*\,\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \mathrm{A}^*\,\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial x} - \mathrm{B}^*\,p(t,x) - \displaystyle\int_0^l \mathrm{F}(x,y)\,z(t,y)\,dy, \\ \mathrm{C}^*\,p(T,x) = \displaystyle\int_0^l \mathrm{M}(x,y)\,z(T,y)\,dy,\ p(t,0) = p(t,l) = 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Враховуючи рівність

$$\mathrm{C}^*\,p(T,x) = \int_0^l \mathrm{M}(x,y)\,z(T,y)\,dy,$$

вважаємо, що має місце наступна залежність

$$p(t,x) = \int_0^l \mathrm{R}(t,x,y)\,\mathrm{C}\,z(t,y)\,dy, \qquad (18)$$

де $\mathrm{R}(t,x,y)$ — невідома матричнозначна функція. Із (18), враховуючи перше рівняння системи (17), отримаємо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t,x)}{\partial t} &= \int_0^l \left[\frac{\partial R(t,x,y)}{\partial t}\mathrm{C}\,z(t,y) + \mathrm{R}(t,x,y)\,\mathrm{C}\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} \right] dy = \\ &= \int_0^l \left[\frac{\partial\,\mathrm{R}(t,x,y)}{\partial t}\mathrm{C}\,z(t,y) + \mathrm{R}(t,x,y)\,\mathrm{C}\frac{\partial z(t,y)}{\partial t} \right] dy = \\ &= \int_0^l \left[\frac{\partial\,\mathrm{R}(t,x,y)}{\partial t}\mathrm{C}\,z(t,y) + \mathrm{R}(t,x,y)\,\mathrm{A}\frac{\partial z(t,y)}{\partial y} + \right. \\ &\left. \mathrm{R}(t,x,y)\,\mathrm{B}\,\mathrm{z}(t,y) - \mathrm{R}(t,x,y)\,\mathrm{DG}^{-1}\mathrm{D}^*\int_0^l \mathrm{R}(t,y,\lambda)\,\mathrm{Cz}(t,\lambda)\,d\lambda \right] dy. \end{aligned} \qquad (19)$$

Оскільки

$$\int_0^l \mathrm{R}(t,x,y)\,\mathrm{A}\,\frac{\partial z(t,y)}{\partial y}dy = \mathrm{R}(t,x,l)\,\mathrm{A}\,z(t,l) - \mathrm{R}(t,x,0)\,\mathrm{A}\,z(t,0) -$$

$$-\int_0^l \frac{\partial\,\mathrm{R}(t,x,y)}{\partial y}\mathrm{A}\,z(t,y)\,dy = -\int_0^l \frac{\partial\,\mathrm{R}(t,x,y)}{\partial y}\mathrm{A}\,z(t,y)\,dy\,,$$

якщо $\mathrm{R}(t,x,l)=0,\ \mathrm{R}(t,x,0)=0$. Із міркувань симетрії вважаємо, що також мають місце рівності $\mathrm{R}(t,l,y)=0,\ \mathrm{R}(t,0,y)=0$. Крім того,

$$\int_0^l\int_0^l \mathrm{R}(t,x,y)\mathrm{DG}^{-1}\mathrm{D}^*\mathrm{R}(t,y,\lambda)\mathrm{C}z(t,\lambda)\,d\lambda\,dy =$$

$$= \int_0^l\int_0^l \mathrm{R}(t,x,y)\mathrm{DG}^{-1}\,\mathrm{D}^*\,\mathrm{R}(t,y,\lambda)\mathrm{C}\,z(t,\lambda)\,dy\,d\lambda =$$

$$= \int_0^l\int_0^l \mathrm{R}(t,x,\lambda)\mathrm{DG}^{-1}\,\mathrm{D}^*\,\mathrm{R}(t,\lambda,y)\mathrm{C}\,z(t,y)\,d\lambda\,dy\,.$$

Тому рівність (19) після множення зліва на матрицю C^* матиме вигляд

$$\mathrm{C}^*\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \int_0^l\Bigg[\mathrm{C}^*\frac{\partial\mathrm{R}(t,x,y)}{\partial t}\mathrm{C} - \mathrm{C}^*\frac{\partial\mathrm{R}(t,x,y)}{\partial y}\mathrm{A} + \mathrm{C}^*\mathrm{R}(t,x,y)\mathrm{B} -$$

$$-\int_0^l \mathrm{C}^*\mathrm{R}(t,x,\lambda)\mathrm{DG}^{-1}\mathrm{D}^*\mathrm{R}(t,\lambda,y)\mathrm{C}\,d\lambda\Bigg]\mathrm{z}(t,y)\,dy. \tag{20}$$

З іншого боку, на підставі другого рівняння системи (17), маємо

$$\mathrm{C}^*\frac{\partial \mathrm{p}(t,x)}{\partial t} = \int_0^l\left[\mathrm{A}^*\frac{\partial\mathrm{R}(t,x,y)}{\partial x}\mathrm{C} - \mathrm{B}^*\mathrm{R}(t,x,y)\mathrm{C} - \mathrm{F}(x,y)\right]z(t,y)\,dy\,.$$

Порівнюючи останню рівність і рівність (20), знаходимо

$$\int_0^l\Bigg[\mathrm{C}^*\frac{\partial\mathrm{R}(t,x,y)}{\partial t}\mathrm{C} - \mathrm{A}^*\frac{\partial\mathrm{R}(t,x,y)}{\partial x}\mathrm{C} - \mathrm{C}^*\frac{\partial\mathrm{R}(t,x,y)}{\partial y}\mathrm{A} +$$

$$+\mathrm{C}^*\mathrm{R}(t,x,y)\mathrm{B} + \mathrm{B}^*\mathrm{R}(t,x,y)\mathrm{C} + \mathrm{F}(x,y) -$$

$$-\int_0^l \mathrm{C}^*\mathrm{R}(t,x,\lambda)\mathrm{DG}^{-1}\mathrm{D}^*\mathrm{R}(t,\lambda,y)\mathrm{C}\,d\lambda\Bigg]z(t,y)\,dy\,.$$

Звідси робимо висновок, що функція $\mathrm{R}(t,x,y)$ повинна бути розв'язком рівняння

$$\mathrm{C}^* \frac{\partial \mathrm{R}(t,x,y)}{\partial t}\mathrm{C} = \mathrm{A}^* \frac{\partial \mathrm{R}(t,x,y)}{\partial x}\mathrm{C} + \mathrm{C}^* \frac{\partial \mathrm{R}(t,x,y)}{\partial y}\mathrm{A} +$$
$$+\int_0^l \mathrm{C}^*\mathrm{R}(t,x,\lambda)\mathrm{D}\mathrm{G}^{-1}\mathrm{D}^*\mathrm{R}(t,\lambda,y)\mathrm{C}\,d\lambda - \tag{21}$$
$$-\mathrm{C}^*\mathrm{R}(t,x,y)\mathrm{B} - \mathrm{B}^*\mathrm{R}(t,x,y)\mathrm{C} - \mathrm{F}(x,y).$$

Також ця функція задовольняє наступним додатковим умовам:

$$\begin{gathered}\mathrm{R}(t,l,y)=0, \mathrm{R}(t,0,y)=0,\ \mathrm{R}(t,x,l)=0,\ \mathrm{R}(t,x,0)=0,\\ \mathrm{C}^*\mathrm{R}(T,x,y)\mathrm{C}=\mathrm{M}(x,y).\end{gathered} \tag{22}$$

Теорема 2. Єдине оптимальне керування $u^0(t,x)$ має вигляд $u^0(t,x) = -\mathrm{G}^{-1}\mathrm{D}^*\mathrm{p}(t,x)$, де функція $p(t,x)$ пов'язана із станом $z(t,y)$ співвідношенням (18), а функція $\mathrm{R}(t,x,y)$ є розв'язком рівняння (21) і задовольняє умовам (22).

5. Висновки

Розглянута задача мінімізації квадратичного функціонала на розв'язках лінійної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Постановка та методи розв'язування задач оптимального керування завжди є актуальними, оскільки вони мають чітко виражений прикладний характер. У статті отримано необхідні умови оптимальності в формі системи рівнянь Ейлера-Лагранжа та матричне інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті з частинними похідними, відомий розв'язок якого дозволяє побудувати оптимальне керування в замкненій формі. В перспективі актуальними є вивчення властивостей цього рівняння та побудова алгоритмів для знаходження його наближених розв'язків.

Список використаних джерел:

1. Бормотова О. В. О методах численного решения и исследования систем не типа Коши—Ковалевской / О. В. Бормотова, В. Ф. Чистяков // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2004. — Т. 44, № 8. — С. 1380–1387.
2. Бормотова О. В. О разрешимости вырожденных систем дифференциальных уравнений в частных производных / О. В. Бормотова, С. В. Гайдомак, В. Ф. Чистяков // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 4 (515). — С. 18–29.
3. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. — Новосибирск : Наука, 1980. — 222 с.
4. Бояринцев Ю. Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. — Новосибирск : Наука, 1988. — 158 с.

5. Бояринцев Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев. — Новосибирск : Наука, 2000. — 223 с.
6. Бояринцев Ю. Е. Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев, И. В. Орлова. — Новосибирск : Наука, 2006. — 124 с.
7. Бояринцев Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. — Новосибирск : Наука, 1998. — 224 с.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1975. — 576 с.
9. Демиденко Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск : Научная книга, 1998. — 436 с.
10. Лузин Н. Н. К изучению матричной системы теории дифференциальных уравнений / Н. Н. Лузин // Автоматика и телемеханика. — 1940. — № 5. — С. 4–66.
11. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К. А. Лурье. — М. : Наука, 1975. — 480 с.
12. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. — К. : Вища школа, 2000. — 204 с.
13. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов. — М. : Наука, 1977. — 480 с.
14. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу ; пер. с англ. — М. : Мир, 1985. — 384 с.
15. Чистяков В. Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. — Новосибирск : Наука, 2003. — 320 с.
16. Ascher R. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations / R. Ascher, L. Petzold. — USA, Philadelphia, 1998. — 314 p.
17. Campbell S. L. Singular system of differential equations. Research Notes in Math. / S. L. Campbell. — San Francisco : Pitman, 1980. — № 40. — 176 p.
18. Campbell S. L. Singular system of differential equations. II. Research Notes in Math. / S. L. Campbell. — San Francisco : Pitman, 1982. — № 61. — 234 p.
19. Dai L. Singular control systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences / L. Dai. – Berlin : Heidelberg ; N. Y. : Springer Verlag, 1989. — № 118. — 332 p.
20. Kunkel P. Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution / P. Kunkel, V. Mehrmann. — Printed in Germany, 2006. — 377 p.

In this paper the problem of optimal control by the linear singular system with distributed parameters and quadratic functional is considered. Using Lagrange multiplier method the Euler—Lagrange equations are obtained. For investigation of these equations the matrix integrodifferential equation Riccati is derived. The uniqueness of optimal control also is proved.

Key words: *optimal control, quadratic functional, singular system of linear partial differential equations, Lagrange multiplier method, Euler-Lagrange equations, matrix integrodifferential Riccati equation.*

Отримано: 26.03.2012