российской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». — Самара : Изд-во СамГТУ, 2006. — Часть 3. — С. 221–223.
5. Кобильська О. Б. Дослідження нелокальної задачі для рівняння параболічного типу з інтегральною умовою / О. Б. Кобильська // Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, Харків, 8–11 листопада 2010 р. — Харків : Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 2010. — С. 32.
6. Ляшенко В. П. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою / В. П. Ляшенко, О. Б. Кобильська // Вісник Київського університету. Серія «Фізико-математичні науки». — 2010. — № 4. — С. 104–111.
7. Никитенко Н. И. Теория тепломассопереноса / Н. И. Никитенко. — К. : Наукова думка, 1983. — 352 с.

In this study involving nonlocal integral conditions resolved inverse problem for the equation-thermal conductivity of the Hall. Calculated parameters control the temperature field moving environment, the results of numericaltion experiments. Plotting temperature distribution diliv and distribution parameters.

Key words: *heat equation, integral condition inverse problem.*

Отримано: 9.04.2012

УДК 517.947

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В ОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ ОБЛАСТЯХ

Методом функції впливу та функцій Гріна (головних розв'язків) побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру гіперболічних крайових задач в обмежених кусково-однорідних (багатошарових) просторових областях. Для побудови головних розв'язків залучено відповідні інтегральні перетворення Фур'є на декартових осі та півосі, а також інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті з n точками спряження.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки та техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність в неї кутових точок тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчені властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [1—5].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6—9].

Окрім методу відокремлення змінних [10] одним з важливих і ефективних методів вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших лінійних крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породженні гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [11—16].

Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених (двоскладових і тришарових) та напівобмежених кусково-однорідних просторових областях одержано у працях автора [17—21].

У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в обмежених кусково-однорідних просторових областях.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині $D_3 = \{(t,x,y,z); t>0; (x,y)\in\Omega_2 = \langle a;b\rangle\times\langle c;d\rangle;$

$$z\in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathrm{I}_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1}\left(l_{j-1};l_j\right),\, l_0\ge 0;\, l_{j-1}<l_j,\, l_{n+1}=l<+\infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь [10]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-\left[a_{xj}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j+\chi_j^2 u_j=f_j\left(t,x,y,z\right);\qquad (1)$$
$$z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j\Big|_{t=0}=g_j^1\left(x,y,z\right);\ \frac{\partial u_j}{\partial t}\bigg|_{t=0}=g_j^2\ \left(x,y,z\right);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1};\qquad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)u_1\bigg|_{z=l_0}=g_0\left(t,x,y\right);\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1}\bigg|_{z=l}=g_l\left(t,x,y\right);\quad (3)$$

умовами спряження [16]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\bigg|_{z=l_k}=0;\ j=1,2;\ k=\overline{1,n}\quad (4)$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2, де a_{xj}, a_{yj}, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k — деякі невід'ємні сталі; $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\neq 0;$

$$c_{1k}c_{2k}>0;\left|\alpha_{11}^0\right|+\left|\beta_{11}^0\right|\neq 0;\quad \left|\alpha_{22}^{n+1}\right|+\left|\beta_{22}^{n+1}\right|\neq 0; f\left(t,x,y,z\right)=$$
$$=\left\{f_1\left(t,x,y,z\right),\ f_2\left(t,x,y,z\right),\ldots,\ f_{n+1}\left(t,x,y,z\right)\right\};\ \ g^1\left(x,y,z\right)=$$
$$=\left\{g_1^1\left(x,y,z\right),\ g_2^1\left(x,y,z\right),\ \ldots,\ g_{n+1}^1\left(x,y,z\right)\right\};\ g^2\left(x,y,z\right)=$$
$$=\left\{g_1^2\left(x,y,z\right),\ g_2^2\left(x,y,z\right),\ldots,\ g_{n+1}^1\left(x,y,z\right)\right\};$$

$g_0\left(t,x,y\right), g_l\left(t,x,y\right)$ — задані обмежені неперервні функції; $u\left(t,x,y,z\right)=\left\{u_1\left(t,x,y,z\right),\quad u_2\left(t,x,y,z\right),\ldots,u_{n+1}\left(t,x,y,z\right)\right\}$ — шукана функція.

Основна частина. Побудуємо розв'язок розглянутої задачі в залежності від структури області Ω_2.

1. $\Omega_2=\left(-\infty;+\infty\right)\times\left(-\infty;+\infty\right)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial x^k}\bigg|_{x=\pm\infty}=0;\ k=0,1;\ j=\overline{1,n+1}\qquad (5)$$

щодо змінної *x* та крайові умови

$$\left.\frac{\partial^k u_j}{\partial y^k}\right|_{y=\pm\infty} = 0;\ k = 0,1;\ j = \overline{1, n+1} \tag{6}$$

щодо змінної y.

Припустимо, що розв’язок задачі (1)—(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [22; 16].

До задачі (1)—(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур’є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної x [21]:

$$F_x\left[g(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-i\sigma x} dx \equiv \tilde{g}(\sigma), \tag{7}$$

$$F_x^{-1}\left[\tilde{g}(\sigma)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \equiv g(x), \tag{8}$$

$$F_x\left[\frac{d^2 g}{dx^2}\right] = -\sigma^2 F_x\left[g(x)\right] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \tag{9}$$

Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)—(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D_3' = \left\{(t, y, z);\ t > 0;\ y \in (-\infty : +\infty);\ z \in K_n^+\right\}$$

розв’язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} - \left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{u}_j + \left(a_{xj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2\right)\tilde{u}_j = \tilde{f}_j(t, \sigma, y, z); z \in \mathrm{I}_j \tag{10}$$

з початковими умовами

$$\left.\tilde{u}_j\right|_{t=0} = \tilde{g}_j^1(\sigma, y, z),\ \left.\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}\right|_{t=0} = \tilde{g}_j^2(\sigma, y, z); z \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1, n+1}; \tag{11}$$

крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{u}_1\right|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t, \sigma, y); \left.\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{u}_{n+1}\right|_{z=l} = g_l(t, \sigma, y) \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial^k \tilde{u}_j}{\partial y^k}\right|_{y=\pm\infty} = 0;\ k = 0,1;\ j = \overline{1, n+1} \tag{13}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right)\tilde{u}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right)\tilde{u}_{k+1}\right]\right|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n};\ j = 1, 2. \tag{14}$$

До задачі (10)—(14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної у [20]:

$$F_y\left[g(y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-isy}dy\equiv\tilde{g}(s), \tag{15}$$

$$F_y^{-1}\left[\tilde{g}(s)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(s)e^{isy}ds\equiv g(y), \tag{16}$$

$$F_y\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-s^2F_y\left[g(y)\right]\equiv -s^2\tilde{g}(s). \tag{17}$$

Інтегральний оператор F_y за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)—(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3''=\left\{(t,z);\, t>0;\, z\in K_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2\tilde{\tilde{u}}_j}{\partial t^2}-a_{zj}^2\frac{\partial^2\tilde{\tilde{u}}_j}{\partial z^2}+\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2\right)\tilde{\tilde{u}}_j=\tilde{\tilde{f}}_j\left(t,\sigma,s,z\right);\; z\in \mathrm{I}_j \tag{18}$$

з початковими умовами

$$\tilde{\tilde{u}}_j\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}_j^1\left(\sigma,s,z\right),\; \frac{\partial\tilde{\tilde{u}}_j}{\partial t}\Bigg|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}_j^2\left(\sigma,s,z\right);\; z\in \mathrm{I}_j;\; j=\overline{1,n+1}; \tag{19}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde{\tilde{u}}_1\Bigg|_{z=l_0}=\tilde{\tilde{g}}_0\left(t,\sigma,s\right);\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{\tilde{u}}_{n+1}\Bigg|_{z=l}=\tilde{\tilde{g}}_l\left(t,\sigma,s\right) \tag{20}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)\tilde{\tilde{u}}_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)\tilde{\tilde{u}}_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k}=0;k=\overline{1,n};\, j=1,2. \tag{21}$$

До задачі (18)—(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0;l]$ з n точками спряження щодо змінної z [16]:

$$F_{jn}\left[g(z)\right]=\int_{l_0}^{l}g(z)V\left(z,\lambda_j\right)\sigma(z)dz\equiv g_j, \tag{22}$$

$$F_{jn}^{-1}\left[g_j\right]=\sum_{j=1}^{\infty}g_j\frac{V\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\equiv g(z), \tag{23}$$

$$F_{jn}\left[\sum_{i=1}^{n+1} a_{zi}^2 \theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z)\frac{d^2 g}{dz^2}\right] = -\lambda_j^2 g_j - \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} g(z) V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz -$$

$$-a_{z1}^2 \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1(l_0,\lambda_j)\left(\alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g\right)\Bigg|_{z=l_0} + \qquad (24)$$

$$+a_{z,n+1}^2 \sigma_{n+1} \left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}(l,\lambda_j)\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g\right)\Bigg|_{z=l}.$$

У формулах (22)—(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\lambda_j) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i(z,\lambda_j)\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z);$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z); \sigma_k = \frac{a_{z,k+1}}{a_{zk}^2}\prod_{m=k}^{n} c_{1m}c_{2m}; \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{z,k+1}};$$

$$k=\overline{1,n}; V_m(z,\lambda_j) = \prod_{i=m}^{n} c_{2i} q_{i+1,j} G_m(z,\lambda_j); m=\overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\lambda_j) = \omega_{n2}(\lambda_j)\cos(q_{n+1,j}z) - \omega_{n1}(\lambda_j)\sin(q_{n+1,j}z);$$

$$G_m(z,\lambda_j) = \omega_{m-1,2}(\lambda_j)\cos(q_{mj}z) - \omega_{m-1,1}(\lambda_j)\sin(q_{mj}z);$$

$$\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2 = \int_{l_0}^{l} V^2(z,\lambda_j)\sigma(z)dz = \sum_{k=1}^{n+1}\int_{l_{k-1}}^{l_k} V_k^2(z,\lambda_j)\sigma_k dz;$$

$$q_s \equiv q_s(\lambda) = q_{z,s}^{-1}\left(\lambda^2 + k_s^2\right)^{1/2}; g_{sj} = g_s(\lambda_j);$$

$$v_{ip}^{k1}(q_{sj}l_m) = -\alpha_{ip}^k q_{sj}\sin(q_{sj}l_m) + \beta_{ip}^k \cos(q_{sj}l_m);$$

$$v_{ip}^{k2}(q_{sj}l_m) = \alpha_{ip}^k q_{sj}\cos(q_{sj}l_m) + \beta_{ip}^k \sin(q_{sj}l_m);$$

$$\omega_{01}(\lambda_j) = v_{11}^{01}(q_{1j}l_0); \omega_{02}(\lambda_j) = v_{11}^{02}(q_{1j}l_0);$$

$$\psi_{pm}^k(x,y) = v_{11}^{kp}(x)v_{22}^{km}(y) - v_{21}^{kp}(x)v_{12}^{km}(y);$$

$$\omega_{pm}(\lambda_j) = \omega_{p-1,2}(\lambda_j)\psi_{1m}^p(q_{pj}l_p, q_{p+1,j}l_p) - \omega_{p-1,1}(\lambda_j)\psi_{2m}^p(q_{pj}l_p, q_{p+1,j}l_p);$$

λ_j — корені трансцендентного рівняння

$$\Delta_n(\lambda) \equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1}l)\omega_{n1}(\lambda) - v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1}l)\omega_{n2} = 0,$$

які утворюють дискретний спектр; $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2_{z1}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{u}}_1(t,\sigma,s,z) \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2_{z2}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{u}}_2(t,\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2_{z,n+1}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{u}}_{n+1}(t,\sigma,s,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{f}}_1(t,\sigma,s,z) \\ \tilde{\tilde{f}}_2(t,\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{f}}_{n+1}(t,\sigma,s,z) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{u}}_1(t,\sigma,s,z) \\ \tilde{\tilde{u}}_2(t,\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{u}}_{n+1}(t,\sigma,s,z) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{g}}_1^1(\sigma,s,z) \\ \tilde{\tilde{g}}_2^1(\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{g}}_{n+1}^1(\sigma,s,z) \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{u}}_1(t,\sigma,s,z) \\ \tilde{\tilde{u}}_2(t,\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{u}}_{n+1}(t,\sigma,s,z) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{g}}_1^2(\sigma,s,z) \\ \tilde{\tilde{g}}_2^2(\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{g}}_{n+1}^2(\sigma,s,z) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де

$$q_j^2(\sigma,s) = a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2;\ j = \overline{1, n+1}.$$

Інтегральний оператор F_{jn}, який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z,\lambda_j)\sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z,\lambda_j)\sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{l} \dots V_{n+1}(z,\lambda_j)\sigma_{n+1} dz\right] \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_j^2 + q_i^2(\sigma,s) + k_i^2\right)\tilde{\tilde{u}}_{ij}(t,\sigma,s) = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{f}}_{ij}(t,\sigma,s) - \sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} \times$$
$$\times V_1(l_0,\lambda_j)\,\tilde{\tilde{g}}_0(t,\sigma,s) + \sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}(l,\lambda_j)\,\tilde{\tilde{g}}_l(t,\sigma,s), \quad (28)$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{ij}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{ij}^1(\sigma,s),\ \left.\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{ij}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{ij}^2(\sigma,s), \quad (29)$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{ij}\left(t,\sigma,s\right)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{\tilde{u}}_i\left(t,\sigma,s,z\right)V_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_i dz; i=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{\tilde{f}}_{ij}\left(t,\sigma,s\right)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{\tilde{f}}_i\left(t,\sigma,s,z\right)V_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_i dz; i=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{ij}^1\left(\sigma,s\right)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{\tilde{g}}_i^1\left(\sigma,s,z\right)V_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_i dz; i=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{ij}^2\left(\sigma,s\right)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{\tilde{g}}_i^2\left(\sigma,s,z\right)V_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_i dz; i=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{q_1^2,q_2^2,\ldots\right.$ $\left.\ldots q_{n+1}^2\right\}=q_1^2$ і покладемо всюди $k_i^2=q_1^2-q_i^2\ \left(i=\overline{1,n+1}\right)$. Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_j}{dt^2}+\Delta^2\left(\sigma,s,\lambda_j\right)\tilde{\tilde{u}}_j=\tilde{\tilde{f}}_j\left(t,\sigma,s\right)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\times$$
$$\times\tilde{\tilde{g}}_0\left(t,\sigma,s\right)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\tilde{\tilde{g}}_l\left(t,\sigma,s\right), \tag{30}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_j\left(t,\sigma,s\right)\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}_j^1\left(\sigma,s\right);\left.\frac{d\tilde{\tilde{u}}_j}{dt}\right|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}_j^2\left(\sigma,s\right), \tag{31}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_j\left(t,\sigma,s\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{ij}\left(t,\sigma,s\right),\ \Delta^2\left(\sigma,s,\lambda_j\right)=\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2;$$

$$\tilde{\tilde{f}}_j\left(t,\sigma,s\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{f}}_{ij}\left(t,\sigma,s\right);\tilde{\tilde{g}}_j^1\left(\sigma,s\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{ij}^1\left(\sigma,s\right);$$

$$\tilde{\tilde{g}}_j^2\left(\sigma,s\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{ij}^2\left(\sigma,s\right).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв’язком задачі (30), (31) є функція

$$\tilde{\tilde{u}}_j\left(t,\sigma,s\right)=\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\tilde{\tilde{g}}_j^2\left(\sigma,s\right)+\frac{d}{dt}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\tilde{\tilde{g}}_j^1\left(\sigma,s\right)+$$

$$+\int_0^t \frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)\left(t-\tau\right)\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\left[\tilde{\tilde{f}}_j\left(\tau,\sigma,s\right)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\times\right. \tag{32}$$

$$\left.\times\tilde{\tilde{g}}_0\left(\tau,\sigma,s\right)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\tilde{\tilde{g}}_l\left(\tau,\sigma,s\right)\right]d\tau.$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та $\underset{jn}{F}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$\underset{jn}{F}^{-1}\left[\ldots\right]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\ldots\dfrac{V_1\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\ldots\dfrac{V_2\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\ldots\dfrac{V_{n+1}\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\end{bmatrix}. \tag{33}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_j\left(t,\sigma,s\right)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_j\left(t,\sigma,s\right)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний розв'язок початково-крайової задачі (18)—(21):

$$\tilde{\tilde{u}}_i\left(t,\sigma,s,z\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\tilde{\tilde{g}}_j^2\left(\sigma,s\right)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\times\right.$$

$$\times\tilde{\tilde{g}}_j^1\left(\sigma,s\right)+\int_0^t\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)t-\tau\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\left[\tilde{\tilde{f}}_j\left(\tau,\sigma,s\right)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\times\right.$$

$$\times\tilde{\tilde{g}}_0\left(\tau,\sigma,s\right)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\times \tag{34}$$

$$\left.\left.\times\tilde{\tilde{g}}_l\left(\tau,\sigma,s\right)\right]d\tau\right\}\frac{V_i\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2};i=\overline{1,n+1}.$$

До функцій $\tilde{\tilde{u}}_i\left(t,\sigma,s,z\right)$, визначених формулами (34), послідовно застосуємо обернені оператори F_y^{-1} за правилом (16) та F_x^{-1} за правилом (8). Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j\left(t,x,y,z\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)f_k\left(\tau,\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)g_k^1\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)g_k^2\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+ \tag{35}$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[W_i^1\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z\right)g_0\left(\tau,\xi,\eta\right)+$$

$$+W_i^2\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z\right)g_l\left(\tau,\xi,\eta\right)d\xi d\eta d\tau; i=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1)—(6).

У формулах (35) застосовано компоненти

$$E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\times$$

$$\times\frac{V_i\left(z,\lambda_j\right)V_k\left(\xi,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\cos\left(\left|x-\xi\right|\sigma\right)\cos\left(\left|y-\eta\right|s\right)d\sigma ds; i,k=\overline{1,n+1}$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти

$$W_i^1\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)=-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{i1}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0\right)$$

нижньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна) та компоненти

$$W_i^2\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)=\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}E_{i,n+1}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,l\right)$$

верхньої аплікатної матриці Гріна розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_i^s\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right),\left(s=1,2\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j\left(t,x,y,z\right)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [24].

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^2 = a_{yj}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j^2 > 0$ формули (35) визначають структуру розв’язку гіперболічної крайової задачі (1)—(6) в ізотропному ($n+1$) — шаровому обмеженому за координатою z просторовому середовищі.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (35) розв’язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z = l_0, z = l$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 3. Аналіз розв’язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(t,x,y,z\right), g_j^1\left(x,y,z\right), g_j^2\left(x,y,z\right)$, $g_0\left(t,x,y\right)$, $g_l\left(t,x,y\right)$ проводиться безпосередньо.

2. $\Omega_2 = \left(-\infty;+\infty\right)\times\left(0;+\infty\right)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови (5) щодо змінної x та крайові умови

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)u_j\right|_{y=0} = \omega_j\left(t,x,z\right); \left.\frac{\partial^k u_j}{\partial y^k}\right|_{y=+\infty} = 0;\ k=0,1;\ j=\overline{1,n+1} \quad (36)$$

щодо змінної y, де h – деяка невід’ємна стала; $\omega\left(t,x,z\right) = \left\{\omega_1\left(t,x,z\right),\right.$ $\left.\omega_2\left(t,x,z\right),\ldots,\omega_{n+1}\left(t,x,z\right)\right\}$ – задана обмежена неперервна функція.

Припустимо, що розв’язок задачі (1)—(5), (36) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [22; 23; 16].

До задачі (1)—(5), (36) застосуємо інтегральне перетворення Фур’є на декартовій осі $\left(-\infty;+\infty\right)$ щодо змінної x. Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайової задачі (1)—(5), (36) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \left\{\left(t,y,z\right); t>0;\ y\in\left(0;+\infty\right);\ z\in K_n^+\right\}$ розв’язку системи рівнянь (10) з початковими умовами (11), крайовими умовами (12), крайовими умовами

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)\tilde{u}_j\right|_{y=0} = \tilde{\omega}_j\left(t,\sigma,z\right); \left.\frac{\partial^k \tilde{u}_j}{\partial y^k}\right|_{y=+\infty} = 0;\ k=0,1;\ j=\overline{1,n+1} \quad (37)$$

та умовами спряження (14).

До задачі (10)—(12), (37), (14) застосуємо інтегральне перетворення Фур’є на декартовій півосі $\left(0;+\infty\right)$ щодо змінної y [23]:

$$F_{+y}\left[g(y)\right]=\int\limits_0^{+\infty} g(y)K_y(y,s)dy\equiv\tilde{g}(s), \tag{38}$$

$$F_{+y}^{-1}\left[\tilde{g}(s)\right]=\int\limits_0^{+\infty} \tilde{g}(s)K_y(y,s)ds\equiv g(y), \tag{39}$$

$$F_{+y}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-s^2\tilde{g}(s)+K_y(0,s)\left(-\frac{dg}{dy}+hg\right)\Bigg|_{y=0}, \tag{40}$$

де ядро перетворення

$$K_y(y,s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(sy)+h\sin(sy)}{\sqrt{s^2+h^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (38) внаслідок тотожності (40) початково-крайовій задачі (10)—(12) (37), (14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3''=$ $=\left\{(t,z);\, t>0;\, z\in K_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2\tilde{\tilde{u}}_j}{\partial t^2}-a_{zj}^2\frac{\partial^2\tilde{\tilde{u}}_j}{\partial z^2}+\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2\right)\tilde{\tilde{u}}_j=\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z);\, j=\overline{1,n+1} \tag{41}$$

з початковими умовами (19), крайовими умовами (20) та умовами спряження (21), де

$$\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z)=\tilde{\tilde{f}}_j(t,\sigma,s,z)+a_{yj}^2K_y(0,s)\tilde{\omega}_j(t,\sigma,z);\, z\in \mathrm{I}_j;\, j=\overline{1,n+1}.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (41), (19)—(21) збігається із задачею (18)—(21). Отже, відповідно до формул (34), єдиний розв'язок задачі (41), (19)—(21) визначають функції

$$\tilde{\tilde{u}}_j(t,\sigma,s,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\tilde{\tilde{g}}_j^2(\sigma,s)+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\tilde{\tilde{g}}_j^1(\sigma,s)+\int\limits_0^t\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)t-\tau\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\Big[\tilde{\tilde{F}}_j(\tau,\sigma,s)- \tag{42}$$

$$-\sigma_1a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\tilde{\tilde{g}}_0(\tau,\sigma,s)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\times$$

$$\left.\times\tilde{\tilde{g}}_l(\tau,\sigma,s)\Big]d\tau\right\}\frac{V_i\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|};i=\overline{1,n+1}.$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{u}}_i(t,\sigma,s,z)$, визначених формулами (42), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_x^{-1}, одержуємо функції

$$
\begin{aligned}
u_i(t,x,y,z) &= \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta) f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\
&+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta) g_k^1(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \\
&+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta) g_k^2(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \\
&+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\Big[W_i^1(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z) g_0(\tau,\xi,\eta) + \\
&+W_i^2(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z) g_l(\tau,\xi,\eta) d\xi d\eta d\tau + \\
&+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yik}(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)\omega_k(\tau,\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta d\tau; i=\overline{1,n+1},
\end{aligned}
\tag{43}
$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1)—(5), (36).

У формулах (43) застосовано компоненти

$$
E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\big(\Delta(\sigma,s,\lambda_j)t\big)}{\Delta(\sigma,s,\lambda_j)}\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\times
$$
$$
\times\cos\big(|x-\xi|\sigma\big)K_y(y,s)K_y(\eta,s)dzds; i,k=\overline{1,n+1}
$$

матриці впливу, компоненти $W_i^s(t,x,\xi,y,\eta,z),(s=1,2)$ аплікатних матриць Гріна та компоненти $W_{yik}(t,x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(t,x,\xi,y,0,z,\zeta)$ ординатної матриці Гріна розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{ik}(t,x,\xi,y,$ $\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_i^s(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{yik}(t,x,\xi,y,z,\zeta)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (43), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5), (36) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [24].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-2 поширюються на випадок розглянутої гіперболічної крайової задачі; 2) параметр h дає можливість виділяти із формул (43) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $y=0$ крайових умов 1-го $\left(h \to \infty\right)$ та 2-го роду $\left(h \to 0\right)$; 3) аналіз розв'язку (43) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(t,x,y,z\right), g_j^1\left(x,y,z\right), g_j^2\left(x,y,z\right), \ g_0\left(t,x,y\right), g_l\left(t,x,y\right), \omega_j\left(t,x,z\right)$ проводиться безпосередньо.

Висновки. Методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень Фур'є у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) побудовано точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в обмежених кусково-однорідних просторових областях, які описуються декартовою системою координат. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань).

Список використаних джерел:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука, 1978. — 352 с.
2. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. — М. : ИЛ, 1957. — 256 с.
4. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М. І. Матійчук. — Чернівці : Прут, 2003. — 248 с.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1966. — 292 с.
6. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
7. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
8. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
9. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
10. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
11. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.

12. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
13. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
14. Громик А. П. Стаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2008. — 120 с.
15. Громик А. П. Нестаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2009. — 120 с.
16. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
17. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових просторових областях / І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2010. — Вип. 19, ч. 1. — С. 47–59.
18. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених двоскладових просторових областях / І. М. Конет // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 3. — С. 55–71.
19. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Львів, 2011. — 48 с. — (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 01.11).
20. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях / І. М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 127–140.
21. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях / І. М. Конет // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2011. — Вип. 4. — С. 36–54.
22. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
23. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 60 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
24. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

The method of influence functions and Green's function (key solutions) developed integral image accurate analytical solutions of algorithmic nature of hyperbolic boundary value problems in bounded piecewise-homogeneous (multi) spatial regions. To build a major integrated solutions are involved corresponding Fourier transform to Cartesian axis and semi-axles and integral Fourier transform on *n* Cartesian segment of coupling points.

Key words: *hyperbolic equations, initial and boundary conditions, matching, integral transformation, the main solution.*

Отримано: 22.05.2012

УДК 517.977.56

М. М. Копець, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України ‹‹КПІ››, м. Київ

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИНГУЛЯРНОЮ ЛІНІЙНОЮ СИСТЕМОЮ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У статті розглядається задача оптимального керування лінійною сингулярною системою з розподіленими параметрами і квадратичним функціоналом. Використовуючи метод множників Лагранжа, отримано рівняння Ейлера—Лагранжа. Для дослідження цих рівнянь виведено матричне інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті. Доведено єдиність оптимального керування.

Ключові слова: *оптимальне керування, сингулярна система лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, метод множників Лагранжа, рівняння Ейлера—Лагранжа, матричне інтегро-диференціальне рівняння Ріккаті.*

1. Вступ

Дослідження систем диференціальних рівнянь, що не розв’язані відносно старших похідних, почалось ще в сорокових роках минулого століття. Однією із перших робіт, присвячених вище згаданій тематиці, є стаття академіка М. М. Лузіна [10]. Системи подібного типу розглянуті також в монографії [8, с. 348]. Однак тільки на початку 80-х років минулого століття почалось систематичне дослідження таких систем.

Значне зростання популярності подібних систем пояснюється, з одного боку, їх широким застосуванням для моделювання великого числа практичних задач у техніці, економіці, з другого боку, тією обставиною, що таким системам властиві певні особливості у порівняні із системами звичайних диференціальних рівнянь. Такі системи називають по-різному: алгебро-диференціальні системи; вироджені системи; диференціально-алгебраїчні системи; системи не типу Коші-Ковалевської; системи, не розв’язані відносно старших похідних; дескрипторні системи; сингулярні системи; системи з виродженням. Од-

